

振動型積分変換の L^2 有界性とその応用.

東大 理.

浅田健嗣

藤原大輔

§1. 序

$\nu \geq 1$ を自然数とすると, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して積分変換が

$$(1) \quad A(\nu)f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} a(x, \theta, y) e^{i\nu\phi(x, \theta, y)} f(y) dy d\theta$$

の型のものを考える. Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上, 有界線型作用素を定義すよための十分条件を求め, $\nu \rightarrow \infty$ のときの漸近の様子を調べておく.

Ex. 1. $m=0$ のとき, Fourier 変換.

$$\hat{f}(y) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\nu x \cdot y} f(x) dx$$

Ex 2. $m=n$, $a(x, \theta, y) \equiv 1$, $\phi(x, \theta, y) = (x-y) \cdot \theta$

$$f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\omega(x-y)\cdot\theta} f(y) dy d\theta$$

Ex. 3. $m=n$. $\phi(x, \theta, y) = (x-y)\cdot\theta$ のとき擬微分作用素.

$$A(\nu) f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} a(x, \theta, y) e^{i\omega(x-y)\cdot\theta} f(y) dy d\theta$$

となる。

Ex. 4. Eskin の例 [5] $m=n$, $\nu=1$.

$\lambda(x, \xi)$ は ξ に関する 1 次の実 C^∞ 関数, $\phi(x, \theta, y)$ は,

Eiconal eq.

$$p_t - \lambda(x, \phi_x) = 0$$

$$\phi|_{t=0} = (x-y)\cdot\theta$$

の解. $\phi(t, x, \theta, y)$ を t について $+$ と $-$ とみる $(+/-)$. $a(x, \theta, y)$ は y に関する C^∞ 関数, $\exists r \geq 0$.

$$|2_x^\alpha a(x, \theta)| \leq C(1+|\theta|)^r$$

という評価を t_1, t_2 に対して, x に関する compact support. 二のとき

$$\|A(\nu) f\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$$

を示す。

Ex. 5. Eskin [6] $\nu=1$. $m=0$, $\phi(x, y)$ は y に関する 1 次. 実数 α と $\exists C^\infty$ 関数 $a(x, y)$ ($y \neq 0$)

$$(a) \quad |2_x^\alpha a(x, y)| \leq C(\alpha),$$

$$(b) \quad \exists N > 0 \quad \text{if } |x| \geq N \Rightarrow \quad a(x, y) \equiv a(\infty, y).$$

$$(c) \quad \left| \det \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial y_j}(x, y) \right| \neq 0 \quad \forall y.$$

この下で

$$\|A(x)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (L=1)$$

を示す。

Ex 6, Hörmander [10] $\phi(x, \alpha, y)$ は α につき各点 x の $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n)$ の実数値関数で、

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial y_j}(x, \alpha, y) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial \alpha_j}(x, \alpha, y) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_i \partial y_j}(x, \alpha, y) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(x, \alpha, y) \end{pmatrix} \neq 0$$

かつ $a \in S_{p, 1-p}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, $p > \frac{1}{2}$ のとき,

$\forall K, K'$ という $\mathbb{R}^n$ の二つのコンパクト集合に対し, $\exists C > 0$ があつて, f の台が K' に含まれるなら

$$\|A(x)f\|_{L^2(K)} \leq C \|f\|_{L^2(K')} \quad (L=1).$$

を示す。

Ex 7. 熊, 錦 [2] は早くから Fourier 積分作用素の L^2 有界性について研究を発表した。最近の結果に依ると, [12],

Eskin と Hörmander の結果によつて $a(x, y) = a(\infty, y)$ という条件を除いた。

$a \in S_{p,r}^0$, $p \geq \delta$ である. (しかし $\phi(x, y)$ は,
 $(x-y)^{\frac{1}{2}}$ から, あまり離れては行かない. といふ.

$$\|A(\lambda)f\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2} \quad (\lambda=1)$$

という評価を, f の台の有限, 無限に関わらず, 証明してい
 る.

Ex 8 藤原 [7] は, はじめに, パラメータ λ を導入し
 た. といふ ~~$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$~~ $m=0$. 即ち $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$
 が実数値をとり, 次の仮定を満たすものとした.

$$(A) \quad \bar{\Phi}(x, y, z) = \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) \right|$$

$$\underline{\Phi}(x, y, z) = \left| \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, z) \right|$$

と仮定. 正値関数 $E_1(x, y, z)$, $E_2(x, y, z)$, $Q(t)$ があり,

$$\bar{\Phi}(x, y, z) \geq E_1(x, y, z) Q(1-y-z)$$

$$\underline{\Phi}(x, y, z) \geq E_2(x, y, z) Q(1-x-z)$$

があり, ある正数 $\delta > 0$ があり $E_j(x, y, z) \geq \delta$, ($j=1, 2$)

であり, また他の $\sigma > 0$ により $Q(t) \sim t^{-\sigma}$ ($t \rightarrow \infty$)

と仮定する.

(B) $\forall \alpha$, $|k| \geq 2$ に対し

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha (\phi(x, y) - \phi(x, z)) \right| \leq C \bar{\Phi}(x, y, z)$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha (\phi(x, y) - \phi(x, z)) \right| \leq C \underline{\Phi}(x, y, z)$$

$$(C) \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha (a(x, y) a(x, z)) \right| \leq C \Sigma_1(x, y, z)^{|\alpha|}$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha (a(x, y) a(x, z)) \right| \leq C \Sigma_2(x, y, z)^{|\alpha|}.$$

これらの仮定 (A), (B), (C) が満たされるとして,

$$\|A(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

を示した。

ここで、(1) という積分変換は次の仮定を置く。

(A-I) ϕ は実数値の $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ の関数。

(A-II) $\exists \delta_0 > 0$, $\forall (x, 0, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ に対して,

$$|\det D(\phi)(x, 0, y)| \geq \delta_0$$

が成立する。ところで、 $D(\phi)(x, 0, y)$ は次の行列。

$$D(\phi)(x, 0, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, 0, y), & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial 0}(x, 0, y) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial 0 \partial y}(x, 0, y), & \frac{\partial^2 \phi}{\partial 0 \partial 0}(x, 0, y) \end{pmatrix}$$

(A-III) 行列 $D(\phi)(x, 0, y)$ の各成分は L. Schwartz [16] の意味で $\beta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ の元。

(A-IV) $a \in \beta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$.

この後定 (A-I), (A-II), (A-III), (A-IV) をおくと,

$$\|A(\lambda)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

という評価が,

成立する。従って,

$A(\lambda)$ は, $L^2(\mathbb{R}^n)$ の有界線型作用素と定まる。

§2. 定理.

種分. (1) は, 一般には絶対収束しない。ために, 種分

(1) の意味を, ぼつそりさせる。

定義. 関数列 $\{\omega_\nu(x, \lambda, y)\}_{\nu=1}^\infty$ が, 1 の近似列であるとは, $\{\omega_\nu\}$ が $\beta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ で有界集合となし, 各々の $\omega_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ で $E(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 上

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \omega_\nu(x, \lambda, y) = 1 \quad \text{であること. とす.}$$

これを (A) といふ

$$(2) \quad A_\lambda(\nu)f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} a(x, \lambda, y) \omega_\nu(x, \lambda, y) f(y) dy d\lambda$$

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

とおく。

定理 1. (A-I) から (A-IV) が成立すると仮定するならば,

$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し, 1 の近似列のとり方によらず,

$\exists A(x)f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(x)f(x)$ が各 $x \in \mathbb{R}^n$ (251)
で存在し, Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ の意味で強収束.

$A(x)f = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} A_k(x)f$
が成立する.

定理 2. (A-I) から (A-IV) が成立すると仮定すれば,

$\exists C > 0, \forall \nu \geq 1, \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\|A(x)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

という評価が成立する.

$\nu \rightarrow \infty$ のときの様子を記述するには, Hörmander
及び Maslov の仕事が, 指針となった.

定義 2 $C_\phi = \{ (x, a, y) \mid \frac{\partial \phi}{\partial a}(x, a, y) = 0 \}$
と置く.

$$\Lambda_\phi = \{ (x, y, d_x \phi, -d_y \phi) \mid (x, a, y) \in C_\phi \}.$$

とすると, Λ_ϕ は, $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ の正準変換のグラフとなる。
そして, Hörmander に従って Λ_ϕ 上 $\delta_{\frac{1}{2}} \otimes L$ の
切断となる, $A(x)$ の主象 $\sigma(A(x))$ を定義する.

$\Lambda\phi$ と 二の主表象が $\nu \rightarrow \infty$ のときの A_1 の振舞いと
本質的に決定する。すなわち、

定理 3.

$$A_1(\nu) f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} a_1(x, 0, y) e^{i\nu\phi_1(x, 0, y)} f(y) dy d\alpha$$

$$A_2(\nu) f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m'+n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^{m'} \times \mathbb{R}^n} a_2(x, \tilde{\alpha}, y) e^{i\nu\phi_2(x, \tilde{\alpha}, y)} f(y) dy d\tilde{\alpha}$$

が共に (A-I) ~ (A-IV) の条件を満たすとする。しかも

$$\Lambda(\phi_1) = \Lambda(\phi_2) \quad \text{かつ} \quad \sigma(A_1) = \sigma(A_2) \quad \text{であり、} \Lambda(\phi)$$

が有限性条件 (L) を満たすならば、ある定数 $\gamma \in \mathbb{R}$

と、ある定数 $C > 0$ において、 $\nu \geq 1$ 、 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|A_1(\nu)f - e^{i\nu\gamma} A_2(\nu)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \nu^{-\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

有限性の条件 L とは、次の如くである。

χ を $\Lambda(\phi)$ に対応する正準変換とする。

$$\chi: (x, \xi) \longrightarrow (y, \eta)$$

とする。 $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対し、母関数として (x_k, ξ_k)

の関数かといえるところを V_χ とする。有限性の条件 L とは

この時、この V_k が有限個の からなっていること。

sheets

§3 応用,

ある $\delta > 0$ があって $|a(x, 0, y)| \geq \delta > 0$ とする。
このとき $B(\lambda)$ を直ちに $1/\lambda$ の形の多項式にすると

$$A(\lambda) \cdot B(\lambda) = I + R(\lambda)$$

で $\|R(\lambda)\| \leq C\lambda^{-1}$ に出来る。

従って λ が十分大きいとき $A(\lambda)^{-1}$ が存在する。

とくに $a(x, 0, y) \equiv 1$ のとき λ が十分大きいとき、
ある unitary operator $U(\lambda)$ があって

$$\|U(\lambda) - A(\lambda)\| \leq C\lambda^{-1}$$

に出来る。

このことは、"正準変換にはユニタリ作用素が対応する"
という、有名な量子力学の原理に符合している。

§4 証明の概略。

定理2の証明のみを概説しよう。

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \int \varphi(x) dx = 1,$$

$$\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \int \psi(x) dx = 1$$

とする。

$(a, \sigma, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ に対し,

$$a_{\sigma, \sigma, t}(x, y) = a(x, y) \varphi(x-t) \varphi(y-t)$$

と置き,

$$A_{\sigma, \sigma, t}(x) f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint a_{\sigma, \sigma, t}(x, y) e^{i\lambda(x, y)} f(y) dy dx$$

とすると,

$$A(x) f(x) = \iiint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} A_{\sigma, \sigma, t}(x) f(x) d\sigma d\sigma dt$$

であり,

$$p = (a, \sigma, t), \quad A_{\sigma, \sigma, t}(x) = A_p(x) \quad \text{と置く.}$$

次の Calder - Stein の補助定理 (Calderin - Vaillancourt)

を用いる.

補助定理 (Calderin - Stein)

(i) $\|A_p\| \leq C$ とする. 正定数 C がある.

(ii) 正数値関数 $k(p, p')$ がある.

$$\|A_p A_{p'}(x)\| \leq k(p, p')^2$$

$$\|A_p(x) A_{p'}^+(x)\| \leq k(p, p')^2$$

$$\sup_p \int k(p, p') dp \leq C \quad \sup_{p'} \int k(p, p') dp \leq C$$

が成立すれば,

$$\|A(x) f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する.

この Cotter - Klein の補助定理の仮定 (I) (II) が成立することを確認しておく必要がある。そのために次の補助定理を用いる。これが必要とする議論の基本となる定理である。

補助定理. (A-I) (A-II) (A-III) が成立するとする。

$(x, 0, y) \longrightarrow (z, \eta, y)$, $z = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, y)$, $\eta = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, 0, y)$
 は $\mathbb{R}^{m+2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2n}$ の大域的微分同相を与える。
 1) δ' もある正定数 δ' があって、2) の評価。

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, y) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x', 0, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, 0, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x', 0, y) \right|^2 \\ \geq \delta' (|x - x'|^2 + |0 - 0'|^2)$$

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, 0, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, 0, y') \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, y) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, y') \right|^2 \\ \geq \delta' (|y - y'|^2 + |0 - 0'|^2)$$

が成立する。

これは、よく知られた、大域的陰関数定理を用いければ得られる。

補助定理の意味がこうは、因子 $e^{i\phi(x, 0, y)}$ が、 $(x, 0, y)$ が変化すると、速く振動する。ということも、保証している。

証明の詳細、及び、これらの定理から導かれる結果、
及び、擬微分作用素との合成規則 については、
我々の論文 [] を参照されたい。

文献 17. 次ページにあり。

References

- [1] Asada, K. and Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with rapidly oscillatory kernels. J. Math. Soc. Japan, vol.27, 1975 pp 628-639.
- [2] Birkhoff, G. D., Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), 681-700.
- [3] Calderón, A. P. - Vaillancourt, R., A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 69 (1972), 1185-1187.
- [4] Dirac, P., The principle of quantum mechanics. Third edition. 1947 Oxford,
- [5] Eskin, G. I., The Cauchy problem for hyperbolic systems in convolution, Mat. Sbornik, 74 (1967), Translation: Math. USSR Sbornik, 3 (1967), 243-277.
- [6] ———, Degenerate elliptic pseudo-differential equations of principal type, Mat. Sbornik, 82 (1970), Translation: Math. USSR Sbornik, 11 (1970), 539-582.
- [7] Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with rapidly oscillatory kernels, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 90-99.
- [8] ———, Fundamental solution of partial differential operators of

- Schrödinger's type, I, Proc. Japan Acad. 50 (1974), 566-569, II, 699-701.
- [9] ———, Construction of the fundamental solutions of Schrödinger's equation on the sphere, To appear in J. Math. Soc. of Japan.
- [10] Hörmander, L., Fourier integral operators, Acta Math. 127 (1971), 79-183.
- [11] ———, Oscillatory integrals and multipliers on FL^p , Arch. Math. ^{for} vol 1. (1973) pp 1-11.
- [12] Kumanogo, H., A calculus of Fourier integral operators on $\mathbb{R}^n$ and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type, Communications in partial differential equations.
- [13] Lax, P. D., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J. 24 (1957), 627-646.
- [14] Leray, J., Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles Séminaire Leray, Collège de France, 1972.
- [15] Maslov V.P., Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, (Russian French translation, Dunod. (1974)²
- [16] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, Paris. 2nd ed. (1970)
- [17] Schwartz, J. T., Nonlinear functional analysis, Gordon-Breach, New York 1969.
- [18] Asada, Fujiwara, On some oscillatory integral transformations in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
日本数学会 Jour に投稿中.