

Hilbert の第 12 問題の最近の進展について

Recent progress on Hilbert's 12th problem

佐野 昂迪 (大阪市立大学)
Takamichi Sano (Osaka City University)

概要

最近 Dasgupta と Kakde により, 総実体の最大アーベル拡大の明示的な構成が得られた. 本記事では彼らの結果を概説する.

1 序

Hilbert の第 12 問題とは, いわゆる類体の構成問題であり, 有理数体と虚 2 次体の場合にはそれぞれ Kronecker–Weber の定理, 虚数乗法論としてよく知られている. それ以外の代数体の場合は, これまで大きな進展はほぼ全くなかったようだが, 最近 Dasgupta と Kakde は [DK20] において **Brumer–Stark 予想** (の 2 部分以外) を証明し, その応用として [DK21] において総実体の最大アーベル拡大の明示的な構成を与えた. 本記事では [DK21] の内容の概説をする.

Brumer–Stark 予想は **Stark 予想** の特別な場合^{*1}だが, Stark 予想と Hilbert の第 12 問題との関係は Stark によって [Sta76] において考察されていた. その大雑把な内容は, 「Stark 予想が正しければ, **Stark 単数** を添加することでアーベル拡大が構成できる」ということである. 今回の Dasgupta–Kakde による総実体の最大アーベル拡大の構成は, 基本的にこの Stark のアイデアを用いるものである. ただし, Brumer–Stark 予想は Stark 自身によって定式化された予想ではなく, Stark のアイデアを用いて Tate により [Tat84] において定式化された予想であり, Stark 自身が考えていたものとは少し違うということに注意しておく.

本記事では, §2 で Brumer–Stark 予想によりその存在が予想される **Brumer–Stark 単数** に関する基本事項をまとめ, §3 でそれを用いて総実体の最大アーベル拡大の明示的な構成を与える. 構成を早く知りたい読者は, §3 だけ読んでよい (Brumer–Stark 単数の存在を認めれば, 構成はかなり初等的である).

なお, Hilbert の第 12 問題の歴史について本記事では全く触れないが³, 興味のある読者は例えば [Sch98] を読みたい. Hilbert 自身による予想の statement や, 誤りなどについて詳しく論じられている.

2 Brumer–Stark 単数

F を総実体とする. H/F を有限次アーベル拡大とし, そのガロア群を G とする. F の無限素点全体の集合を $S_\infty(F)$ で表し, H で分岐する F の素点全体の集合を $S_{\text{ram}}(H/F)$ で表す. F の素点の有限集合 S を

$$S := S_\infty(F) \cup S_{\text{ram}}(H/F)$$

とおく. $\#S \geq 2$ と仮定しておく^{*2}. さらに, F の素点の有限集合 T で, $S \cap T = \emptyset$ かつ

$$H_T^\times := \{a \in H^\times \mid \text{ord}_w(a-1) > 0, \forall w \in T_H\} \tag{1}$$

^{*1} より正確には, Stark 予想の精密化である **Rubin–Stark 予想** の特別な場合である. 注意 2.6 参照.

^{*2} $\#S = 1$ となるのは $F = H = \mathbb{Q}$ のときのみである.

が torsion-free となるものをとる. ここで T_H は T の素点の上にある H の素点全体の集合を表し, $\text{ord}_w : H \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ は w における正規加法付値を表す. 例えば, 剰余標数が異なる 2 つの素点を T が含んでいれば, この torsion-free という条件は満たされる. 以下, この T は固定されたものとし, T に依存するものを記号で表すときに T をしばしばつけないこととする.

F の素点 $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ で H で完全分解するものをとる. H の $(\mathfrak{p}, T)$ 単数群を

$$U_{\mathfrak{p}} = U_{H,\mathfrak{p}} := \ker \left(H_T^{\times} \xrightarrow{\oplus \text{ord}_w} \bigoplus_{w \nmid \mathfrak{p}} \mathbb{Z} \right)$$

とおく. ここで w は $\mathfrak{p}$ を割らない H の有限素点全体を走る. $\mathfrak{p}$ の上にある H の素点 $\mathfrak{P}$ を固定し, 写像

$$\text{Ord}_{\mathfrak{p}} = \text{Ord}_{H,\mathfrak{p}} : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{Q}[G]; a \mapsto \sum_{\sigma \in G} \text{ord}_{\mathfrak{P}}(\sigma a) \sigma^{-1} \quad (2)$$

を考える (これは $\mathbb{Q}[G]$ 加群の準同型写像である).

$\theta_H = \theta_{H/F,S,T} \in \mathbb{Z}[G]$ を Stickelberger 元とする. この元は次で特徴づけられる^{*3}:

$$\forall \chi \in \widehat{G}, \chi(\theta_H) = L_{S,T}(\chi^{-1}, 0).$$

ここで $\widehat{G} := \text{Hom}(G, \mathbb{C}^{\times})$ で, $\chi \in \widehat{G}$ に対して $L_{S,T}(\chi, s)$ は (S, T) で修正した L 関数

$$L_{S,T}(\chi, s) := \prod_{v \in T} (1 - \chi(\text{Fr}_v) N v^{1-s}) \prod_{v \notin S} (1 - \chi(\text{Fr}_v) N v^{-s})^{-1}$$

である ($\text{Fr}_v \in G$ は v の Frobenius 自己同型, Nv は v の剰余体の位数を表す).

L 関数の $s = 0$ での位数に関して, 次が知られている ([Tat84, Chap. I, Proposition 3.4] 参照):

$$\text{ord}_{s=0} L_{S,T}(\chi, s) = \begin{cases} \#\{v \in S \mid v \text{ は } H^{\ker \chi} \text{ で完全分解する}\} & \chi \neq 1 \text{ のとき,} \\ \#S - 1 & \chi = 1 \text{ のとき.} \end{cases} \quad (3)$$

特に, H が実素点を持てば右辺は常に 1 以上となることから^{*4}, H が総虚でなければ $\theta_H = 0$ であることがわかる.

以下, H は総虚体とする. このとき, 「マイナスべき等元」 $e^- \in \mathbb{Q}[G]$ を, 任意の $\chi \in \widehat{G}$ に対して

$$\chi(e^-) = 1 \Leftrightarrow H^{\ker \chi} \text{ は総虚体}$$

で特徴づけられるものとする. 単数定理を用いると, 写像 (2) は同型

$$\text{Ord}_{\mathfrak{p}} : e^-(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} e^-\mathbb{Q}[G]$$

を誘導することがわかる. (3) より,

$$\theta_H \in e^-\mathbb{Q}[G]$$

であることに注意する.

以上の準備の下で, Brumer–Stark 予想は次のように述べられる.

予想 2.1 (Brumer–Stark 予想). 次を満たす $u_{\mathfrak{p}} = u_{H,\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$ がただ一つ存在する:

$$(i) \quad e^-u_{\mathfrak{p}} = u_{\mathfrak{p}} \text{ in } \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}},$$

^{*3} θ_H が $\mathbb{Z}[G]$ に入ることは, Deligne–Ribet, Cassou-Noguès によるよく知られている結果である.

^{*4} $\#S \geq 2$ としていたことに注意する.

(ii) $\text{Ord}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = \theta_H$.

上の $u_{\mathfrak{p}}$ を **Brumer–Stark 単数** と呼ぶ.

注意 2.2. 予想 2.1 を次のように述べてもよい:

$$u_{\mathfrak{p}} = u_{H,\mathfrak{p}} := \text{Ord}_{\mathfrak{p}}^{-1}(\theta_H) \in e^{-}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}})$$

と定義したとき,

$$u_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$$

が成り立つ.

このように述べると, 予想を仮定しなくても Brumer–Stark 単数は $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$ の元として存在しているとみなせる, という利点がある.

注意 2.3. $\mathfrak{p}$ の上の H の素点 $\mathfrak{P}$ を固定していたが, $u_{\mathfrak{p}}$ は実際には $\mathfrak{P}$ のとり方によるので, $u_{\mathfrak{P}}$ と表すべきである. しかし, $\mathfrak{P}'$ を別の $\mathfrak{p}$ の上の素点とすると, $\mathfrak{P}' = \sigma(\mathfrak{P})$ ($\sigma \in G$) と書くとき

$$u_{\mathfrak{P}'} = \sigma(u_{\mathfrak{P}})$$

が成り立つことがわかる. よって, $\mathfrak{P}$ をとりかえても本質的に違いがないと言えるので, $\mathfrak{P}$ は固定されたものとして $u_{\mathfrak{P}}$ と表すべきものを $u_{\mathfrak{p}}$ と表すことにするわけである. また, 予想 2.1 の正当性は $\mathfrak{P}$ のとり方によらないこともわかる.

注意 2.4. H が総虚でないときは便宜上

$$u_{\mathfrak{p}} := 0$$

とおく. (乗法的な記号を使えば $u_{\mathfrak{p}} := 1$ ということである.)

注意 2.5. $F = \mathbb{Q}$ のとき, 予想 2.1 は正しいことが「Stickelberger の定理」として古典的に知られている. このとき, Brumer–Stark 単数はガウス和として具体的に記述できる ([Tat84, Chap. IV, Proposition 6.7], [Pop11, Corollary 4.3.11] 参照).

注意 2.6. 予想 2.1 は $(H/F, S \cup \{\mathfrak{p}\}, T, \{\mathfrak{p}\})$ に対する Rubin–Stark 予想 ([Rub96, Conjecture B'] または [BKS16, Conjecture 5.1] 参照) と同値であり, Brumer–Stark 単数 $u_{\mathfrak{p}}$ はこの場合の Rubin–Stark 元と一致する.

本節では最後に, Brumer–Stark 単数の基本性質をいくつか述べる. 以下, 注意 2.2 のように, Brumer–Stark 単数 $u_{\mathfrak{p}}$ を (予想を仮定せずに) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$ の元と考える.

命題 2.7 (ノルム関係式). H/F の任意の中間体 H' に対して^{*5}, ノルム写像

$$N_{H/H'} : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H',\mathfrak{p}}$$

による $u_{H,\mathfrak{p}}$ の像は

$$\left(\prod_{\mathfrak{q}} (1 - \text{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1}) \right) u_{H',\mathfrak{p}}$$

である. ここで $\mathfrak{q}$ は H' で不分岐な S に含まれる有限素点を走る.

^{*5} H' は総虚でなくてもよい. H' が総虚でないとき, 主張は $N_{H/H'}(u_{H,\mathfrak{p}}) = 0$ ということである.

特に $S_{\text{ram}}(H/F) = S_{\text{ram}}(H'/F)$ のとき,

$$N_{H/H'}(u_{H,\mathfrak{p}}) = u_{H',\mathfrak{p}}$$

が成り立つ.

証明. $G' := \text{Gal}(H'/F)$ とおく. 自然な全射 $\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G']$ による $\theta_H = \theta_{H/F,S,T}$ の像は

$$\left(\prod_{\mathfrak{q} \in S \setminus S'} (1 - \text{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1}) \right) \theta_{H'/F,S',T}$$

であることが Stickelberger 元の特徴づけよりわかる. ここで $S' := S_{\infty}(F) \cup S_{\text{ram}}(H'/F)$ である. これに注意すると, 命題の主張は Brumer-Stark 単数の定義と可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\text{Ord}_{H,\mathfrak{p}}} & \mathbb{Q}[G] \\ N_{H/H'} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H',\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\text{Ord}_{H',\mathfrak{p}}} & \mathbb{Q}[G'] \end{array}$$

から従う. □

次の命題は専門家にとって well-known と思われるが, はっきり書いてある文献はあまりないようである*6.

命題 2.8. H' を H に含まれる最大 CM 部分体とする*7. このとき,

$$u_{H,\mathfrak{p}} = \frac{1}{[H:H']} \cdot \left(\prod_{\mathfrak{q}} (1 - \text{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1}) \right) u_{H',\mathfrak{p}} \text{ in } \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

が成り立つ. ここで $\mathfrak{q}$ は H' で不分岐な S に含まれる有限素点を走る.

特に,

$$u_{H',\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H',\mathfrak{p}} \Rightarrow u_{H,\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

が成り立つ. すなわち, Brumer-Stark 予想の 2 部分以外は H が CM 体の場合に帰着される.

証明. $G' := \text{Gal}(H'/F)$ とし, $c \in G'$ を (ただ一つの) 複素共役とする. 写像

$$\nu: \mathbb{Q}[G'] \rightarrow \mathbb{Q}[G]; x \mapsto \frac{1}{[H:H']} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(H/H')} \sigma \tilde{x}$$

を考える. ここで $\tilde{x} \in \mathbb{Q}[G]$ は $x \in \mathbb{Q}[G']$ の持ち上げを表す. (写像 ν は $\tilde{x}$ のとり方によらない.) すると,

$$e^- = \nu \left(\frac{1-c}{2} \right)$$

であることがわかる (特に $e^- \in \mathbb{Z}[1/2][G]$ がわかる). また,

$$\theta_H = \theta_{H/F,S,T} = \nu \left(\left(\prod_{\mathfrak{q} \in S \setminus S'} (1 - \text{Fr}_{\mathfrak{q}}^{-1}) \right) \theta_{H'/F,S',T} \right)$$

*6 [DK21] にも書いていないが, 暗黙に使われているように思う.

*7 CM 体とは, 総虚体で, ある総実体の 2 次拡大となっている体のことである. 最大 CM 部分体 $H' \subset H$ は実際に次のように定義できる: $v \in S_{\infty}(F)$ に対する複素共役を $c_v \in G$ と表すとき, H' は G の部分群

$$\langle c_v c_{v'} \mid v, v' \in S_{\infty}(F) \rangle$$

に対応する H/F の中間体である. 特に, この群の exponent は 2 なので, $[H:H']$ は 2 べきであることに注意する.

もわかる. ここで $S' := S_\infty(F) \cup S_{\text{ram}}(H'/F)$ である. 以上のことに注意すると, 命題の主張は可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\text{Ord}_{H,\mathfrak{p}}} & \mathbb{Q}[G] \\ \uparrow \scriptstyle \frac{1}{[H:H']} \times & & \uparrow \scriptstyle \nu \\ \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H',\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\text{Ord}_{H',\mathfrak{p}}} & \mathbb{Q}[G'] \end{array}$$

から従う. □

次の命題は, イデアル類群の annihilation との関係である. H の T 射類群 (T -ray class group) を

$$\text{Cl}_H^T := \text{coker} \left(H_T^\times \xrightarrow{\oplus \text{ord}_w} \bigoplus_{w \notin S_\infty(H) \cup T_H} \mathbb{Z} \right)$$

と定義する. ($H_T^\times$ は (1) で定義したことを思い出す.) すなわち, Cl_H^T は $\prod_{w \in T_H} w$ を modulus とする H の射類群である.

命題 2.9.

(i) 予想 2.1 (Brumer–Stark 予想) が H で完全分解する任意の $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ に対して成り立つならば,

$$\theta_H \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\text{Cl}_H^T)$$

が成り立つ.

(ii) 2 を可逆にすると, (i) の逆も成り立つ. すなわち,

$$\theta_H \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\text{Cl}_H^T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$$

が成り立つならば,

$$u_{H,\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

が H で完全分解する任意の $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ に対して成り立つ.

証明. (i) Chebotarev 密度定理より, Cl_H^T の任意の元は $\mathfrak{P}$ で代表される. ここで $\mathfrak{P}$ は H で完全分解する F の素点 $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ の上にある H の素点である. この $\mathfrak{p}$ に対する Brumer–Stark 予想を仮定すると, Brumer–Stark 単数の性質

$$\text{Ord}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = \theta_H$$

より, $\theta_H \cdot \mathfrak{P}$ は単項イデアル ($u_{\mathfrak{p}}$) であることがわかる. $u_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}} \subset H_T^\times$ より, これは $\theta_H \cdot \mathfrak{P}$ が Cl_H^T の中で 0 であることを意味する. 以上より $\theta_H \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\text{Cl}_H^T)$ が成り立つ.

(ii) $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ を H で完全分解する F の素点とし, $\mathfrak{P}$ を $\mathfrak{p}$ の上の H の素点とする. $\theta_H \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\text{Cl}_H^T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$ を仮定すると,

$$2^m \theta_H \cdot \mathfrak{P} = 0 \text{ in } \text{Cl}_H^T$$

を満たす自然数 m が存在する. これより,

$$2^m \theta_H \cdot \mathfrak{P} = (\varepsilon)$$

となる $\varepsilon \in U_{\mathfrak{p}}$ が存在する. これを言いかえると

$$\text{Ord}_{\mathfrak{p}}(\varepsilon) = 2^m \theta_H$$

であり, Brumer–Stark 単数の定義より,

$$u_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2^m} \cdot e^- \varepsilon \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$$

となる. 命題 2.8 の証明より $e^- \in \mathbb{Z}[1/2][G]$ なので, $u_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathfrak{p}}$ がわかる. $\square$

注意 2.10. [DK20] では Brumer–Stark 予想は

$$\theta_H \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\text{Cl}_H^T)$$

の形で定式化されているが, 命題 2.9 より, 2 部分だけは本記事で定式化した Brumer–Stark 予想 (予想 2.1) の方が強い.

Dasgupta–Kakde は [DK20] において, H が CM 体の場合に

$$\theta_H \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\text{Cl}_H^T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$$

を証明した. よって, 命題 2.8, 2.9(ii) をあわせると, 次がわかる.

定理 2.11 (Dasgupta–Kakde). 任意の有限次アーベル拡大 H/F に対して^{*8}

$$u_{H,\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}[1/2] \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

が成り立つ.

3 総実体の最大アーベル拡大の構成

F を総実体とし, F の最大アーベル拡大を F^{ab} と表す. F^{ab} は大雑把に

$$F^{\text{ab}} = F(\{\text{簡単な元たち}\}, \{\text{Brumer–Stark 単数たち}\})$$

という形で構成される.

まず, 「簡単な元たち」が何かについて述べよう. $n := [F : \mathbb{Q}]$ とおき, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ を F の実素点全体 (すなわち, 埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{R}$ 全体) とする. 符号写像

$$\mathfrak{S} : F^\times \rightarrow \{\pm 1\}^n; a \mapsto (\text{sign}(\sigma_1(a)), \dots, \text{sign}(\sigma_n(a)))$$

を考える. これは全射であることがわかり, よって元 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ を

$$\langle \mathfrak{S}(\alpha_1), \dots, \mathfrak{S}(\alpha_{n-1}), (-1, \dots, -1) \rangle = \{\pm 1\}^n$$

となるようにとることができる. 「簡単な元たち」は $\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}}$ のことである.

次に, Brumer–Stark 単数について前節の内容を復習する. F の素点の有限集合 T で, ある条件を満たすものを固定すると, 任意の有限次アーベル拡大 H/F と H で完全分解する F の素イデアル $\mathfrak{p} \notin T$ に対して, Brumer–Stark 単数 $u_{H,\mathfrak{p}}$ が定義できる. Brumer–Stark 予想が正しければ, $u_{H,\mathfrak{p}}$ は $H^\times$ の元になる. Dasgupta–Kakde によって Brumer–Stark 予想の 2 部分以外が解かれたので, $u_{H,\mathfrak{p}}^m \in H^\times$ となる 2 べき m が存在する (定理 2.11 参照).

さて, 特に $\mathcal{O}_F$ の 0 でない各イデアル $\mathfrak{n}$ に対して, $\mathfrak{n}$ を modulus とする F の狭義射類体 (narrow ray class field) $F(\mathfrak{n})$ に対する Brumer–Stark 単数を考える. すなわち, $F(\mathfrak{n})$ で完全分解する F の素イデアル $\mathfrak{p}(\mathfrak{n}) \notin T$

^{*8} H が総虚でないときは $u_{H,\mathfrak{p}} := 0$ とおいたので, 主張は自明である.

に対して^{*9}、元 $u_{F(n),p(n)}$ を考える。このままだと $F(n)$ の元になるかどうかかわからないが、2 べき $m(n)$ をうまく選べば

$$u_{F(n),p(n)}^{m(n)} \in F(n)^\times$$

となるようにできる (Brumer–Stark 予想が正しければ $m(n) = 1$ ととれる)。

以上の準備の下で、 F の最大アーベル拡大 F^{ab} は次のように構成される。

定理 3.1 (Dasgupta–Kakde, [DK21, Theorem 1.9]).

$$F^{\text{ab}} = F(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}}, \{u_{F(n),p(n)}^{m(n)} \mid n \subset \mathcal{O}_F : 0 \text{ でないイデアル}\})$$

注意 3.2. Hilbert の第 12 問題を (ある意味で) 「解決した」と主張するためには、アーベル拡大が「明示的に」構成できなければならない。よって、Brumer–Stark 単数 $u_{F(n),p(n)}$ がどのくらい明示的にわかるのか、ということが重要な点である。実際、論文 [DK21] の大半は「Brumer–Stark 単数が明示的である」ということを証明するのに費やされている。これが具体的にどういう意味なのか説明しよう。

$u_{H,p}$ を (一般の有限次アーベル拡大 H/F と H で完全分解する素イデアル $p \notin T$ に対する) Brumer–Stark 単数とする。まず、Dasgupta は [Das08] において、

$$u_{H,p} = \text{“}p \text{ 進積分” in } F_p^\times \tag{4}$$

という公式を予想として定式化した。この右辺は $F_p^\times$ の元として定義できるものであり、左辺の $u_{H,p}$ は (Brumer–Stark 予想を仮定して) 包含 $H \subset H_p = F_p$ により $F_p^\times$ の元とみなす。この予想が $F_p^\times / (F_p^\times)_{\text{tors}}$ の中で正しいことを弱い仮定^{*10}の下で示したことが [DK21] の実質的な主結果である。公式にある「 p 進積分」は具体的に計算可能であり、明示的なものであるので、その意味で Brumer–Stark 単数は「明示的」と言えるわけである。

少し不満点を述べると、上の予想 (4) は “modulo torsion” で正しいことが示されただけで、完全に解かれたわけではない。また、Brumer–Stark 予想も 2 部分は解かれておらず^{*11}、そのために F^{ab} の記述に謎の 2 べき $m(n)$ が現れて、きれいではない。このようにまだ微妙な点があるにも関わらず、Hilbert の第 12 問題を解決したかのように主張するのは、多少答えを急いだ感が否めない。また、上の公式を用いる Brumer–Stark 単数の計算は p 進解析的であり、Hilbert が期待していたような複素解析的なものではない。この点に関しては [DK21, p. 8] において「Hilbert がこの解答を受け入れるかどうかはわからない」という意味のコメントがある。

注意 3.3. 定理 3.1 の証明 (以下で述べる) を見るとわかるが、 F^{ab} を構成するのに、各 n に対して狭義射類体 $F(n)$ の構成をしているわけではない。この点も (Kronecker–Weber の定理や虚数乗法論に比べると) 不満な点である。ただし、狭義 Hilbert 類体 $F(1)$ については、 $F(1)$ が CM 体ならば

$$F(1) = F(u_{F(1),p(1)}^{m(1)})$$

であることがわかる。(証明は、下の補題 3.4 の証明を真似すればできる。) これを利用して、公式 (4) を用いた実 2 次体の狭義 Hilbert 類体の計算例がたくさんある ([DK21, §2.3] 参照)。

以下、定理 3.1 の証明を与える。記号は前節のものを用いる。

次の補題が鍵である。

^{*9} 類体論より、この条件は n を modulus とする F の狭義射類群 (narrow ray class group) の中で $p(n) = 0$ であることと同値である。すなわち、 $p(n)$ は $\text{mod } n$ で 1 となる総正な元で生成される素イデアルをとればよい。

^{*10} p の下の素数 p が奇数で、 p が F で不分岐ならば仮定は満たされる。 p は奇素数なので、Brumer–Stark 予想 (の 2 部分) を仮定する必要はない。

^{*11} 2022 年 3 月現在。

補題 3.4 (Stark [Sta76], Tate [Tat84, Chap. IV, Remarque 2.3], [DK21, Lemma 2.3]). H/F を有限次巡回拡大とし, H は CM 体とする. $S := S_\infty(F) \cup S_{\text{ram}}(H/F)$ とおく. $\mathfrak{p} \notin S \cup T$ を H で完全分解する F の素点とする.

$$u_{\mathfrak{p}} = u_{H,\mathfrak{p}} \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{H,\mathfrak{p}}$$

を Brumer–Stark 単数とし (注意 2.2 参照), $u_{\mathfrak{p}}^m \in U_{H,\mathfrak{p}} \subset H^\times$ となる 0 でない整数 m をとる. (定理 2.11 より, m は 2 べきにとれる.) このとき,

$$H = F(u_{\mathfrak{p}}^m)$$

が成り立つ.

証明. H/F は巡回拡大なので, $G := \text{Gal}(H/F)$ の忠実な指標 χ が存在する. (すなわち, χ は単射準同型 $G \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ のことである.) H は CM 体で $S = S_\infty(F) \cup S_{\text{ram}}(H/F)$ なので, (3) より $L_{S,T}(\chi, 0) \neq 0$ であることに注意する.

任意の $\tau \in \text{Gal}(H/F(u_{\mathfrak{p}}^m))$ をとる. $\tau = 1$ を示せばよい. Brumer–Stark 単数の定義より,

$$\chi^{-1}(\text{Ord}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}^m)) = m \cdot L_{S,T}(\chi, 0)$$

であるが, 左辺は次のようにも計算できる:

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(\text{Ord}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}^m)) &= \chi^{-1}(\text{Ord}_{\mathfrak{p}}(\tau^{-1}u_{\mathfrak{p}}^m)) \\ &= m \cdot \sum_{\sigma \in G} \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\sigma \tau^{-1}u_{\mathfrak{p}}) \chi(\sigma) \\ &= m \cdot \sum_{\sigma \in G} \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\sigma u_{\mathfrak{p}}) \chi(\sigma) \chi(\tau) \\ &= m \cdot L_{S,T}(\chi, 0) \cdot \chi(\tau). \end{aligned}$$

よって

$$m \cdot L_{S,T}(\chi, 0) = m \cdot L_{S,T}(\chi, 0) \cdot \chi(\tau)$$

となるが, $m \cdot L_{S,T}(\chi, 0) \neq 0$ なので $\chi(\tau) = 1$ がわかる. χ は単射なので $\tau = 1$ である. $\square$

補題 3.4 さえ言えば, 定理 3.1 の証明の残りは初等的な議論でなされる. 次の 2 つの補題は単なるガロア理論なので, ここでは証明は省略する.

補題 3.5 ([DK21, Lemma 2.5]). H/F を有限次アーベル拡大で, H は CM 体とする.

$$\Upsilon := \{H' : H/F \text{ の中間体} \mid H'/F \text{ は巡回拡大で, } H' \text{ は CM 体}\}$$

とおく. すると,

$$H = \prod_{H' \in \Upsilon} H' \text{ (合成体)}$$

が成り立つ.

補題 3.6 ([DK21, Lemma 2.6]). K/F を有限次アーベル拡大とし, $\sqrt{-1}, \sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}} \in K$ とする. (特に K は総虚体である.) $H \subset K$ を最大 CM 部分体とする. このとき,

$$K = H(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}})$$

が成り立つ.

定理 3.1 の証明. $L := F(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}}, \{u_{F(\mathfrak{n}), \mathfrak{p}(\mathfrak{n})}^{m(\mathfrak{n})} \mid \mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_F : 0 \text{ でないイデアル}\})$ とおき, $F^{\text{ab}} = L$ を示す. $L \subset F^{\text{ab}}$ は明らかなので, $F^{\text{ab}} \subset L$ を示せばよい. すなわち, 任意の有限次アーベル拡大 K/F に対して, $K \subset L$ を示せばよい.

必要であれば K を大きくして, $\sqrt{-1}, \sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}} \in K$ と仮定してよい. すると, $H \subset K$ を最大 CM 部分体とすると, 補題 3.6 より

$$K = H(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}})$$

となる. $\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{n-1}} \in L$ なので, $H \subset L$ を示せばよい. 補題 3.5 より, H/F は巡回拡大と仮定してよい.

H/F の導手を $\mathfrak{n}$ とする. すると, $H \subset F(\mathfrak{n})$ で, $S_{\text{ram}}(H/F) = S_{\text{ram}}(F(\mathfrak{n})/F)$ が成り立つ. よって命題 2.7 (ノルム関係式) より,

$$u_{H, \mathfrak{p}(\mathfrak{n})}^{m(\mathfrak{n})} = N_{F(\mathfrak{n})/H}(u_{F(\mathfrak{n}), \mathfrak{p}(\mathfrak{n})}^{m(\mathfrak{n})}) \in H^\times$$

が成り立つ. これより, 特に $u_{H, \mathfrak{p}(\mathfrak{n})}^{m(\mathfrak{n})}$ は $u_{F(\mathfrak{n}), \mathfrak{p}(\mathfrak{n})}^{m(\mathfrak{n})} \in L$ の共役の積で書けるので, L の元である (L/F はアーベル拡大, 特に正規拡大であることに注意する). また補題 3.4 より, $H = F(u_{H, \mathfrak{p}(\mathfrak{n})}^{m(\mathfrak{n})})$ である. 以上より, $H \subset L$ であることがわかり, 証明が完成する. $\square$

参考文献

- [BKS16] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On zeta elements for $\mathbb{G}_m$, Doc. Math. **21** (2016) 555-626.
- [Das08] S. Dasgupta, Shintani zeta functions and Gross–Stark units for totally real fields, Duke Math. J. **143**(2) (2008) 225-279.
- [DK20] S. Dasgupta, M. Kakde, On the Brumer–Stark Conjecture, preprint. arXiv:2010.00657v2
- [DK21] S. Dasgupta, M. Kakde, Brumer–Stark Units and Hilbert’s 12th Problem, preprint. arXiv:2103.02516v1
- [Pop11] C. D. Popescu, Integral and p -adic Refinements of the Abelian Stark Conjecture, in: Arithmetic of L -functions, IAS/Park City Math. Ser. **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2011) 45-101.
- [Rub96] K. Rubin, A Stark Conjecture ‘over $\mathbb{Z}$ ’ for abelian L -functions with multiple zeros, Ann. Inst. Fourier **46** (1996) 33-62.
- [Sch98] N. Schappacher, On the history of Hilbert’s twelfth problem: a comedy of errors, In Matériaux pour l’histoire des mathématiques au XX^e siècle (Nice, 1996) (1998) 243-273.
- [Sta76] H. M. Stark, L -functions at $s = 1$ III: Totally real fields and Hilbert’s twelfth problem, Advances in Math. **22** (1) (1976) 64-84.
- [Tat84] J. Tate, Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d’Artin en $s = 0$ (notes par D. Bernardi et N. Schappacher), Progress in Math., **47**, Birkhäuser, Boston, 1984.