

無限次元力学系における位相検証

北海道大学・電子科学研究所 平岡 裕章 (Yasuaki Hiraoka)
Research Institute for Electronic Science,
Hokkaido University
hiraoka@nsc.es.hokudai.ac.jp

1 序

本稿では無限次元力学系における位相計算理論についての解説を行なう。まず最初に Conley 指数を用いた定常解の存在検証法を紹介する。ここで Conley 指数とは力学系における孤立した不変集合に対して定められる位相的な量であり、不変集合の近傍におけるベクトル場の情報から計算することができる。定常解の数値検証法においては、まず近似定常解の周りで区間の直積で与えられるボックスを用意する。次にその境界でベクトル場の向きを厳密に評価することにより、Conley 指数を精度保証付きで計算する。ここで得られた Conley 指数が双曲型平衡点と同じものであれば、定常解がこのボックスの中に存在することが証明される。

定常解の数値検証法にはここで紹介する位相的な方法以外にも様々なものがあり、それぞれには一長一短がある。本稿では、位相的方法を用いる重要な長所である定常解間の接続軌道の存在証明を与える方法についても簡単に解説を行なう。数値検証によって存在が証明された定常解とその Conley 指数の情報から、代数的議論を経ることによりそれらの解の間の接続軌道の存在を調べることができる。

本研究は、小川知之 (大阪大学), Konstantin Mischaikow (ジョージア工科大学), Sarah Day (コーネル大学) 氏との共同研究によるものである。

2 Conley 指数を用いた定常解の検証

まず初めに Conley 指数理論 (例えば [1] を参照) について簡単に復習しておく。局所コンパクト位相空間 X 上に流れ $\varphi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ が与えられているとする。この時コンパクト集合 $N \subset X$ がその内部に流れ φ に関する極大不変集合 $\text{Inv}(N, \varphi) := \{x \in N \mid \varphi(\mathbb{R}, x) \subset N\}$ を含むとき、すなわち $\text{Inv}(N, \varphi) \subset \text{Int } N$ のとき N を孤立化近傍と呼び、 $\text{Inv}(N, \varphi)$ を孤立不変集合と呼ぶ。さらに孤立化近傍の境界が

$$\begin{aligned} L^+ &:= \{x \in \partial N \mid \exists t > 0 \text{ s.t. } \varphi((0, t), x) \cap N = \emptyset\}, \\ L^- &:= \{x \in \partial N \mid \exists t > 0 \text{ s.t. } \varphi((-t, 0), x) \cap N = \emptyset\} \end{aligned}$$

の和集合で構成されているとき N を孤立化ブロックと定義し、 L^+ , L^- をそれぞれ出口、入口と呼ぶことにする (図 1 参照)。

任意の孤立不変集合に孤立化近傍を適当にとれば孤立化ブロックになること、また特定の孤立不変集合に対して異なる孤立化ブロックと出口の空間対 $(N_1, L_1^+), (N_2, L_2^+)$ があれば

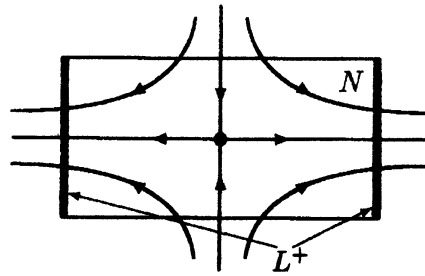


図 1: 孤立不変集合, 孤立化ブロックの例

(N_1, L_1^+) と (N_2, L_2^+) が空間対としてホモトピー同値であることが知られている [1]. よって孤立不変集合に対してその Conley 指数を以下のように定める.

定義 1 (N, L^+) を孤立不変集合 $\text{Inv}(N, \varphi)$ の孤立化ブロックと出口の空間対としたとき, 相対ホモロジー群

$$CH_*(\text{Inv}(N, \varphi)) := H_*(N, L^+)$$

を孤立不変集合 $\text{Inv}(N, \varphi)$ の Conley 指数と呼ぶ.

以後ホモロジー群の係数として $\mathbb{Z}_2$ を用いることにする.

ここで孤立不変集合があらかじめ分かっている場合であっても, 孤立化ブロックの境界でのベクトル場の情報から Conley 指数は計算可能であることに注意しておく. では, ここで定義された Conley 指数の情報からなんらかの孤立不変集合の性質を引き出すことは可能であろうか. 以下の定理はこの疑問に対する部分的な解答を与えるものである.

定理 2 ([6]) ある非負整数 k に対して

$$CH_j(\text{Inv}(N, \varphi)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = k, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (1)$$

ならば, N の中に平衡点が存在する.

この定理は孤立化ブロックが与えられた時に, その Conley 指数が双曲型平衡点の Conley 指数と同じであれば平衡点が存在することを主張するものであり, レフシェッツの不動点定理と同等である. また, 結論として得られる平衡点が双曲型であるかどうかは一般には不明である. しかしながら, もし平衡点がたかだか 1 つであり, 双曲型であることがわかれば, 不安定次元が k であることがわかる. その意味で Conley 指数に基づく検証が成功すれば多くの場合安定性の情報も同時に得られる.

この定理をもとに, 発展方程式の定常解の存在証明を, 位相的な方法によって与える検証法について議論しよう. 本稿では Swift-Hohenberg 方程式 (以下 SH 方程式):

$$u_t = \left\{ \nu - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} u - u^3, \quad (2)$$

$$u(t, x) = u(t, x + L), \quad u(t, x) = u(t, -x)$$

を例に挙げて解説を行なう。周期 L の周期境界条件であるから先ずはフーリエ余弦級数展開 $u(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(t) \cos(jk_0 x)$ を施して可算無限個の常微分方程式系に帰着する ($k_0 = 2\pi/L$ とする),

$$\dot{a}_j = f_j(a) := \zeta_j a_j - f_j^{(3)}(a), \quad j = 0, 1, \dots \quad (3)$$

ここで $\zeta_j = \nu - (1 - j^2 k_0^2)^2$ であり

$$f_j^{(3)}(a) = \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=j \\ m_i \in \mathbb{Z}}} a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3}$$

である。

こうして (2) の定常解を (3) の平衡点 $f_j(a) = 0$, $j = 0, 1, \dots$, とみなし, 式 (3) の平衡点の存在を Conley 指数を用いて検証するのである。

無限次元力学系 (3) を次のように分解しよう。

$$a = (a_F, a_I), \quad a_F = (a_0, a_1, \dots, a_m), \quad a_I = (a_{m+1}, a_{m+2}, \dots) \\ f(a) = (f_F(a), f_I(a)), \quad f_F(a) = (f_0(a), f_1(a), \dots, f_m(a)), \quad f_I(a) = (f_{m+1}(a), f_{m+2}(a), \dots).$$

以後添字 F, I はそれぞれ有限次元部分, 無限次元部分を表すものとして用いる。さてガレルキン近似を $g_F(a_F) := f_F(a_F, a_I = 0)$ として $g_F(\bar{a}_F) \approx 0$ を満たす近似平衡点 $\bar{a} = (\bar{a}_F, 0)$ の近傍に真の平衡点があると考えるのは自然であろう。ガレルキン近似のエラー項を $r(a_F, a_I) := f_F(a_F, a_I) - g_F(a_F)$ とおく。次にベクトル場の出入りを計算機を用いて厳密に調べる際に, 本質的な役割を果たす新しい変数 $b = (b_F, b_I)$ を

$$(Pb_F + \bar{a}_F, b_I) = (a_F, a_I) \quad (4)$$

として導入する。ここで P は $\bar{a}_F$ でのヤコビ行列 $Dg_F(\bar{a}_F)$ の固有ベクトル p_i を第 i 列に持つ行列とし, この変数変換を $T: (b_F, b_I) \mapsto (a_F, a_I)$ と表す。この時新しい変数に対する力学系は, $\bar{a}_F$ で $g_F(a_F)$ をテイラー展開することで,

$$\dot{b}_j = h_j(b) := \begin{cases} \lambda_j b_j + R_j(b), & j = 0, 1, \dots, m, \\ f_j(Pb_F + \bar{a}_F, b_I), & j > m \end{cases} \quad (5)$$

となる。ここで $R_F(b) = (R_0(b), R_1(b), \dots, R_m(b))$ は

$$R_F(b) = P^{-1} \left(g_F(\bar{a}_F) + \frac{1}{2} D^2 g_F(\bar{a}_F) (Pb_F)^2 + \frac{1}{3!} D^3 g_F(\bar{a}_F) (Pb_F)^3 + r(b_F, b_I) \right)$$

で与えられ, λ_j は固有ベクトル p_j に対応する固有値を表すものとする。ここでは $Dg_F(\bar{a}_F)$ は対角化可能であると仮定し, 議論を簡単にするために $\lambda_j (\neq 0) \in \mathbb{R}$ とする。

次の集合は定常解の検証において重要な役割を果たす。

定義 3 力学系 (5) が与えられたとき, 原点を含むコンパクト集合 $W = \prod_{j=0}^{\infty} [b_j^-, b_j^+]$ が次の 2 つの条件を満たすとき候補者集合と呼ぶ。

1. $W_F = \prod_{j=0}^m [b_j^-, b_j^+]$ は $b_I \in W_I = \prod_{j>m} [b_j^-, b_j^+]$ ごとに定まるベクトル場 $h_F(b_F, b_I)$ が生成する流れ $\varphi^{(b_I)}$ に対して常に孤立化ブロックとなる
2. 境界 $W_F \times \partial W_I$ はベクトル場 $h(b)$ に対して入口となる

このとき定理 2 の応用として次が成立する。

定理 4 ([9]) 力学系 (5) に対して候補者集合 W が与えられているとする。このとき有限次元部分 W_F の Conley 指数がある $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ に対して

$$CH_j \left(\text{Inv} \left(W_F, \varphi^{(b_I)} \right) \right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = k, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (6)$$

となるならば、 TW 内に (3) の平衡点が存在する。

したがって定常解の検証の為に、定理 4 の条件を満たすような候補者集合を計算機上で構成すれば良いわけである。しかし問題が無限次元となっていることにより、このままでは計算機で扱えない次のような困難が生じる。

1. 有限和としてベクトル場が評価できない
2. 無限個のベクトル場の出入りを調べる必要がある

つまり 1 はベクトル場 $f_i(a)$ が可算無限個の変数 $\{a_i\}$ で表されるために、一般にはそれらの無限和として構成される事からくる問題点である。これより検証の際には、無限和で表されてあるベクトル場を何らかの方法で評価する必要がある。また問題点 2 については、無限次元部分の境界がすべて入口であることを計算機を用いて直接確認することが不可能であることから生じる。そこで無限次元の問題を有限次元の問題へ縮約する必要性がでてくる。

これらに対する 1 つの解決法としては、候補者集合に何らかの制限を与え、有限個のデータで構成することにより無限次元の問題を有限次元の問題へ縮約する方法が考えられる (数値検証法としてよく知られている中尾の方法 [7] においても同様のアイデアが用いられている)。具体的には次の形で与えられる候補者集合を用いる。

$$W = W_F \times W_I, \quad W_F := \prod_{j=0}^m [b_j^-, b_j^+], \quad W_I := \prod_{j>m} \left[-\frac{c}{j^s}, \frac{c}{j^s} \right]. \quad (7)$$

ここで $c, s > 0$ であり、 W_F には本質的なダイナミクスが含まれるべきなので、少なくとも $\zeta_j < 0, \forall j > m$ となるように m をとる。注目すべき点は $2m + 4$ 個の情報 (b_j^-, b_j^+, c, s) から候補者集合が構成されている点である。このように候補者集合を与えることにより上記 1, 2 の問題点が以下のように解決される。

まず無限和で表されているエラー項 $r(b_F, b_I)$ の評価から考える。SH 方程式の非線形項 $f_j^{(3)}(a)$ では

$$\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=j \\ \max\{m_i\} > m}} a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} \quad (8)$$

がエラー項に対応する。この形の無限和は候補者集合の巾減衰性から、解析的な評価と区間演算を併用することで評価が可能である ([2][5] 参照)。よって変数 a においてコンパクト集合 $\bar{W} = \bar{W}_F \times \bar{W}_I$ を $\bar{W}_j = [\min(TW)_j, \max(TW)_j]$ と用意し、 $\bar{W}$ 上でエラー項 (8) を評価することにより、 $r_j(b_F, b_I)|_{\forall b \in \bar{W}} \in [r_j^-, r_j^+]$ となる存在区間が厳密に評価される。これにより $R_F(b)$ が計算機を用いて評価可能となる。

次に無限次元部分のベクトル場の評価であるが、同様に [2][5] により次の評価が得られる事が知られている。

$$f_j^{(3)}(a)|_{\forall a \in \bar{W}} \in \left[-\frac{\bar{\eta}}{j^s}, \frac{\bar{\eta}}{j^s} \right].$$

よって簡単な計算により

$$\zeta_j c + \bar{\eta} < 0, \quad \forall j > m \quad (9)$$

が無限次元部分の境界がベクトル場に対して入口となる条件になる。ここで m を ζ_j が $j > m$ で単調減少になるように設定しておけば、 $j = m + 1$ で (9) を満たせば $j > m$ なる全ての j で (9) を満たすことが示される。

以上により計算機を用いて Conley 指数が厳密に計算でき、定常解の検証が行なわれる。

3 接続軌道の検証

本節では、位相的方法により検証された定常解間の接続軌道の存在を調べる方法について解説していく。まず最初にモース分解の定義を与えることから始めよう。流れ $\varphi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ に対して、 $\omega(x)$ で x の ω 極限集合、 $\alpha(x)$ で x の α 極限集合を表すものとする。孤立不変集合が与えられたとき、次で与えられる分解を考える。

定義 5 孤立不変集合 S のモース分解とは互いに交わらない S の部分不変集合 $M(p)$ (モース集合と呼ぶ) の有限個の集まり

$$\mathcal{M}(S, <) := \{M(p) \mid p \in \mathcal{P}(<)\}$$

であり次を満たすものとする：もし $x \in S \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} M(p)$ ならば、 $q > p$ なる $p, q \in \mathcal{P}(<)$ が存在し、 $x \in C(M(q), M(p); S) := \{x \in S \mid \alpha(x) \subset M(q), \omega(x) \subset M(p)\}$ となる。ここで $C(M(q), M(p); S)$ は $M(q)$ から $M(p)$ への接続軌道の集まりである。また $\mathcal{P}(<)$ は半順序 $<$ が備わった有限集合とし、 $<$ を許容半順序と呼ぶ。

モース分解について2点コメントをしておく。まず、各 $M(p)$ が孤立不変集合になることから ([3]) その Conley 指数が定義される点である。また S 上の流れは有限集合 $\mathcal{P}$ に、次で与えられる自然な半順序を誘導する：

$$\begin{aligned} p < q &\iff \exists \{\pi_0(=p), \pi_1, \dots, \pi_n(=q)\} \subset \mathcal{P} \\ &\text{s.t. } C(M(\pi_i), M(\pi_{i-1}); S) \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

我々はこの半順序を $<_F$ と表すことにする。簡単な計算により任意の許容半順序 $<$ は $<_F$ の拡張、すなわち $p <_F q \Rightarrow p < q$ が示される。

次にモース分解 $\mathcal{M}(S, <)$ に対してコネクション行列を定義する。

定義 6 コネクション行列 Δ_n は次を満たす線型写像

$$\Delta_n : \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_n(M(p)) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_{n-1}(M(p)),$$

として定義される：

1. Δ_n は上三角行列, すなわち $\Delta_n(p, q) \neq 0 \Rightarrow q > p$
2. $\Delta_n \Delta_{n+1} = 0$
3. $\text{Ker} \Delta_n / \text{Im} \Delta_{n+1} \cong CH_n(S)$

モース分解 $M(S, <)$ が与えられたとき, そのコネクション行列を $C(<)$ と表す. 許容半順序 $<$ は流れが定める順序 $<_F$ の拡張であることから, $C(<_F) \subset C(<)$ を示すことができる. 次の 2 つの定理はコネクション行列理論において重要な役割を果たす [3].

定理 7 コネクション行列は存在する, すなわち $C(<) \neq \emptyset$

定理 8 $\Delta_n \in C(<_F)$ としたとき, もし $\Delta_n(p, q) \neq 0$ ならば $C(M(q), M(p); S) \neq \emptyset$.

各モース集合の Conley 指数の情報と定義 6 の 3 つの代数的条件より, コネクション行列の候補を構成することが可能となる. もしその候補を一意に求めることができたなら定理 7 より, その行列が真のコネクション行列であることが導かれる. また定理 8 より, ここで導かれたコネクション行列をもちいて, モース集合間の接続軌道の存在を調べることも可能となる.

以下に SH 方程式において, 定常解間の接続軌道の存在を検証する方法を簡単に解説していく. 証明やアルゴリズムの詳細は [2] にまとめられているので参照されたい. これからの議論では $(k_0, \nu) = (0.62, 0.38)$ に固定して考える. 図 2 は $k_0 = 0.62$ としてガレルキン近似を施して得られた定常解の近似分岐図である. 対称性 $u(x, t) \rightarrow -u(x, t)$ を考慮すると, 図

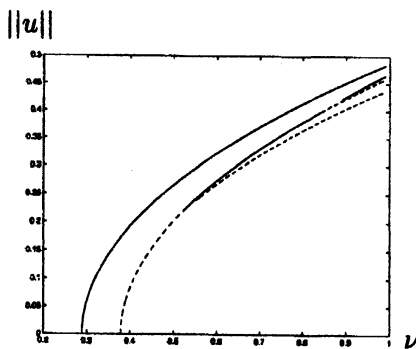


図 2: $k_0 = 0.62$ における分岐図

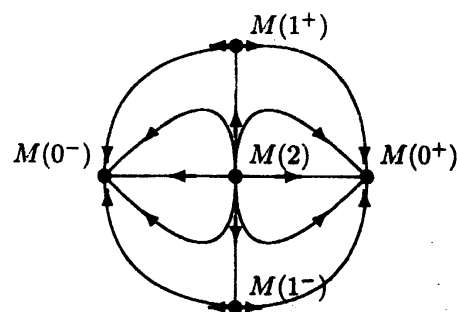


図 3: 各定常解間の接続軌道

2 は $\nu = 0.38$ において 5 つの定常解 $M(p)$, $p \in \mathcal{P} := \{0^\pm, 1^\pm, 2\}$ の存在を示唆している. ここで $p^\pm$ は対称性 $M(p^+) = -M(p^-)$ に対応している. 前節で紹介した検証法をもちいることで, 次の補題が検証される.

補題 9 $(k_0, \nu) = (0.62, 0.38)$ において図 2 に示されている近似定常解の近傍に真の解 $M(p)$, $p \in \mathcal{P}$, が一意に存在する. 更に各定常解の Conley 指数は次で与えられる.

$$CH_j(M(2)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = 2, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

$$CH_j(M(p^\pm)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = p, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases} \quad p = 0, 1.$$

ここで前節の議論をそのまま用いるだけでは, 解の一意性については主張することができない点を注意しておく. しかしバナッハの不動点定理を用いた数値検証法 [8] を位相的方法へ適用することにより, 解の一意性を示すことが可能となる [2].

次に大域的 Conley 指数の計算及び, モース分解の構成の際に必要な次の補題を示す.

補題 10 表 1 に表されている集合 J は正不変な孤立化ブロックであり, その Conley 指数は

$$CH_j(J) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & j = 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (10)$$

となる. 更にその内部に含まれている定常解は補題 9 に示されている定常解 $M(p)$, $p \in \mathcal{P}$, のみである.

表 1: 正不変集合 J

k	a_k^-	a_k^+
0	$-4.3380010295 \times 10^{-4}$	$4.3380010295 \times 10^{-4}$
1	$-3.4374821943 \times 10^{-3}$	$3.4374821943 \times 10^{-3}$
2	$-1.4440654070 \times 10^{-1}$	$1.4440654070 \times 10^{-1}$
3	$-4.5735140818 \times 10^{-5}$	$4.5735140819 \times 10^{-5}$
4	-1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}
5	-1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}
6	-1.0×10^{-4}	1.0×10^{-4}
$k \geq 7$	$-1.0/k^5$	$1.0/k^5$

検証の概略を説明する. まず正不変な孤立化ブロックであるという点については, 前節の定常解検証の際にも行なったように, 区間演算を用いた非線形項の評価から境界でのベクトル場の出入りを調べることで検証することができる. またその境界において出口が空集合であることから, その Conley 指数は (10) で与えられる. 次に, その内部の定常解の分布についてであるが, 一意存在が示されている領域を $\bar{W}(p)$, $p \in \mathcal{P}$, とした場合, $J \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \bar{W}(p)$ において定常解の非存在を検証できれば十分である. この定常解の非存在検証については, 平均値の定理を拡張した検証法 [2] を適用することにより示すことができる.

リアプノフ関数

$$F(u) = \int_0^L \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{\nu}{2}u^2 + \frac{1}{2} \left((1 + \partial_x^2) u \right)^2 \right] dx$$

の存在, 補題 9, 10 及び [4] より $\mathcal{M}(S) = \{M(p) \mid p \in \mathcal{P}\}$ が J 内のモース分解を与えることがわかる. このモース分解に対してコネクション行列を計算することにより, 次の定理の主張が検証される.

定理 11 パラメーター値 $(k_0, \nu) = (0.62, 0.38)$ において, 各定常解間には図 3 で表されている接続軌道が存在する.

証明の概略は次のようになる. まず $CH_i(M(p)) = 0$, $p \in \mathcal{P}$, $i > 2$ より, 次の系列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_2(M(p)) \xrightarrow{\Delta_2} \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_1(M(p)) \xrightarrow{\Delta_1} \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH_0(M(p)) \longrightarrow 0$$

を考える. ここでコネクション行列 Δ_2 , Δ_1 は, 補題 9 の各定常解の Conley 指数, 対称性 $F(M(p^-)) = F(M(p^+))$, 及びコネクション行列の代数的条件 (定義 6 の条件 1-3) より

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

として一意に定まる. ここで各コネクション行列 Δ_i は

$$CH_i(M(0^-)) \oplus CH_i(M(0^+)) \oplus CH_i(M(1^-)) \oplus CH_i(M(1^+)) \oplus CH_i(M(2))$$

上に作用するものとする. よって定理 8 より, 図 3 に示されている接続軌道の存在が主張される.

参考文献

- [1] C. Conley, Isolated Invariant Sets and the Morse Index, CBMS Lecture Notes 38, A.M.S. Providence, R.I. 1978.
- [2] S. Day, Y. Hiraoka, K. Mischaikow, and T. Ogawa, Rigorous Numerics for Global Dynamics: a study of the Swift-Hohenberg equation, *SIAM J. Appl. Dynm. Sys.* 4 (2005), 1-31.
- [3] R. Franzosa, The connection matrix theory for Morse decompositions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 311 (1989), 561-592.

- [4] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, A.M.S. Providence, R.I. **25**, 1988.
- [5] 平岡裕章, 小川知之, K. Mischaikow, Swift-Hohenberg 方程式の定常解大域分岐の Conley 指数を用いた検証, *Trans. Jpn. Soc. Ind. Appl. Math.* **13**, No.2 (2003), 191-211.
- [6] C. McCord, Mappings and homological properties in the Conley index theory, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **8*** (1988), 175-198.
- [7] 中尾充宏, 山本野人, 精度保証付き数値計算, 日本評論社, 1998.
- [8] N. Yamamoto, A numerical verification method for solutions of boundary value problems with local uniqueness by Banach's fixed-point theorem, *SIAM J. Numer. Anal.* **35** (1998), 2004-2013.
- [9] P. Zgliczyński and K. Mischaikow, Rigorous Numerics for Partial Differential Equations: The Kuramoto-Sivashinsky Equation, *Found. Comput. Math.* **1** (2001), 255-288.