

Liénard equations without limit cycle

名大 教養 大 和 一 夫

Liénard equation

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - f(x) , \\ \dot{y} = -x , \end{cases} \quad \text{但し}$$

(1) f : odd, C^1 級, $f_x(0) < 0$,
の limit cycles の 個数 を 数える という 問題 が
ある. ここで は limit cycle が あらわれな いための
条件 (十分) を 与える.

この 方程式 を 扱う 理由は, 物理工学的 には,
(*) は $\ddot{x} + f_x(x)\dot{x} + x = 0$ と 表わされ 振動
現象 を 記述 し, 数学的 には $f(x)$ という 一変数
の 関数 ひとつ の 性質 の 研究 という 意味 で
もっとも 簡単 だから である.

Remark. グラフ $y = f(x)$ を Liénard の 特性曲線 とし,
この 曲線 上で 接ベクトル $(*)$ の) が y 軸 に 平行 になる.

仮定 $f_x(0) < 0$ は原点 $(0,0)$ が *unstable singular point* であること, f : odd はこの方程式が原点に関して対称であることを意味する.

次の事実が知られている.

(Liénard) $\exists a > 0$ s.t. $f(x) < 0, x \in (0, a), f(a) = 0$
 $f_x(x) > 0, x \in (a, \infty),$

$\Rightarrow \exists^1$ limit cycle, 且てこれは stable, i.e., 任意の nontrivial integral curve はこの limit cycle に $t \rightarrow \infty$ のとき近づく.

(Graef [1]) $\exists b > 0, \exists c > 0$: constants s.t. $f(x) > c$
 $x \in (b, \infty)$

$\Rightarrow \exists K \subset \mathbb{R}^2$, compact, すべての integral curve は, $t \rightarrow \infty$ のとき K に入る. 従って少なくともひとつ limit cycle がある.

そこで $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ のとき どうなるか 知りたい.

もし $\sup f(x) > 0$ が 十分小, 且て 十分速く $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ なら limit cycle が あらわれないと 期待される.

以下, 簡単のため 次の仮定をする.

(2) $\exists a > 0, f(a) = 0, f(x) < 0, x \in (0, a)$
 $f(x) > 0, x \in (a, \infty).$

Theorem. 次の条件が満たされるとは limit cycle なし:

$$\alpha = 2 + \frac{1+a^2}{2} \max_{|x| \leq a} |f(x)|^2 \quad \text{と} \quad \alpha < .$$

$$\frac{-\int_0^a x f(x) dx}{\int_a^\infty x f(x) dx} > \alpha ,$$

$$-\int_0^a x f(x) dx > \left(1 + \frac{\alpha}{2} \left(\int_0^a x f(x) dx\right)^2 + \frac{\alpha}{2} x^2\right) f(x) + \alpha \int_a^x x f(x) dx, \\ \text{for } \forall x > a .$$

Proof. Liapunov function とし

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \alpha (x^2 + y^2) + \log(x^2 + (y - h(x))^2)$$

但し, $\alpha > 0$ 定数, $h(x)$: odd は ある適当に

$$\text{定める. } \alpha, h(x) \text{ を選んで } \dot{V}(x, y) = \frac{d}{dt} V(x, y) \geq 0$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, とできればよい.

Lemma 1.

$$\dot{V}(x, y) = -\alpha x f(x) + 2 \cdot \frac{-x(f(x) - h(x)) - h_x(x)(y - f(x))(y - h(x))}{x^2 + (y - h(x))^2}$$

以下 $h(x)$ について 次の仮定をする:

$$(3) \quad h_x(0) = 0, \quad h_x(x) > 0, \quad x \in (0, a), \quad h_x(a) = 0, \\ h_x(x) < 0, \quad x \in (a, \infty)$$

222

$$h(x) - f(x) > 0, \quad h(x) > 0, \quad x \in (0, \infty)$$

よて、次の二つの条件を整理すればよい：

$$(i) \quad \dot{V}(x, y) \geq 0, \quad \forall x \in (0, a), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \dot{V}(x, y) \geq 0, \quad \forall x \in (a, \infty), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

(3) を考慮すると

$$(i) \iff \alpha \geq -\frac{h_x}{xf} + \frac{h-f}{x^2f} - \frac{\sqrt{(xh_x + h-f)^2 + h_x^2(h-f)^2}}{x^2f}$$

$$\forall x \in (0, a)$$

$$(ii) \iff -\alpha xf - h_x + \frac{h-f}{x} \geq 0$$

$$\begin{aligned} & (dxf)^2 - 2dxf\left(-h_x + \frac{h-f}{x}\right) \\ & - 4h_x \cdot \frac{h-f}{x} - \frac{h_x^2(h-f)^2}{x^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\forall x \in (a, \infty)$$

この右辺の不等式は適当な評価によって Th. の条件になる。

証明終

Reference

- [1] J.R. Graef: On the Generalized Liénard Equation
J. of Diff. Eqs, 12, 34-62 (1972)