

On $2p$ -fold transitive permutation groups

学習院大 理 芳沢光雄

G を $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の $2p$ -重可移群とし (p : odd prime). P を $G_{1,2,\dots,2p}$ の Sylow p -subgroup とする。 G が nontrivial (S_n や A_n でない) な $2p$ -重可移群ならば, $P \neq 1$, かつ $P^{\Omega - I(P)}$ が nonsemiregular であることが, 坂内英一氏により証明されている。そこで, $|I(P)|$ 点より多く fix している P の subgroups のうちで, order が最大となるもの Q をとる。 $N_G(Q)^{I(Q)}$ がどのようなになるかを考え, 次の Theorem A, Theorem B を得た。

Theorem A Let p be an odd prime. Let G be a permutation group on a set $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ which satisfies the following condition. For any $2p$ points $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ of Ω , a Sylow p -subgroup P of the stabilizer in G of the $2p$ points $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ is nontrivial and fixes exactly $2p+r$ points of Ω , and moreover P is

semiregular on the set $\Omega - I(P)$ of the remaining $n - 2P - r$ points, where r is independent of the choice of $\alpha_1, \dots, \alpha_{2P}$ and $0 \leq r \leq P-2$. Then $n = 3P + r$, and there exists an orbit Γ of G such that $|\Gamma| \geq 3P$ and $G^\Gamma \geq A^P$.

Theorem B Let P be an odd prime ≥ 11 . Let G be a permutation group on a set $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ which satisfies the following condition. For any $2P$ points $\alpha_1, \dots, \alpha_{2P}$ of Ω , a Sylow P -subgroup P of the stabilizer in G of the $2P$ -points $\alpha_1, \dots, \alpha_{2P}$ is nontrivial and fixes exactly $3P-1$ points of Ω , and moreover P is semiregular on the set $\Omega - I(P)$ of the remaining $n - 3P + 1$ points. Then $n = 4P - 1$, and one of the following two cases holds: (1) There exists an orbit Γ of G such that $|\Gamma| \geq 3P$ and $G^\Gamma \geq A^P$. (2) G has just two orbits Γ_1 and Γ_2 with $|\Gamma_1| \geq P$, $|\Gamma_2| \geq P$ and $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| = 4P - 1$, and G^{Γ_i} is $(|\Gamma_i| - P + 1)$ -transitive on Γ_i ($i = 1, 2$). Moreover, $G^{\Gamma_i} \geq A^{\Gamma_i}$ if $|\Gamma_i| \geq P + 3$.

Theorem B の証明の方が、Theorem A の証明より多少複雑であるが、それらは、本質的には同じであるので、Theorem A の証明の概略を次に述べてます。

Theorem A の証明の概略 G を Theorem A の仮定をみたす群とすれば、 G は長さが P 以上の唯一の orbit Γ をもつことが分かる。そのことから、 $\Omega = \Gamma$ と仮定してよい。Theorem A の仮定を何回も使うことにより、 G は Ω 上 $(P+3)$ -transitive であることが分かる。以後 $G \neq A^{\Omega}$ を仮定して矛盾を導くことにする。 $G_{1,2,3}$ は $\Omega - \{1,2,3\}$ 上 P -transitive であるので、次の式が得られる。

$$\frac{|G_{1,2,3}|}{P} = \sum_{x \in G_{1,2,3}} \alpha_P(x) \geq \sum_i \frac{|G_{1,2,3}|}{|C_{G_{1,2,3}}(\mu_i)|} \frac{1}{P} \sum_y' \alpha^*(y)$$

上式において、 $\alpha_P(x)$ は x の cycle structure における P -cycle の個数で、 μ_i は $G_{1,2,3}$ における order P の元の共役類の代表元全体を動き、 y は $C_{G_{1,2,3}}(\mu_i)$ における全ての P -elements を動き、 $\alpha^*(y)$ は、 y の $\Omega - I(\mu_i)$ 上の固定点数を表すものとする。 α を $I(\alpha) = 2P+r$ となるような $G_{1,2,3}$ の order P の元とすれば、上式を使って、 $C_{G_{1,2,3}}(\alpha)$ は $\Omega - I(\alpha)$ 上に高々 3 つの orbits をもち、さらに $|\Omega| - (2P+r) \not\equiv 0 \pmod{P^2}$ のときは、 $C_{G_{1,2,3}}(\alpha)$ は $\Omega - I(\alpha)$ 上に高々 2 つの orbits をもつことが分かる。このことを使って、order P の元の fusion を色々と調べることにより、矛盾を得る。

Theorem A の corollary として、次の Theorem C, Theorem D を得た。Theorem C, Theorem D は、それぞれ Livingstone - Wagner,

Wielandt の結果の改良になっている。

Theorem C Let p be an odd prime. Let G be a nontrivial $2p$ -transitive group on $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Then there exists a subset Γ of Ω such that $|\Gamma| \geq 3p-1$ and $G_{(\Gamma)}^{\Gamma} \cong A^{\Gamma}$.

Theorem D Let G be a nontrivial t -transitive group on $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. If t is sufficiently large, then $\log(n-t) > \frac{3}{4}t$.

Theorem A と Theorem B を使うことによって、次の Theorem E を得た。Theorem E は、坂内英一氏の結果の改良になっている。

Theorem E Let p be an odd prime ≥ 11 , and let q be an odd prime with $p < q < p + \frac{p}{3}$. Let G be a $2p$ -fold transitive permutation group on $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. If the order of $G_{1,2,\dots,2p}$ is not divisible by q , then G is S_n ($2p \leq n \leq 2p+q-1$) or A_n ($2p+2 \leq n \leq 2p+q-1$).

Theorem E の証明の概略は、次のようなものである。(G:反例)
 $|I(p)| \leq p+q-1$ のときは、 $3p$ 点より多く fix する p の subgroups の

うちで、order 最大なものをも Q とし、 $|I(P)| \geq P+q$ のときは、
 $4P$ 点より多く fix する P の subgroups のうちで、order 最大な
 ものを Q とする。 $N_G(Q)^{I(Q)}$ に Theorem A, Theorem B を使うことによ
 り、 $|I(P)| \geq P+q$, かつ $N_G(Q)^{I(Q)}$ は $3P$ 点より多く fix する order P の
 元をもつことが分かる。その元を使うことにより矛盾を得る。

Theorem E の corollary として、次の Theorem F, Theorem G を得た。

Theorem F Let P be an odd prime ≥ 11 , and let q be an odd
 prime with $P < q < P + \frac{P}{3}$. Let G be a $2P$ -fold transitive
 permutation group on $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. If $G_{\{1, 2, \dots, 2P\}}$ has an orbit
 on $\Omega - \{1, 2, \dots, 2P\}$ whose length is less than q , then G is
 S_n ($2P+1 \leq n \leq 2P+q-1$) or A_n ($2P+2 \leq n \leq 2P+q-1$).

Theorem G Let P be an odd prime ≥ 11 , and let q be an odd
 prime with $P < q < P + \frac{P}{3}$. Let D be a $2P$ -($v, k, 1$) design with
 $2P < k < 2P+q$. If an automorphism group G of D is $2P$ -
 fold transitive on the set of points of D , then D is
 a $2P$ -($k, k, 1$) design, namely a trivial design.