

ガロア体上の原始既約多項式の係数について

早大 システム科学研究所

高橋 磐郎, 形本 英士

§0 まえに

$GF(p)$ (p は素数) 上 n 次の原始既約多項式の構成には, 勝手に多項式を与えてそれをチェックするとか, $x^{p^n}-1$ の因数分解をするなど, 多くの手間を必要とする. ここでは Frobenius cycle の和から生成される環の分解を利用して原始既約多項式の係数を生成する簡単なアルゴリズムを提案する. $p=2$ の場合には半単純環の中の直交化の一般的アルゴリズム (§A) をこの問題に適用することからなるが, 特殊な場合についての効率よい巡回的アルゴリズムを提案する (§2, 3). $p \neq 2$ のときの具体的なアルゴリズムはまた完成していないが, 同一の理論に基づくアルゴリズムの作成は容易と思われる.

§1 基本定理

$\text{GF}(p)$ 上 $\text{mod}(x^{p^n}-1)$ の多項式環を R とし,

$$G = \{x, x^2, \dots, x^{p^n-1}\} \quad (1)$$

とする. 任意の $y \in G$ に対して $\{y, y^p, \dots, y^{p^{m-1}}\}$ ($y^{p^m} = y$ であり $l < m$ について $y^{p^l} \neq y$) を Frobenius cycle と呼び, 1つの Frobenius cycle の中の元の総和

$$t(y) = y + y^p + y^{p^2} + \dots + y^{p^{m-1}} \quad (2)$$

を y の trace と呼ぶ. もちろん $t(y) = t(y^{p^l})$ が成立つ.

G の trace の全体を $\{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}\}$ とする.

定理 1 2つの trace の積はつねに trace の ($\text{GF}(p)$ の元を係数とする) 1次結合であらわされる. すなわち

$$t_i t_j = \sum_{\nu=0}^{k-1} c_{ij}^{\nu} t_{\nu} \quad (c_{ij}^{\nu} \in \text{GF}(p), 0 \leq i, j \leq k-1) \quad (3)$$

したがって

$$T = \{x_0 t_0 + \dots + x_{k-1} t_{k-1} : x_i \in \text{GF}(p), 0 \leq i \leq k-1\} \quad (4)$$

は R の部分環である. さらに T は $\text{GF}(p)$ 上の多項式環で,

(3) と乗積表とすることができる. (証明 略)

$\theta \in \text{GF}(p^n)$ の原始元とし, $f(x) \in \theta$ の $\text{GF}(p)$ 上の最小多項式つまり原始既約多項式とする. $f(x)$ を

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_0 \quad (a_i \in \text{GF}(p)) \quad (5)$$

とする. θ を含む Frobenius cycle の元 $\theta, \theta^p, \theta^{p^2}, \dots, \theta^{p^{n-1}}$ はすべて $f(x) = 0$ の根であるから, 根と係数との関係から

$$a_1 = -\sum_{0 \leq i \leq n-1} \theta^{p^i}, \quad a_2 = \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \theta^{p^i} \theta^{p^j}, \quad a_3 = -\sum_{0 \leq i, j, k \leq n-1} \theta^{p^i} \theta^{p^j} \theta^{p^k} \dots \quad (6)$$

が成立 $\rightarrow$. x は T 形式的に

$$a_1(x) = -\sum_{0 \leq i \leq n-1} x^{p^i}, \quad a_2(x) = \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} x^{p^i} x^{p^j}, \quad a_3(x) = -\sum_{0 \leq i, j, k \leq n-1} x^{p^i} x^{p^j} x^{p^k} \dots \quad (7)$$

を定義するとつぎが成立 $\rightarrow$.

定理 2 $a_1(x), \dots, a_m(x)$ は $\text{trace } t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ の
($\text{GF}(p)$ の元係数と T と) 1 次結合 T の S がとれる.

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{k-1} c_{ij} t_j, \quad c_{ij} \in \text{GF}(p), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq k-1 \quad (8)$$

(T と $a_1(x), \dots, a_m(x)$ は T の元とある. (証明略))

例 1 $p=2, n=3, x^7=1, k=2$

$$t_0 = x + x^2 + x^4, \quad t_1 = x^3 + x^6 + x^5, \quad t_0^2 = t_0, \quad t_1^2 = t_1, \quad t_0 t_1 = 0$$

$$a_1(x) = t_0, \quad a_2(x) = t_1, \quad a_3(x) = t_0 + t_1$$

例 2 $p=2, n=4, x^{15}=1, k=4$

$$t_0 = x + x^2 + x^4 + x^8, \quad t_1 = x^7 + x^{14} + x^{13} + x^{11}, \quad t_2 = x^3 + x^{16} + x^{12} + x^9$$

$$t_3 = x^5 + x^{10}, \quad t_i^2 = t_i, \quad 0 \leq i \leq 3$$

$$t_0 t_1 = t_0 + t_1 + t_2, \quad t_0 t_2 = t_0, \quad t_1 t_2 = t_1, \quad t_0 t_3 = t_1 + t_2$$

$$t_1 t_3 = t_2 + t_0, \quad t_2 t_3 = t_0 + t_1$$

$$a_1(x) = t_0, \quad a_2(x) = t_2 + t_3, \quad a_3(x) = t_1, \quad a_4(x) = t_0 + t_1 + t_2 + t_3$$

$t \in R$ の中に線形関係

$$(x^{p^n-1} - 1) / (x^d - 1) = 0 \quad \text{for } \forall d \mid (p^n - 1) \quad (9)$$

を導入しよう. $\text{GF}(p)$ 上 n 次原始既約多項式全体は $(x^{p^n-1} - 1)$ の因数 t_i に表われるから, これらの全体の積つまり σ - σ^n p^n-1 の円周等分多項式 $p(x)$ とする, R の中に $\text{mod } p(x)$ で与えられた (9) の線形関係 t は同値であり, $\text{mod } p(x)$ による環 $\bar{R}$ とする, (9) は R から $\bar{R}$ への準同型を規定する. この準同型による T の像を $\bar{T}$ としよう.

例 3 例 2 では (9) は σ と σ^4 による;

$$\left. \begin{aligned} (x^{15}-1)/(x-1) &= 1+x+x^2+\dots+x^{14}=0 \\ (x^{15}-1)/(x^3-1) &= 1+x^3+x^6+x^9+x^{12}=0 \\ (x^{15}-1)/(x^5-1) &= 1+x^5+x^{10}=0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これらは $t_3=1, t_2=1, t_0+t_1=1$ となる. $x^{15}-1$ の既約因式分解は,

$$x^{15}-1 = (x-1)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^4)(1+x^3+x^4) \quad (11)$$

となり, σ - σ^{15} の円周等分多項式は $p(x) = (1+x+x^4) \times (1+x^3+x^4)$ である. (10) の関係は $\text{mod } p(x)$ と同値で, T の $\bar{T}$ への準同型は, 表 1 のようになり

$$\bar{T} = \{ 0, t_0, t_1, t_0+t_1=1 \}$$

である. //

表 1

T	$\bar{T}$	T	$\bar{T}$	T	$\bar{T}$
$0 \rightarrow 0$		$t_0 + t_1 \rightarrow 1$		$t_0 + t_1 + t_2 \rightarrow 0$	
$t_0 \rightarrow t_0$		$t_0 + t_2 \rightarrow t_1$		$t_0 + t_1 + t_3 \rightarrow 0$	
$t_1 \rightarrow t_1$		$t_0 + t_3 \rightarrow t_1$		$t_0 + t_2 + t_3 \rightarrow 0$	
$t_2 \rightarrow 1$		$t_1 + t_2 \rightarrow t_0$		$t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow t_1$	
$t_3 \rightarrow 1$		$t_1 + t_3 \rightarrow t_0$		$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow 1$	
		$t_2 + t_3 \rightarrow 0$			

今后任意の $r \in R$ に対してこの準同型による像を $\bar{r}$ と書くことにする。これにより $\bar{t}_0 = t_0, \bar{t}_1 = t_1, \bar{t}_2 = 1, \bar{t}_3 = 1$ となる。

$$(9) \text{ 式で } d=1 \text{ とおくと } 1+x+x^2+\cdots+x^{p^n-2}=0 \text{ となる}$$

よって、これは

$$1 + \bar{t}_0 + \bar{t}_1 + \cdots + \bar{t}_{p^n-1} = 0 \quad (12)$$

となり、これから $\bar{T}$ は乘法単位元 1 を 4 つ含むことを示す。

p^n-1 本係数を持つ (9) から出る関係は (12) と同じである。

定理 3 基本定理 $\bar{T}$ は $GF(p)$ に写す環準同型 ρ

とし、

$$a_i = \rho(\bar{a}_i(x)) \quad 1 \leq i \leq n \quad (13)$$

とする。 $a_1, \dots, a_n$ は $GF(p)$ 上 n 次の原始既約多項式の係数 ($\rightarrow (5)$) である。逆に任意の ($GF(p)$ 上 n 次) 原始既約多項式の係数は $\bar{T}$ から $GF(p)$ への適当な環準同型の $\bar{a}_i(x)$ の像として得られる。(証明略)

$\bar{T}$ から $GF(p)$ への準同型の核は $\bar{T}$ の極大イデアルである。逆に I を $\bar{T}$ の極大イデアルとすると、 $I \neq 0$ に對する $\bar{T}$ から $GF(p)$ への環同型は準同型を構成する。(→ 定理 4)。よって、 $\bar{T}$ の極大イデアルの個数と $\bar{T}$ の極大イデアルの個数と一致する。よって、 $\bar{T}$ の極大イデアルの個数は l である。

定理 4 $\bar{T}$ は半単純環で

$$l = \varphi(p^n - 1)/n \quad (\varphi \text{ はオイラー関数}) \quad (14)$$

個の極大イデアル $M_0, \dots, M_{l-1}$ の直和に一意的に分解される。つまり

$$\bar{T} = M_0 \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_{l-1} \quad (15)$$

で各 M_i は $GF(p)$ に同型である。 $p^n - 1$ が素数のときは明らかに $l = 1$ (証明略)

よって $\bar{T}$ の中に互に直交し和が 1 になる l 個のべき等元 $e_0, e_1, \dots, e_{l-1}$;

$$\left. \begin{aligned} e_i e_j &= \delta_{ij} e_i \quad (\delta_{ij} \text{ はクロネッカーのデルタ}) \\ e_0 + e_1 + \dots + e_{l-1} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq i, j \leq l-1 \quad (16)$$

を得る。これを踏まれば、半単純環のよく知られた性質から [2]

$$M_i = \bar{T} e_i, \quad 0 \leq i \leq l-1 \quad (17)$$

が定理 4 における極大イデアルとなる。よって

$$\bar{M}_i = M_0 \oplus \dots \oplus M_{i-1} \oplus M_{i+1} \oplus \dots \oplus M_{l-1}, \quad 0 \leq i \leq l-1 \quad (18)$$

とすれば、 $\bar{M}_i$ は $\bar{T}$ の極大イデアルで、 $\bar{M}_0, \bar{M}_1, \dots, \bar{M}_{l-1}$ は互に

に $\bar{T}$ の極大イデアルはない。

このとき任意の $r \in \bar{T}$ は

$$r = r_0 e_0 + r_1 e_1 + \cdots + r_{l-1} e_{l-1} \quad (r_i \in GF(p), 0 \leq i \leq l-1) \quad (19)$$

と一意に表わすため、各 r_i は

$$r e_i = r_i e_i \quad (r_i \in GF(p)) \quad (20)$$

によって決まることになる。よって $\bar{T}$ を 0 に写像する $\bar{T}$ の $GF(p)$ への準同型を ρ_i とすると

$$\rho_i(r) = r_i, \quad 0 \leq i \leq l-1 \quad (21)$$

以上から原始既約多項式の係数と決まるアルゴリズムを

と決めること；

- (i) (8) によって $a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)$ を求める
- (ii) (16) をみたすべき等元 e_i を 1 つ求める
- (iii) $a_1(x) e_i = a_1 e_i, a_2(x) e_i = a_2 e_i, \dots, a_m(x) e_i = a_m e_i$ (22)
とすると $a_1, a_2, \dots, a_m$ が原始既約多項式 (5) の係数

以上のことで $e_i = e_0, e_1, \dots, e_{l-1}$ のおののおのについて行えばすべての原始既約多項式が作られる。

§2 巡回的アルゴリズム (p^m-1 素数の場合)

以上によって結局は §1 (16) をみたす $e_0, e_1, \dots, e_{l-1}$ を求めるのはよいことになった。 $p=2$ の場合 §A に示す直交化の方法を用いるのは常に可能であるが、この § では p^m-1

が素数の場合をわめて簡単な巡回的アルゴリズムで提案しよう。また p^{n-1} が素数なら $p=2$ で $k=1$ であることに注意しておこう。

まず t_k の中の x の指数の集合を N_k としておく。 $j \in \{1, 2, \dots, p^n-2\}$ について π_j を

$$x \rightarrow x^j \pmod{x^{p^n-1}-1} \quad (G \text{ 上で } x \text{ の指数を } j \text{ 倍する}) \quad (23)$$

なる変換としよう。これは $\{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}\}$ 上に置換をひき起す。よか

$$N_0 = \{1, p, p^2, \dots, p^{n-1}\} \quad (24)$$

の元のとまり π_j は恒等置換となる。 N_0 は加法群

$$N = \{1, 2, \dots, p^n-2\} \pmod{p^n-1} \quad (25)$$

の部分群で、 N を N_0 でコセット分割すれば各コセットは N_k となる。商群 $N/N_0 = \{N_0, N_1, \dots, N_{k-1}\}$ は、 N_1 が p^n-1 の原始根 ε を含むとすると N_1 を生成元とする巡回群となる。このとき

$$N_0 = N_1^0, N_1 = N_1^1, N_2 = N_1^2, \dots, N_{k-1} = N_1^{k-1} \quad (26)$$

のように番号をつけるとそれに対えて $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ に1番号を定める。つまり p^n-1 の原始根を1つ選ぶことにより trace に番号をつけることと決まってくる。

例 4 $p=2, n=5, x^{31}=1, k=6$. 31の原始根として3を選ぶとつぎのようになる順序を得られる。

$$\begin{array}{ll}
N_0 = \{1, 16, 8, 4, 2\} & t_0 = x + x^{16} + x^8 + x^4 + x^2 \\
N_1 = \{3, 17, 24, 12, 6\} & t_1 = x^3 + x^{17} + x^{24} + x^{12} + x^6 \\
N_2 = \{9, 20, 10, 5, 18\} & t_2 = x^9 + x^{20} + x^{10} + x^5 + x^{18} \\
N_3 = \{27, 29, 30, 15, 23\} & t_3 = x^{27} + x^{29} + x^{30} + x^{15} + x^{23} \\
N_4 = \{19, 25, 28, 14, 7\} & t_4 = x^{19} + x^{25} + x^{28} + x^{14} + x^7 \\
N_5 = \{26, 13, 22, 11, 21\} & t_5 = x^{26} + x^{13} + x^{22} + x^{11} + x^{21}
\end{array}$$

このように乗積表は巡回的に得られる:

$$\begin{array}{lll}
t_0 t_1 = t_0 + t_2 + t_5 & t_0 t_2 = t_1 + t_2 + t_4 & t_0 t_3 = t_2 + t_5 \\
t_1 t_2 = t_1 + t_3 + t_0 & t_1 t_3 = t_2 + t_3 + t_5 & t_1 t_4 = t_3 + t_0 \\
t_2 t_3 = t_2 + t_4 + t_1 & t_2 t_4 = t_3 + t_4 + t_0 & t_2 t_5 = t_4 + t_1 \\
t_3 t_4 = t_3 + t_5 + t_2 & t_3 t_5 = t_4 + t_5 + t_1 & \\
t_4 t_5 = t_4 + t_0 + t_3 & t_4 t_0 = t_5 + t_0 + t_2 & \\
t_5 t_0 = t_5 + t_1 + t_4 & t_5 t_1 = t_0 + t_1 + t_3 & t_i^2 = t_i, 0 \leq i \leq 5
\end{array}$$

$$a_1(x) = t_0, a_2(x) = t_1 + t_2, a_3(x) = t_4 + t_5, a_4(x) = t_3, a_5(x) = 1$$

定理5 (予想) 上に定めた順に trace の番号 $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ をつけるとする. $t_0 t_1 \dots t_r = 0$ より小さい r については $t_0 t_1 \dots t_r \neq 0$ であるとする.

$$e_i = t_i t_{i+1} \dots t_{i+r-1} \quad (\text{添字は mod } k) \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad (27)$$

とかくと, $e_0, e_1, \dots, e_{k-1}$ は $\overline{T}$ の右側の直交ベキ等元で $e_i e_j = 1$ となる. つまり (16) をみたす.

以下に上の定理を利用 (2.5 の (i)(ii)(iii)) にして可なり. この原始既約多項式で与められた例と示す. 左に (iii) のように直接 a_i と与めず $-t_i$ と t_j を併用する.

例 5 $p=2, n=5, x^{31}=1, k=6$

$t_0 t_1 t_2 = 0 \quad (t_0 t_1 \neq 0)$

$e_0 = t_0 t_1 (=t_0 + t_2 + t_5)$ $e_1 = t_0 t_2 (=t_1 + t_3 + t_0)$ $e_2 = t_2 t_3 (=t_2 + t_4 + t_1)$ $e_3 = t_3 t_4 (=t_3 + t_5 + t_2)$ $e_4 = t_4 t_5 (=t_4 + t_0 + t_3)$ $e_5 = t_5 t_0 (=t_5 + t_1 + t_4)$	<table border="1"> <tr> <th>t_0</th><th>t_1</th><th>t_2</th><th>t_3</th><th>t_4</th><th>t_5</th><th>a_0</th><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th></tr> <tr> <td>e_0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>e_1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>e_2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>e_3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr> <td>e_4</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>e_5</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	e_0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	e_1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	e_2	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	e_3	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	e_4	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	e_5	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	$a_1 = t_0$ $a_2 = t_1 + t_5$ $a_3 = t_4 + t_5$ $a_4 = t_3$ $a_5 = 1$
t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5																																																																											
e_0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1																																																																											
e_1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1																																																																											
e_2	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1																																																																											
e_3	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1																																																																											
e_4	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1																																																																											
e_5	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1																																																																											

$c_{ij}: e_i t_j = c_{ij} e_i$

例 6 $p=2, n=7, x^{127}=1, k=18$

原始根 α を $\varepsilon=3$ を選ぶ, $t_0, t_1, \dots, t_{17}$ と番号をつける

$t_0 t_1 \dots t_5 = 0 \quad (t_0 t_1 \dots t_\Delta \neq 0 \text{ for } \Delta < 5)$

$e_0 = t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 (=t_0 + t_1 + t_3 + t_4 + t_5 + t_8 + t_{14} + t_{16} + t_{17})$

$e_1, e_2, \dots, e_{17}$ は e_0 から巡回的に求まる。

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}	t_{17}	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
e_0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
e_1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

$a_1(x) = t_0, a_2(x) = t_1 + t_2 + t_{15}, a_3(x) = t_4 + t_7 + t_8 + t_{12} + t_{14}$
 $a_6(x) = t_9, a_5(x) = t_6 + t_{10} + t_{11}, a_4(x) = t_3 + t_5 + t_{13} + t_{16} + t_{17}, a_7(x) = 1$

(28)

上の表で e_0 の $t_0 \sim t_{17}$ に対する行が求まる, これを元に $e_1, e_2, \dots$ の $t_0 \sim t_{17}$ に対する行が求まる. そのおののおのによつて (28) 式を用いて $a_1 \sim a_7$ を求められる. なお $a_2(x)$ を求める場合に実際には $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ を用いて t_2 と t_9 により $a_6(x), a_5(x), a_4(x)$ を得る。

§3 巡回的アルゴリズム ($p=2$, $\bar{N}/N_0$ が巡回群)

$\bar{N} (\subset N)$ を p^m-1 に素な数の集合とすると, $\bar{N}$ は $\text{mod } (p^m-1)$ の中で乗法群を作る. $\forall i \in N_0 = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}\}$ は $\bar{N}$ の部分群である. $\therefore$ $\bar{N}/N_0$ が巡回群の場合を考える.

N_i を $\bar{N}/N_0$ の生成元とし, $N_0, N_1, N_2, \dots, N_{\ell-1}$ の番号と

$$N_i = N_1^i, \quad 0 \leq i \leq \ell-1 \quad (29)$$

で表わす. N_i の番号を N_i に添えて表わす, $0 \leq i \leq \ell-1$.

$j \geq \ell$ について N_j の番号は任意である. このとき, 定理 5 は $\ell = \ell$ について成立する (予想).

以下に §2 と同様いくつかの例を示す.

例 7

$$p=2, n=4, x^{15}=1, k=4, l=2$$

$$\bar{N} \begin{cases} N_0 = \{1, 2, 4, 8\} & t_0 = x + x^2 + x^4 + x^8 \\ N_1 = \{7, 14, 13, 11\} & t_1 = x^7 + x^{14} + x^{13} + x^{11} \\ N_2 = \{3, 16, 12, 9\} & t_2 = x^3 + x^{16} + x^{12} + x^9 \\ N_3 = \{5, 10\} & t_3 = x^5 + x^{10} \end{cases}$$

$$t_0 t_1 = 0 \quad (\leftarrow \text{example 3}) \text{ so } e_0 = t_0, e_1 = t_1.$$

	t_0	t_1	a_1	a_2	a_3	a_4
e_0	1	0	1	0	0	1
e_1	0	1	0	0	1	1

$$a_1(x) = t_0, a_2(x) = 0$$

$$a_3(x) = t_1, a_4(x) = 1$$

例 8

$$p=2, n=6, x^{63}=1, k=12, l=6$$

$$\begin{aligned} t_0 &= x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + x^{32} & t_6 &= x^3 + x^6 + x^{12} + x^{24} + x^{48} + x^{33} \\ t_1 &= x^5 + x^{10} + x^{20} + x^{40} + x^{17} + x^{34} & t_7 &= x^{15} + x^{30} + x^{60} + x^{57} + x^{51} + x^{39} \\ t_2 &= x^{11} + x^{22} + x^{44} + x^{25} + x^{50} + x^{37} & t_8 &= x^7 + x^{14} + x^{28} + x^{56} + x^{49} + x^{35} \\ t_3 &= x^{31} + x^{62} + x^{61} + x^{59} + x^{55} + x^{47} & t_9 &= x^9 + x^{18} + x^{36} \\ t_4 &= x^{23} + x^{46} + x^{29} + x^{58} + x^{53} + x^{43} & t_{10} &= x^{27} + x^{54} + x^{45} \\ t_5 &= x^{13} + x^{26} + x^{52} + x^{41} + x^{19} + x^{38} & t_{11} &= x^{21} + x^{42} \end{aligned}$$

$$t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 = 0 \quad (t_0 t_1 \dots t_s \neq 0, s < 4) \quad e_0 = t_0 t_1 t_2 t_3 (= t_1 + t_2 + t_6)$$

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
e_0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
e_1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
												

$$a_1(x) = t_0, a_2(x) = t_1 + 1, a_3(x) = t_2 + t_5 + 1, a_4(x) = t_4 + 1, a_5(x) = t_3$$

$$a_6(x) = 1$$

where from (9)

$$t_{11} = 1, t_9 + t_{10} = 1, t_8 = 0, t_6 + t_7 = 1, t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_5 = 0.$$

§A $p=2$ の場合の直交化アルゴリズム ([1] 52頁の要約)

R の生成元を $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ (必ず1つ1つ独立である) とする。

$p=2$ ならばこれはすべてべき等である。

手順1 $e_0 = t_0, e_1 = 1 + t_0$ とする。 $e_0 e_1 = 0, e_0 + e_1 = 1$

手順2 $e_i t_1, e_i(1+t_1)$ のうち $\neq 0$ であるような i を1つ選ぶ。

たとえば $i=0$ から選ぶ。 $e_0 t_1, e_0(1+t_1)$ はべき等であり互に直交し、1か1つたまたま e_i と直交する。 (かつ e_i の和は e_0 となるから、改めて

$$e_0 t_1 \rightarrow e_0, e_0(1+t_1) \rightarrow e_1, e_1 \rightarrow e_2$$

とすると、これらは直交べき等であり全体の和が1となる。

手順3 $e_i t_2, e_i(1+t_2)$ のうち $\neq 0$ であるような i を1つ選ぶ。

たとえば $i=1$ から選ぶ。 e_1 と $e_1 t_2, e_1(1+t_2)$ の2つに分割して改めて

$$e_0 \rightarrow e_0, e_1 t_2 \rightarrow e_1, e_1(1+t_2) \rightarrow e_2, e_2 \rightarrow e_3$$

とすると、これらは直交べき等であり全体の和が1となる。

以上の手順をつづけて

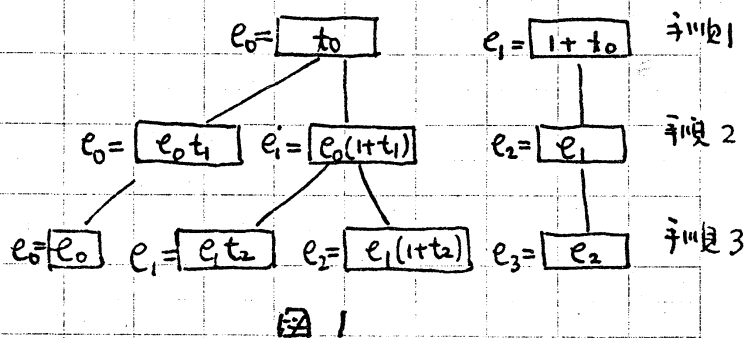
$e_i t_{k-1}, e_i(1+t_{k-1})$ のうち

$\neq 0$ であるような i から存在

しないものまでの、 $e_0, e_1,$

$\dots, e_{k-1}$ から 原始べき等

元つまり、 R の 極小イデアル となるものである。



例 10 $p=2, m=5, x^3=1, k=l=6$ の場合に上のアルゴ

リズムを適用するとつぎの図²のようになる。ただし図²では変化しないべき等を重複して書くことはしてある。

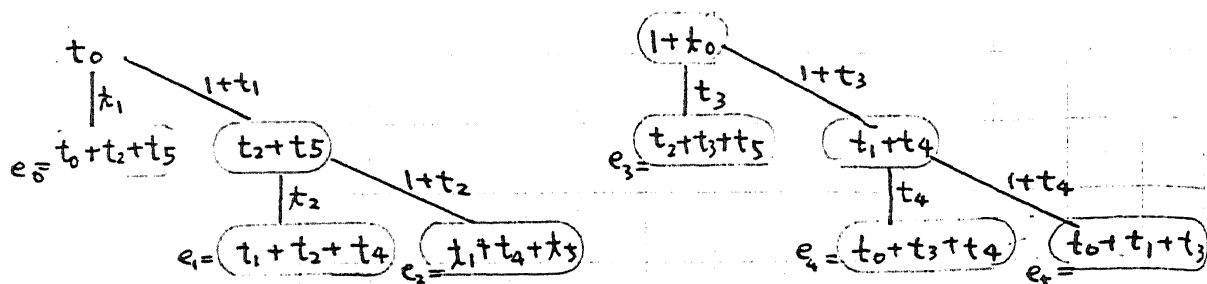


図 2

ここで得られた $e_0, e_1, \dots, e_5$ は例 5 で与えた t の順序を除いて完全に一致している。

参考文献

- [1] J. H. van Lint "Coding Theory" Springer-Verlag
Lecture Notes in Math. 201 (1971)
- [2] I. F. Blake & R. C. Mullin "The Mathematical Theory
of Coding" Academic Press (1975)

この研究に当って群馬大学^{群馬}理学部^{理学部}の
神保雅一氏から有益な助言をいただいたのでここに感謝いたします。