

Micro-local Calculus I

京大・数理研 佐藤 幹夫

序

研究集会(1974年7月1日~4日)での佐藤
および柏原の講演は Micro-local Calculus I, II と
題するものでした。

ここには Micro-local Calculus I のかわりに
佐藤が 名古屋大学で行った同じ内容の
集中講義(1974年5月27日~31日)の, 神保道夫氏
のノートを、また Micro-local Calculus II のかわりに
9月に 柏原氏が 名古屋大学で行った講義の
木村達雄氏によるノートを 載せます。

京大・理・大学院 神保 道夫記

5月27日(月)

“超局所解析” 一般論ではなく 具体例を通じて話す。
 古典解析学に近い考え方
 Infinitesimal Calculus ... 最も簡単なものに分析し 全体を
 integrate してつなぎあわせる
 この立場にもう一度戻ろう (より徹底して). Neo Classic

Maximally overdetermined system of LDEq. (or Ψ DEq.)
 (以下すべて linear とする)

① system of LDEq. (Ψ DEq.) とは何か.

(すべて local に考える. 係数はすべて analytic とする.
 (必要に応じて real $\leftrightarrow$ complex にかきかえる))
 (今回は有限階の operator の $\wedge$ を考える.
 unknown function は 1 つ とする.)

$$P_j(x, D)u = 0 \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$\mathfrak{D} \ni P_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} \quad \begin{array}{l} \text{多様体上で定義された} \\ \text{operator の germ} \end{array}$$

$\mathfrak{D}$: ring of L.D. Op. (sheaf)

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

$$|v| = v_1 + \dots + v_n$$

$$D^v = D_1^{v_1} \dots D_n^{v_n}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, D_n = \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

($j=1, 2, \dots$ は無限個あってもよいが 実は
 Hilbert の基底定理が成立ち, 有限個でよい)
 i.e. $\mathfrak{D}$ は Noetherian

$\mathcal{D}$... micro-local に. (特定の点だけでなく $\exists$ co-direction
 についても局所化して考える)
 cotangent bundle 上の sheaf.

$$P(x, D) = \underbrace{P^{(m)}(x, D)}_{\text{vector field}} + P^{(m-1)}(x, D) + \dots + \underbrace{P^{(1)}(x, D)}_{\text{函数 or scalar field}} + P^{(0)}(x, D)$$

(この書き方は座標系に依っているが, top の部分には
 intrinsic な意味がある)

$$D_j \circ x_i - x_i \circ D_j = \delta_{ij} \quad (\text{交換関係})$$

低階の項を無視すれば可換となる.

$P^{(m)}(x, \eta) \dots x$ について analytic, η について 齊次 m 次多項式
 principal symbol or 特性多項式

$$\mathcal{D} = \bigcup_m \mathcal{D}^{(m)} \quad (\text{高々 } m \text{ 階の operator})$$

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{(m-1)} \rightarrow \mathcal{D}^{(m)} \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{O}^{(m)} \rightarrow 0$$

$$P \mapsto P^{(m)}(x, \eta)$$

(可換環.)

($\mathcal{O}^{(m)}$ は η について 齊次 m 次
 多項式, 係数が x の analytic
 fn. であるものの sheaf.)

$$\mathcal{D}^{(m)} / \mathcal{D}^{(m-1)} \cong \pi_* \mathcal{O}^{(m)}$$

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) = \eta_1 dx_1 + \dots + \eta_n dx_n$$

余接 vector (at some pt.)

X^n : 実 or 複素 n 次元多様体

$$(x, \eta) \in T^*X$$

$$\begin{array}{ccc} T^*X & & \mathcal{O}^{(m)} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{direct img.} \\ X & & \pi_* \mathcal{O}^{(m)} \end{array}$$

$\pi_* \mathcal{O}^{(m)}$ は $\mathcal{X}$ については localize されているが fibre 方向
には まだ global.

$\mathcal{D}$ から $\mathcal{P}$ にいくと $\mathcal{O}^{(m)}$ が $+$ で出てくる.

$$(\eta_0, \eta_0) \in T^*X \quad f \in \mathcal{O}_{(\eta_0, \eta_0)}^{(m)} \quad \dots \quad f(x, c\eta) = c^m f(x, \eta) \quad (|c| \neq 1 \text{ なら } \neq 0)$$

まじんと言うならば $(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \dots + \eta_n \frac{\partial}{\partial \eta_n})f = mf$ をみたすもの
といえはよい (Euler identity).

(今言った概念を抽象化 することによって skew manifold と
いうものを定義できる; 時間があれば ちゃんとやる)

もとに戻って. 方程式とは何か?

$$A_j(x, D) \in \mathcal{D} \text{ (resp. } \mathcal{P}) \text{ と勝手に } \mathcal{D} \text{ として } \mathcal{P} \text{ と}$$

$$\left\{ \sum_{j=1,2,\dots} A_j(x, D) P_j(x, D) \right\} u = 0$$

問題なのは P_j たちでなく それらで張られる left ideal

$$\mathcal{I} = \left\{ \sum A_j P_j ; A_j \in \mathcal{D} \text{ (resp. } \mathcal{P}) \right\}$$

である. $\mathcal{I}$ は left ideal of $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{P}$)

$\mathcal{D}$ は Noether だから $\mathcal{I}$ は有限生成 (germs)

$P_1, P_2, \dots$ $\mathcal{I}$ の basis

$Q_1, Q_2, \dots$ なる別の basis をと. たとしても同じである.

(見掛けは違っても方程式としては equivalent)

更に

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{I} \text{ (resp. } \mathcal{P}/\mathcal{I})$$

なる left module の方が本質的である.

(unknown fn u を fix して考えれば $\mathcal{I}$
を考えても 変えなくていい)

$$m = D \cdot u$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

$$A \mapsto Au$$

(u は "不定文字" であって
方程式の記述である.

cf. $x^{17} - 1 = 0$)

u とは $1 \mapsto 1u$ の行先. ($\text{mod } f$)

$$\bar{1} = 1 \pmod{f} \quad \text{を } u \text{ の定義とある。}$$

$$f^{(m)} \stackrel{\text{df.}}{=} f \cap D^{(m)}$$

system of LDE_q. $\iff$ coherent left ideal $\mathfrak{f} \subset \mathcal{D}$
(of unknown u)

$$\bar{\Psi} D E_q \quad \Longleftrightarrow \quad \text{"} \quad C.P.$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^{(m)} & \xrightarrow{\sigma_m} & \mathcal{O}^{(m)} & \rightarrow & 0 \\ \cup & & \cup & & \\ \mathcal{J}^{(m)} & \longrightarrow & \mathcal{I}^{(m)} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

$$\hat{J} = \bigoplus_{m=0,1,2,\dots} J^{(m)}$$

$$C \quad \hat{O} = \bigoplus_{m=0,1,2,\dots} O^{(m)}$$

graded ring

coherent 齊次 ideal.

定義 f の π $P_1, \dots, P_N$ が 包含的 な basis であるとは,

$$\sigma_{m_1}(P_1), \dots, \sigma_{m_N}(P_N)$$

かゝる J の basis 1 になること。

(このとき $P_1, \dots, P_N$ が $\mathcal{F}$ の basis であることが
すぐに分かる)

g の basis と勝手にと, 2 も J の basis に は ならないことに注意.

$$f \ni Q = A_1 P_1 + \dots + A_N P_N$$

f が包含的 $\Leftrightarrow f^{(m)} \ni Q$ のとき $A_1 \in \leq m - m_1$ 階,
 $\dots A_N \in \leq m - m_N$ 階
 に選べる. (≤ 0 のときは 0 階)

勝手な basis をとったらこうはならない. つまらない例だが

$$\begin{cases} (D_1^2 + D_2)u = 0 \\ D_1 u = 0 \end{cases} \quad (\text{const. のみで可方程式})$$

を考へる.

$$f = \mathfrak{D}(D_1^2 + D_2) + \mathfrak{D}D_1 = \mathfrak{D}D_1 + \mathfrak{D}D_2$$

involutory basis

$Q = A_1 D_1 + A_2 D_2$ が上のようにとれることは明らか.

$= A_1'(D_1^2 + D_2) + A_2' D_1$ でしょうか? いかんいかんとも明らか.

方程式系 f . symbol ideal $\hat{f} = \bigoplus \hat{f}^{(m)} \subset \hat{\mathcal{O}} = \bigoplus \mathcal{O}^{(m)}$
 T^*X の函数環

定義. 可換環 $\hat{\mathcal{O}}$ の ideal $\hat{f}$ が決める

零点集合は T^*X の analytic subvariety
 を作る.

これを方程式系 f の 特性多様体 という.

$\hat{f}$ の basis $p_1(x, \eta), \dots, p_N(x, \eta)$

$$V = \{(x, \eta) \in T^*X; p_1(x, \eta) = \dots = p_N(x, \eta) = 0\}$$

!!! かつ f の 包含的 な basis $P_1, \dots, P_N$ をとる

$$V = \{(x, \eta) \in T^*X; \sigma_{j,1}(P_j)(x, \eta) = 0, j=1, \dots, N\}$$

$$T^*X \supset V$$

V の既約成分は n 次元以上.

独立な方程式が n 個であることを意味する。

$$T^*X \ni (x, \eta): \omega = \eta_1 dx_1 + \dots + \eta_n dx_n \quad (2n \text{ 変数の } 1\text{-form})$$

これを canonical 1-form という。

$$d\omega = d\eta_1 \wedge dx_1 + \dots + d\eta_n \wedge dx_n$$

$T^*(T^*X)$ の non degenerate skew symmetric form

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

($d\omega$ は T^*X 上に symplectic structure を def するという)

一般に偶数次元の多様体上の closed 2-form
で, tangent space 上 non degenerate skew symmetric
form を定義するとまにこういふ。

$$(d\omega)^n \neq 0 \quad \text{といえる。}$$

$$n! \, d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

ω : 斉次正準構造 (乃至 接触構造 / P^*X)

canonical vector field $\eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \dots + \eta_n \frac{\partial}{\partial \eta_n}$ が定義できる。

(ω により $T^*(T^*X)$ と TP^*X を identify する。)

① Poisson 括弧積.

$$\varphi, \psi \in \hat{\mathcal{O}}_{T^*X}$$

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_j} \right)$$

これは $d\omega$ による, covector field $d\varphi, d\psi$ の内積.
 $d\varphi$ に対応する vector field は

$$H_\varphi = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right)$$

これを Hamiltonian vector field とする.

$$\{\varphi, \psi\} = H_\varphi(\psi) \quad \text{である.}$$

$$= -H_\psi(\varphi)$$

——— “ ” ———

characteristic variety の性質は?
 一般に $T^*X \supset \hat{V}$

analytic subvariety
 定義 ideal $\hat{J}$ をとる.

定義.

$\varphi, \psi \in \hat{J} \Rightarrow \{\varphi, \psi\} \in \hat{J}$
 が成り立つとき, $\hat{V}$ が 包合的 subvariety であるという.

定理. characteristic variety は involutory である.

(一般の場合 実は
 証明は太さである)

(ここで $\hat{J}$ が 出鱈目 ではなく, reduced ideal,
 つまり $f^m \in \hat{J} \Rightarrow f \in \hat{J}$ をみる ことが大事である.)

“包合的” という条件は, 勝手な ideal を与えて その中を
 とるとしても成り立ってしまう 意味がなくなる.)

"simple" のとき つまり $\mathfrak{g}$ の symbol ideal $\hat{\mathfrak{J}}$ が reduced
 というときには 証明が簡単である。

(multiplicity の概念も 定義できるのであるが 述べる)

$$\varphi, \psi \in \hat{\mathfrak{J}} ; \quad \varphi = \sigma_m(\vec{P}), \quad \psi = \sigma_2(\vec{Q})$$

このとき $PQ - QP \in \mathfrak{g}$ であるが、このとき symbol は
 (top は可換だから消える)

$$\sigma_{m+l-1}(PQ - QP) = \{\varphi, \psi\} \quad \text{QED}$$

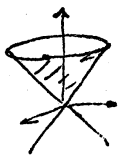
接触多様体の

包絡的 ^{多様体} は、どの既約成分も 余次元 n 以下 1 になる。
 (classical result)

① isotropic subvariety.

$\xi \neq 0$ の vector ξ は isotropic vector という。

(indefinite だったら $\xi \neq 0$ である。) right one



indefinite metric g も $Riemannian$ mfd

が totally isotropic

$\Leftrightarrow$ submfd の tangent space が $\xi \neq 0$.

定義. $\hat{V} \subset T^*X$ が isotropic

$$\Leftrightarrow \text{Df.} \quad i^*\omega = 0$$

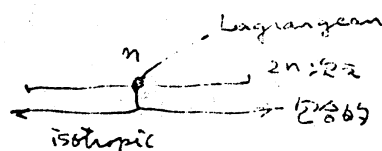
(ω は T^*X の
canonical 1-form)

isotropic subvariety の どの既約成分も 高々 n 次元
 となること がいえる。

(今度は 余次元が 上がる)

定義

Lagrangian subvariety とは, 包含的 純 n 次元 の もの.
 = isotropic かつ 純 n 次元
 = 包含的 & isotropic



はじめに戻って 定義を述べると,

定義. characteristic variety が Lagrangian である
 ような system を Maximally overdetermined
 system とする.

— $\leftrightarrow$ —

例 & Exercise 1

$n=1$.

$$(x \frac{d}{dx} - \lambda) u = 0$$

$$u = c \cdot x^\lambda$$

函数としてとらえるには 解釈が必要である.

$$\begin{array}{cc} x_+^\lambda & (x+i0)^\lambda \\ (-x)_+^\lambda & (x-i0)^\lambda \end{array}$$

(実際. 超函数としては 2つの独立解がある)

$$f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{二次形式}$$

$$u = c \cdot f(x)^\lambda \quad \left(\begin{array}{l} \text{formal: symbolical} \therefore \text{考慮} \\ \text{これが満足する 方程式の解を考慮} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} (x_1 D_1 + \dots + x_n D_n - 2s) u = 0 \\ (x_i D_i - D_i x_j) u = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ 個}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{D}(x_1 D_1 + \dots - 2S) + \sum \mathcal{D}(x_j D_j - x_i D_i)$$

これは実際に involutory basis であることを示せ。
(実は高々一階の operator のときには

$$X_i X_j - X_j X_i = \delta_{ij} \quad \text{or} \quad X_i \text{ is a vector field}$$

$$\hat{\mathcal{F}} \subset \hat{\mathcal{O}}$$

$\hat{V}$ は 3つの既約成分からなる Lagrangean subman.
である. $= \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$

$$\Lambda_0 = \{(0, \eta); \eta \text{ 任意}\} = 0 \text{ の 写像}$$

$$\Lambda_1 = \{(x, \eta); f(x)=0, f(\eta)=0, x \parallel \eta\} \quad (\text{ただし } 0 \parallel \text{vector と解釈する})$$

$$\Lambda_2 = \{(x, 0); x \text{ 任意}\} = 0\text{-section}$$

$$P = P^{(m)} + P^{(m-1)} + \dots$$

$$Q = Q^{(2)} + Q^{(2-1)} + \dots$$

$$\sigma_{m+2-1}(PQ - QP) = ?$$

$$PQ = \underbrace{P^{(m)}(x, D) Q^{(2)}(x, D)} + P^{(m)}(x, D) Q^{(2-1)}(x, D) + \dots \\ + P^{(m-1)}(x, D) Q^{(2)}(x, D) + \dots$$

$$\sum a_\nu D^\nu (\sum b_\mu D^\mu) = \dots \quad \text{を計算しなさい.}$$

$$Dx = xD + 1$$

$$Df(x) = f(x)D + f'(x)$$

$$D^\nu f(x) = f(x)D^\nu + \frac{\nu}{1!} f'(x) D^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} f''(x) D^{\nu-2} + \dots$$

multi-index $1 \leq i \leq n$

$$D^\nu f(x) = f(x) D^\nu + \frac{1}{1!}$$

$$h(D) f(x) = f(x) h(D) + \frac{1}{1!} \sum \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h}{\partial D_j}(D) + \dots$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial D_i \partial D_j}(D) + \dots$$

$$= \sum \frac{1}{\nu!} D_i^\nu f(x) \cdot D^\nu h(D)$$

$$\sum_\nu a_\nu(x) D^\nu \cdot \sum_\mu b_\mu(x) D^\mu = \sum_{\nu, \mu} a_\nu(x) b_\mu(x) D^{\nu+\mu}$$

$$+ \frac{1}{1!} \sum a_\nu(x) \left(\sum \frac{\partial b_\mu}{\partial x_j} D^{\nu-e_j} \right) D^\mu$$

$\sigma_{n+1}(PQ - QP)$ には $0, 2 < n$ の 2 項だけである。

それは前半分が

$$\sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

となる。後半分も同様だから

$\{\varphi, \psi\}$ となる。

5月28日(火)

$P^*X, \Gamma S^*X$

◎ β の説明. (β は finite order)

$$\mathcal{D} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{D}^{(m)}$$

$$\beta = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \beta^{(m)}$$

$$\ni \sum_{|v| \leq m} a_v(x) D^v \quad (\text{一点を指定して } x = a \text{ germ})$$

$$T^*X - X \ni (x_0, \eta_0) \quad (\eta_0 \neq 0)$$

スカラー値に属する同値類を η_∞ と書く。

$$p_{(x_0, \eta_0, \infty)}^{(m)} \Rightarrow P(x, D) = \sum_{j=-\infty}^m p^{(j)}(x, D) = p^{(m)}(x, D) + p^{(m-1)}(x, D) + \dots$$

$p^{(j)}(x, D)$ は (x_0, η_0) の (j) に無関係なある近傍で定義された analytic function で η 変数に η_0 に対して j 次. i.e. $(\eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} + \dots + \eta_n \frac{\partial}{\partial \eta_n} - j) p^{(j)}(x, \eta) = 0$.

但し増大度に関する条件があって,

$$|j| / \frac{1}{\sqrt{|j|!}} |p^{(j)}(x, \eta)| \quad \text{が} \quad |j| \rightarrow \infty \quad \text{のとき}$$

ある近傍で 一樣に 有界.

これはかなり緩い条件である.

例えば (x_0, η_0) で $\eta_0 \neq 0$ としたとき,

$\frac{1}{\eta_1}$ は たしかに 正則である.

η_1^j は $\forall j \in \mathbb{Z}$ に対し 正則である (micro-local に!).

したがって 次のような operator も $\Psi DO p.$ である:
($\eta_1 \neq 0$ で well defined な)

$$\frac{1}{\eta_1} + \frac{1!}{\eta_1^2} + \frac{2!}{\eta_1^3} + \frac{3!}{\eta_1^4} + \dots \quad \text{つまり} \quad P(x, D) = D_1^{-1} + 1! D_1^{-2} + 2! D_1^{-3} + \dots$$

論理的には cohomology や kernel function の言葉で構成されているが, 実際に扱う場合には, micro-local に (つまり 各点の近傍で) 考えていることを忘れてはならない. これでも十分である.

$$\sqrt{D_1^2 + \dots + D_n^2} \\ = D_1 \sqrt{1 + \frac{D_2^2}{D_1^2} + \dots + \frac{D_n^2}{D_1^2}}$$

$\eta_{01}^2 + \dots + \eta_{0n}^2 \neq 0$ なる点の近傍で考える.

$(1, 0, \dots, 0)$ の近傍で well defined

抽象化のことについても少し話しておく。

$$\begin{array}{ccc} \text{contact mfd.} & \hat{Y}^{2n} & \hat{\omega} : \text{canonical 1-form} \\ & \downarrow & (d\hat{\omega} \text{ non deg.}) \\ GL(1) = \mathbb{C}^* & & \end{array}$$

$$df \leftrightarrow H_f$$

$$\{f, g\} = H_f(g) = -H_g(f)$$

包含的部分多様体

isotropic

Lagrangian

などを説明した

これらは $\forall$ contact mfd 上で考えられる。

と3が実は 適当に座標をとると

$$d\hat{\omega} = x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n$$

とかけることが分り、 U が $\mathbb{C}^*$ local には contact mfd は必ず T^*X と同型になることが分る。

$$\hat{\omega} = \eta_1 dx_1 + \dots + \eta_n dx_n$$

$$= \eta_1 d \frac{x_1 \eta_1 + \dots + x_n \eta_n}{\eta_1} - x_2 \eta_1 d \frac{\eta_2}{\eta_1} - \dots - x_n \eta_1 d \frac{\eta_n}{\eta_1}$$

座標をかえてもよい。上は一例で Legendre 変換 という。

座標変換 ... η 変数の任意関数の自由度

接触変換 ... $(2n-1)$ " "

ずっと広い。

$$i^* \hat{\omega} \neq 0$$

$$i: \hat{V}^{2n-k} \hookrightarrow \hat{Y}$$

特異点においては

involutory mfd は

$$\hat{V}^{2n-k} = \{ (x, \eta) \in \hat{Y} \mid \eta_1 = \dots = \eta_k = 0 \} \quad 0 \leq k < n$$

Σ (micro-local) かつ

$$i.e. \hat{J} = \hat{O} \eta_1 + \dots + \hat{O} \eta_k$$

$$\equiv \{ (x, \eta) \mid x_1 = 0, \dots, x_k = 0 \}$$

(接触変換に依り)
 $\Rightarrow$ 必ず $k=n$ ではない

isotropic になると

$$\hat{V}^k = \{ (x, \eta) \in \hat{Y} \mid \eta_1 = \dots = \eta_n = 0 \}$$

$k=n$ (Lagrangian)

$$\hat{V} = \{ (x, \eta) \in \hat{Y} \mid x_1 = 0, \dots, x_n = 0 \}$$

$$\eta_1 = \dots = \eta_k = 0, \quad x_{k+1} = \dots = x_n = 0 \quad (0 \leq k < n)$$

の形にしても可論である。

$\omega|_{V(x_0)} = 0$ なる点を degenerate pt という。

これは isotropic になる。(従って次元が小さい)

maximally degenerate

degenerate がちょうど n 次元 (従って Lagrangian) のとき

V の中では多様体としては non-singular で

あることが知られている (大島)。

$$\hat{\mathcal{O}} = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{O}^{(m)}$$

$\mathcal{O}^{(m)}$ は $\eta=1$ である m 次である
正則函数.

skew manifold.

$$\hat{\mathcal{O}} \quad \hat{\mathcal{Y}}^{2n}$$

$$\hat{\mathcal{O}}^{(0)} \quad \mathcal{Y}^{2n-1}$$

$\{ \hat{\omega} \}$ は $\hat{\omega}$ によって def される.

$$\mathcal{P} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}^{(m)}$$

filtration $\mathcal{P} \rightarrow$ 非可換な
ring of sheaf.

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{(j)} \cdot \mathcal{P}^{(k)} \subset \mathcal{P}^{(j+k)} \\ [\mathcal{P}^{(j)}, \mathcal{P}^{(k)}] \subset \mathcal{P}^{(j+k-1)} \end{cases}$$

$\mathcal{P}^{(0)}$: subring, $\mathcal{P}^{(-1)}$: subideal

$\mathcal{P}^{(0)} / \mathcal{P}^{(-1)}$: commutative

$$\mathcal{O}^{(0)}$$

$$\mathcal{P}^{(m)} / \mathcal{P}^{(m-1)} = \mathcal{O}^{(m)}$$

$$\mathcal{O}^{(j)} \cdot \mathcal{O}^{(k)} \subset \mathcal{O}^{(j+k)}$$

この $\mathcal{O}^{(m)}$ 乘法と compatible であるような
canonical な同型.

$$0 \rightarrow \mathcal{P}^{(m-1)} \rightarrow \mathcal{P}^{(m)} \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{O}^{(m)} \rightarrow 0$$

$\mathcal{P}^{(0)}$ - homomorphism.

$$P \in \mathcal{P}^{(j)}, Q \in \mathcal{P}^{(k)}$$

$$[P, Q] = PQ - QP \in \mathcal{P}^{(j+k-1)}$$

このとき

$$\sigma_{j+k-1}(PQ - QP) = \{ \sigma_j(P), \sigma_k(Q) \}$$

が仮定である.

$$\begin{array}{l} \text{更に} \\ \mathcal{O}^{(m)} \quad (x_0, \gamma_{00}) \in Y^{2n-1} \\ \downarrow \\ \sigma_m(P)(x_0, \gamma_0) \neq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists Q \in \mathcal{P}^{(m)}, \quad PQ = QP = 1$$

(i.e. P^{-1} 逆元 が 存在)

を仮定する (completion にあたる)
localization

$\mathcal{P}$ が与えられて いる べき 条件 を みたせば、そこから
contact structure が 導かれる。

考えたいのは commutation relation

$$[D_i, x_k] = \delta_{ik}$$

$$[x_i, x_j] = [D_i, D_j] = 0$$

をみたすように 非可換環 を 拡大した もの であるか
その 階 operator の 階数 というものを ちゃんと 定め
やる ことが 重要 (filtration)。

$$\mathcal{P}^{(1)} \rightarrow P_1, \dots, P_n$$

$$\mathcal{P}^{(0)} \rightarrow Q_1, \dots, Q_n$$

が generator が 存在し

$$[P_i, P_k] = [Q_j, Q_k] = 0$$

$$[P_i, Q_k] = \delta_{ik}$$

更に $\mathcal{P}^{(m)} \rightarrow F = \sum F^{(1)}(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$
とある意味で 函数 と かける。

階数を保つ変換.

Legendre tr.

$x_1, \dots, x_n, \eta_1, \dots, \eta_n$

$$x_1 \longleftrightarrow \frac{x_1 \eta_1 + \dots + x_n \eta_n}{\eta_1}$$

$$x_j \longleftrightarrow \eta_j / \eta_1$$

$$\eta_1 \longleftrightarrow \eta_1$$

$$\eta_j \longleftrightarrow -x_j \eta_1$$

(cf. Fourier 変換 $x_j \mapsto D_j$
 $D_j \mapsto -x_j$)

交換関係は 保存エネルギーが階数は
 保存エネルギー. non-local)

これを非可換化した (or 量子化した) もの.

$$x_1 \longleftrightarrow (x_1 D_1 + \dots + x_n D_n) D_1^{-1} + \dots \quad \eta_1 \neq 0$$

~~0 階~~ ~~-1 階以下~~

$$x_j \longleftrightarrow D_j D_1^{-1} + \dots$$

~~0 階~~

$$D_1 \longleftrightarrow D_1 + \dots$$

$$D_j \longleftrightarrow \textcircled{0} -x_j D_1 + \dots$$

これをとれば もとの可換な部分が 出てくる.

skew manifold としての 変換 を与える.

(上では 低階の項 をつけなくとも ちゃんと
 交換関係 が成立つ)

structure theorem for system of Ψ DE_g.

$$P_j(x, D)u = 0 \quad j=1, \dots, N$$

$$g = \mathcal{P} P_1 + \dots + \mathcal{P}_0 P_N$$

$$\hat{J} \subset \hat{G} \quad \hat{V} \subset T^*X$$

$$\hat{V} \text{ の 既約成分 } \hat{V}_i^{2n-k} \underset{(x_0, \eta_0)}{\circ} \quad \underline{0 \leq k < n.}$$

1) non-degenerate pt. z がある

2) ~~simple char. z がある~~ $\hat{J}$ が reduced ideal
(従って $\hat{V}_i$ の 定数 ideal)

このとき (x_0, η_0) z 方程式 が simple であるという。

$$\textcircled{1} \quad \hat{V}_i = \{(x, \eta) ; \eta_1 = 0, \dots, \eta_k = 0\}$$

$$\textcircled{2} \quad D_1 u = 0, \dots, D_k u = 0 \quad \text{partial de Rham system.}$$

(operator の 方 の 変換 だけ して)

$k=n$ のとき は 少々 違う。 (1) が 破れる)

既ち

$$P_j(x, D)u = 0, \quad (j=1, \dots, N)$$

が maximally overdetermined system であるとき

構造定理

仮定

$$g, \hat{V}_i = \hat{\Lambda}_i$$

$\hat{J}_i$ は (x_0, η_0) z reduced.

① (接触幾何の部分)

適当な正準座標系をとれば, micro-local に

$$\hat{\Lambda}_1 = \{ \eta_2 = 0, \dots, \eta_n = 0, x_1 = 0 \} \quad \dots \text{ } \eta_1 \neq 0 \text{ であることは注意.}$$

$$\text{or } \{ x_1 = 0, \dots, x_n = 0 \} \quad \text{とらえる.}$$

② (解析の部分)

$$D_2 u = 0, \dots, D_n u = 0, \quad (\overset{\text{0階}}{x_1 - c \cdot D_1^{-1}}) u = 0$$

$$(\overset{\text{0階}}{D_1} u = 0 \text{ とおいて (5) に})$$

or

$$(x_1 D_1 - \beta) u = 0, \quad x_2 u = 0, \dots, x_n u = 0.$$

に交換する。

(1) の書法は $u = c \cdot x_1^\alpha$ により定まる.)

$D_1^{-\alpha} \psi(x)$ のようなもの.

$$D_1^{-\alpha - \frac{1}{2}} x_1^{-\frac{1}{2}}$$

この α は u を fix する限り absolute invariant であることが示される.

定義. $-\alpha - \frac{1}{2} = \text{ord}_{\hat{\Lambda}_1} u.$

(2) の形では $-\beta - \frac{n}{2}$)

定理.

~~simple~~ simple の仮定のもとに,
方程式が同型 $\Leftrightarrow$ order が一致.

注意.

x_1^α は $x=0$ のところだけに興味がある.

① $e^{2\pi i \alpha} e^{2\pi i \alpha}$ 自身が α 自身 invariant

主定理 1 (S-K-K ~~p.420~~ p.420 Theorem 4.2.2
p.423 examples)

$\mathcal{L}$: 単一な極大過剰決定系
 $\hat{\Lambda}$ Lagrangean.

(1) 次のような $P \in \mathcal{L}^{(n)}$ が存在する:

$$d(\sigma_1(P)) = \omega \quad \text{on } \hat{\Lambda}$$

$$\text{i.e. } \equiv \omega \pmod{\hat{\mathcal{J}}}.$$

$\sigma_1(P)$ は $\pmod{\hat{\mathcal{J}}^2}$ で unique である.

(2) $\mathcal{L}$ の P は $P = P^{(n)} + P^{(n-1)} + \dots$ とかくとき

$$\text{ord}_{\hat{\Lambda}} u = \left[P^{(n)}(x, \eta) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 P^{(n)}(x, \eta)}{\partial x_j \partial \eta_j} \right] \Big|_{\hat{\Lambda}}$$

が成立する.

$$D_2 u = 0, \dots, D_n u = 0, \quad (x, D_1 - \alpha)u = 0 \quad \text{の場合}$$

$$P(x, D) = x, D_1 - \alpha \quad \text{と } u \text{ は } \mathcal{L} u.$$

$$\sigma_1(P) = x, \eta_1, \quad d(\sigma_1(P)) = x, d\eta_1 + \eta_1 dx_1$$

$$\hat{\mathcal{J}} = \text{ideal}(\eta_2, \dots, \eta_n, x_1) \quad \&$$

(η_1 invertible)

$$\hat{\Lambda} = \{(x, \eta) ; \eta_2 = \dots = \eta_n = 0, x_1 = 0\}$$

$$= \{(0, x_2, \dots, x_n, \eta_1, 0, \dots, 0)\}$$

$$\therefore d(\sigma_1(P)) \equiv \eta_1 dx_1$$

$$\omega = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2 + \dots \equiv \eta_1 dx_1$$

$$\text{だから} \quad d(\sigma_1(P)) \equiv \omega.$$

$= \alpha$ と

$$\text{order}_{\Lambda} u = \left[-\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) x, \eta \right]$$

$$= -\alpha - \frac{1}{2}$$

η の $\mathbb{R}^n$ のとき には どうなるか check せよ。

$$f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad n \geq 3 \quad \text{と して}$$

$$f(x)^2 = u$$

$$\begin{cases} (x_1 D_1 + \dots + x_n D_n - 2s) u = 0 \\ (x_i D_j - x_j D_i) u = 0 \end{cases}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$$

$$\Lambda_0 = \{(0, \dots, 0, \eta_1, \dots, \eta_n)\}$$

$$\Lambda_2 = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)\}$$

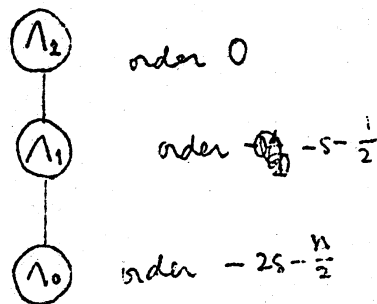
$$\Lambda_1 = \{(x, \eta) ; f(x) = f(\eta) = 0, x \neq \eta\}$$

$$\Lambda_0 \cap \Lambda_2 = \{0\} \quad \text{次元は 無視可能}$$

(codim 1 の $\mathbb{R}^n$ でのみか
162頁)

$$\Lambda_0 \cap \Lambda_1 = \{(0, \eta) ; f(\eta) = 0\} \quad \text{codim 1.}$$

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \{(x, 0) ; f(x) = 0\}$$



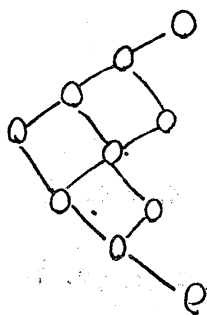
$f(x)=0$ の singularity invariant α によって計算できる。
b-数

$$X = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{長方形列}$$

のようなくと $\det tX = f(t)$ として $f(t)$ の Fourier 変換?

このような Fourier 変換は Zeta 函数などと関係し重要であるが、今迄複雑すぎて手につかなかった。

$$m=3, m=6$$



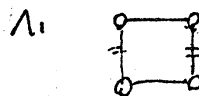
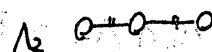
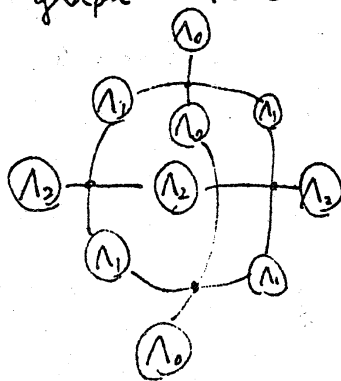
グラフと order を計算することによってしよう。

(real のときは real locus のつながり具合を調べることで少し複雑になる。)

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_n^2 \quad n \geq 3$$

の real graph はどうなるか?

はじめの例は real の場合。

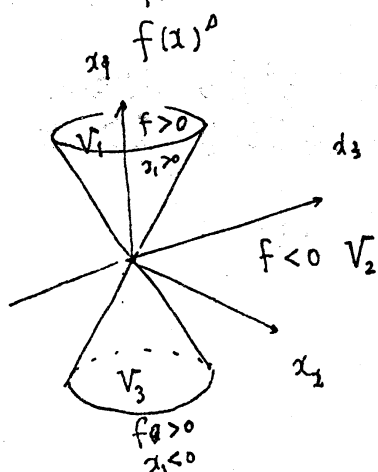


5月29日(水)

談話会 "新古典解析学へのお願い"

微積分の理念に立ち返って 具体的な計算問題のぞき
解析学をやりたい。

$$f(x) = x_1^2 - \dots - x_n^2 \quad n \geq 3$$



$$F_s^{(j)}(x) = \begin{cases} f(x)^{\Delta} & x \in V_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\operatorname{Re} \Delta > 0$ で連続. V_j 上
analytic

与えられた $\Delta \in \mathbb{C}$ について
緩増加な hyperfunction として
well defined.

$\Rightarrow$ Fourier 変換がある.

(具体的に計算できる)

$O(1, n-1)$ で不変な多項式

Epstein や Siegel の Zeta
基本解

などを調べるのに
基本的.

積分や評価に於て 函数空間的な
定理を証明するのが目的ではなくて 計算ができるようにしたい

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = J$$

$$f(X) = \det {}^t X J X$$

nm 変数 $2n$ 次多項式.

大きな不変性をもつ. $SL(m), O(1, n-1)$.

この程度になるともう今迄の方針では計算ができない.
これから述べる方法によって もっと複雑な場合にも
統一的なやり方で計算できる.

個々の問題に工夫をこらす必要はなくなる.

(cf. 微積分の基本定理
Cauchy の積分定理)

micro-local analysis

各点と co-direction とを specialize

$$u = c_1 F_s^{(1)} + c_2 F_s^{(2)} + c_3 F_s^{(3)}$$

$$\begin{cases} (x_1 D_1 + \cdots + x_n D_n - 2s) u = 0 \\ (x_i D_j - x_j D_i) u = 0 & i, j > 1 \\ (x_1 D_j + x_j D_1) u = 0 & j > 1 \end{cases}$$

方程式自身は F の符号や real coeff. であることは
必要ないのでも complex domain で大雑把にやると
real にうって細かい分岐状態を調べる.

特性多様体

$$P_j(x, D)u = 0$$

$$P_j^{(m)}(x, \eta) = 0$$

主表象

$$\begin{cases} x_1 \eta_1 + \dots + x_n \eta_n = 0 \\ x_i \eta_j - x_j \eta_i = 0 \\ x_1 \eta_i - x_i \eta_1 = 0 \end{cases}$$

1変形で考えて符号の区別はやめることにする。

$$\begin{cases} x_1 \eta_1 + \dots + x_n \eta_n = 0 \\ x_i \eta_j - x_j \eta_i = 0 \end{cases}$$

$$T^*X \supset \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$$

variety
Lagrangean manifold

ということになっている。

simple.

極大過剰決定系

(特性多様体が純 n 次元)

束縛条件が最も美しい方程式であって

偏微分方程式であるにもかかわらず任意函数と

合っている。

stratum に分ける:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_0$$

$$X_1 = X - S$$

$$X_2 = S - \{0\}$$

$$X_0 = \{0\}$$

$$\Lambda_0 = \{(0, \eta)\}$$

$$\Lambda_1 = \{(x, \eta); f(x) = f^*(\eta) = 0, x \parallel \eta\}$$

$$\Lambda_2 = \{(x, 0)\}$$

= zero section T_S^*X

conormal bundle

$$T_S^*X = \{x \in S, \eta \parallel \text{grad } f(x)\}$$

(x=0 は注意を要する。x≠0 の

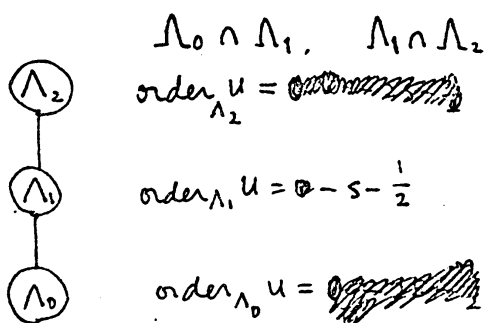
stratification

各 S の conormal bundle.

(の closure)

Λ のつながり具合が問題.

codim 1_Λ のとこが問題



(n-1)次元.

order なる不変量が
定義される.

micro-local には maximally overdetermined system は

$$(*) \begin{cases} (x_1 D_1 - \alpha) u = 0 \\ D_2 u = 0 \\ \vdots \\ D_n u = 0 \end{cases}$$

$$(x_1=0, \eta_2=0, \dots, \eta_n=0 \text{ 付近})$$

と変換する.

$$\text{ord}_\Lambda u = -\alpha - \frac{1}{2}$$

とする.

Λ_0 には

$$P(x, D) = x_1 D_1 + \dots + x_n D_n - 2s$$

$$P(x, D) = P_1 + P_0 + \dots$$

$$\sigma_1(P) = x_1 \eta_1 + \dots + x_n \eta_n$$

$$d\sigma_1(P) = x_1 d\eta_1 + \dots + \eta_1 dx_1 + \dots$$

$$\Lambda_0 \text{ 上 で } \equiv \eta_1 dx_1 + \dots$$

mod $(x_1, \dots, x_n)$
ideal

$$\underline{d\sigma_1(P)|_{\Lambda_0} = \omega|_{\Lambda_0} \text{ canonical 1-form}}$$

$$\underline{T_h}, \quad \text{ord}_\Lambda u = \left[P_0(x, \eta) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \eta_j} P_1(x, \eta) \right] \Big|_\Lambda$$

(*) のとき.

$$\Lambda = \{(x, \eta) ; x_1=0, \eta_2=0, \dots, \eta_n=0\} = T_{\{x_1=0\}}^* X \text{ conormal ball}$$

$$= \{(0, x_2, \dots, x_n, \eta_1, 0, \dots, 0) \}$$

のとき 1 は $\eta_1 < 0$ 1.

$$-\alpha - \frac{1}{2} \text{ が ord になる.}$$

$$\text{ord}_{\Lambda_0} u = -2s - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \eta_j} (x_1 \eta_1 + \dots + x_n \eta_n) \\ = -2s - \frac{n}{2}.$$

$\Lambda_2 \perp \bar{z}$ if $P=0$ とこれに等しい.

$\Lambda_1 \perp$

$$f(x)=0 \quad \text{e.g. } x=(1, i, 0, \dots, 0) \\ \text{grad } f \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} D_1 + \dots \quad \text{この operator は 0 ではない.$$

$$d\left(\frac{f}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \eta_1\right) = \eta_1 dx_1 + \sum_{j=2}^n \eta_j \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} dx_j + \frac{f}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} d\left(\frac{\eta_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}\right)$$

$$\eta \propto \text{grad } f \quad \text{だから} \quad \eta_j = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$$

$k \geq 2$

$$= \eta_1 dx_1 + \sum \eta_j dx_j = \omega.$$

$(x_1 D_1 + \dots + x_n D_n - 2s)$ と $(x_1 D_j - x_j D_1)$ は 0 ではない. $\Rightarrow$ この operator は 0 ではない.

$$\frac{x_j}{x_1} \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad \forall j \geq 2$$

$$(x_1 D_1 + \dots + x_n D_n - 2s) - \sum_{j=2}^n \frac{x_j}{x_1} (x_1 D_j - x_j D_1)$$

$$= \left(x_1 + \frac{x_2^2 + \dots + x_n^2}{x_1} D_1 - 2s\right)$$

$$\left(\frac{f(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} D_1 - s\right) u = 0.$$

$$k \geq 2. \quad \text{ord}_{\Lambda_1} u = -s - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \eta_j} \left(\frac{f(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \eta\right) \Big|_{\Lambda_1} = -s - \frac{1}{2}$$

一般には $\Psi D D_p$ が必要で $D_1^{-1}(x, D_2 + \dots$

などのような物を計算する。

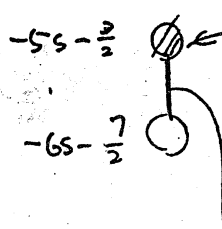
但し Leibniz rule で 掛算と微分を入れかえる。

$$D_1^{-1} x_1 \otimes = x_1 D_1^{-1} - D_1^{-2} \quad (x_1 \neq 0)$$

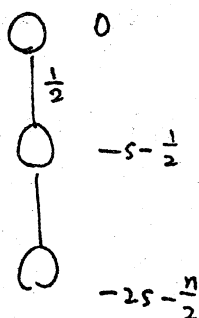
特別な λ の値に対しては $P \subseteq g' \subseteq g$ なる

g' が生じることがある。

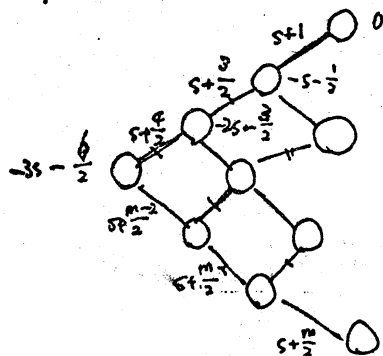
$$P/g \rightarrow P/g' \rightarrow 0.$$

$-5s - \frac{3}{2}$  $-6s - \frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ $s + \frac{5}{2}$

order の差が $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$ となる必要がある。



$f(X) = \det^b X X$ のときの graph $m \geq 2n$



$$m=3, m \geq 8$$

上から下まで T とするとき $1 \leq t \leq 3$ $s + \dots$ を全部掛けたら $b(s)$ になる。

$$b(s) = (s+1)(s+\frac{3}{2})(s+\frac{5}{2}) \times \dots$$

Fourier 変換.

$\begin{matrix} 1, n-1 & (n \geq 3) & 3 \\ 2 & n-2 & 2 \end{matrix}$

連結成分  $(n=2) \cdots 4.$



対称行列 a の $\det.$ $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元.

$$(n, 0) \quad (n-1, 1), \dots, (0, n)$$

$(n+1)$ の 連結成分

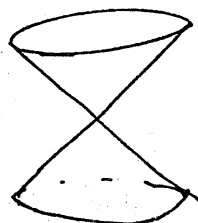
$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

repl locus ?

$\Lambda_2 = \text{zero section}$

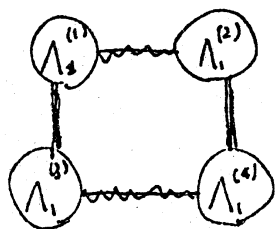
$$= \Lambda_2^{(1)} \cup \Lambda_2^{(2)} \cup \Lambda_2^{(3)}$$

厚さ 2 のみ 7 は 3 の 2 無視可.

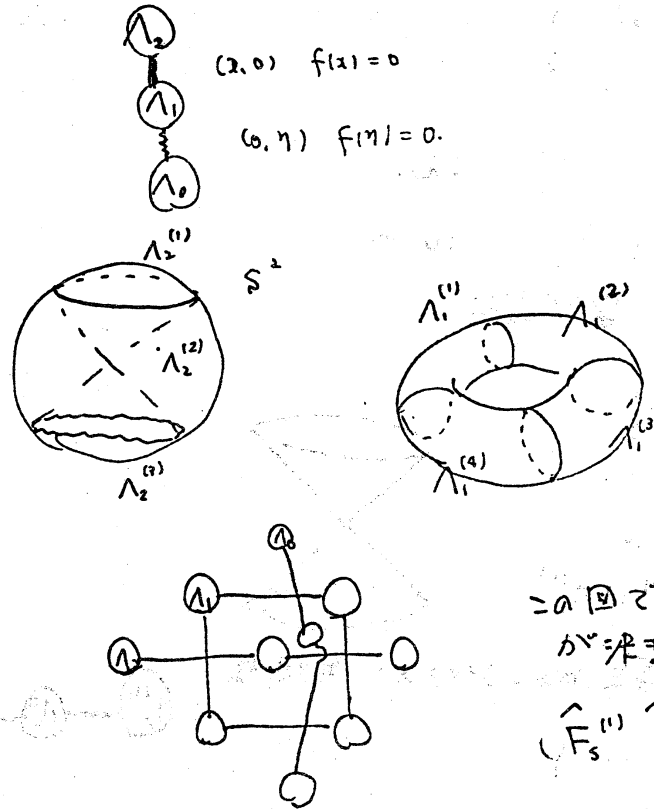


$$\Lambda_1 = \{(x, y), \dots\}$$

$$= \Lambda_1^{(1)} \cup \Lambda_1^{(2)} \cup \Lambda_1^{(3)} \cup \Lambda_1^{(4)}$$



次に $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ を結ぶ — を表す。



この図で $f(x)$ の Fourier 変換
が得られる。

$$(\hat{F}_s^{(1)} \hat{F}_s^{(2)} \hat{F}_s^{(3)})$$

$$= (F_s^{(1)} F_s^{(2)} F_s^{(3)}) \begin{pmatrix} * \end{pmatrix}$$

unitary 表現

~~物理~~

素粒子論

S 行列

Landau の singularity

などのこともこの立場でできらる。

5月30日(木)

主定理 1 Λ 上 単一な 極大過剰決定系 $\mathcal{J}$ に対し

1) $\exists P \in \mathcal{J}^{(1)}$

$$d\sigma(P) \equiv \omega \pmod{\mathcal{J}}$$

2) そのような P' に対して $P = P_1 + P_2 + \dots$

$$\text{ord}_{\Lambda} u = P_0(x, \eta) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_j \partial \eta_j}(x, \eta) \Big|_{\Lambda}$$

contact u により 相図が Λ 上 不変な表現で
あることが 計算により証明できる。

これが示すのは、構造定理により 標準形にして
しうば 2) が成立つことを σ に check した。

1) で言っていることは

$$\exists \zeta \in \mathcal{J}^{(1)} \text{ s.t. } d\zeta = \omega \pmod{\mathcal{J}} \text{ かつ } \zeta \pmod{\mathcal{J}^2} \text{ unique}$$

と同じである。(幾何学の部分)

証明を sketch するが, formal に簡単にできる。

$$\hat{\Lambda} = \{x_1=0, \dots, x_n=0\} \quad \omega = \eta_1 dx_1 + \dots + \eta_n dx_n$$

$$\zeta = \eta_1 x_1 + \dots + \eta_n x_n \in \mathcal{J}^{(1)}$$

$$\therefore d\zeta = \eta_1 dx_1 + \dots + x_1 d\eta_1 + \dots$$

$$\equiv \omega \pmod{\mathcal{J}}$$

$$\zeta_1, \zeta_2 \text{ が この条件を満たすと, } \zeta_1 - \zeta_2 \in \mathcal{J}^{(2)}, d\zeta' \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}}$$

~~$$\zeta' = \sum_{j=1}^n a_j(x, \eta) dx_j$$~~

$$\mathcal{J} \ni \zeta' = \sum_{j=1}^n a_j(x, \eta) dx_j \text{ とおけるが}$$

$$d\zeta' = \sum a_j dx_j + \sum_{j,k} x_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial a_j}{\partial \eta_k} d\eta_k$$

$$\equiv 0 \pmod{\mathcal{J}}$$

$$\Rightarrow a_j \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}} \Rightarrow \zeta' \equiv 0 \pmod{\mathcal{J}^2}$$

$S^{n-k} \subset X^n$ submfd. $\Rightarrow$ conormal bundle π^*
 $\hat{\Lambda} = T_S^* X$ Lagrangean mfd $\pi = \pi_3$.

$$S = \{x_1 = 0, \dots, x_k = 0\} \quad \text{if } \exists \text{ local coord. } \mathbb{R}^n \ni z.$$

$$\Lambda = \{(x, \eta) \in T^*X; \quad x_1 = 0, \dots, x_k = 0, \eta_{k+1} = 0, \dots, \eta_n = 0\}$$

$$= \{ (0, \dots, 0, \eta_{k+1}, \dots, 1_n, \eta_1, \dots, \eta_k, b, \dots, 0) \in T^*X \}$$

この場合 12 は $\zeta = \eta_1 x_1 + \dots + \eta_k x_k$ とおけばよいことが分る。

$$d\zeta = \eta_1 dx_1 + \dots + \eta_k dx_k + x_1 d\eta_1 + \dots + x_k d\eta_k$$

$$\equiv \eta_1 dx_1 + \dots + \eta_k dx_k$$

$$\equiv \omega \pmod{T}$$

Ｓがこう書けていぬいときにも便箋のように書き直しておこう。

$$\hat{\Lambda} = T_S^* X, \quad \text{codim } S = k$$

S の定義 ideal $\mathfrak{n}$ (local) basis $\mathfrak{z}$ $f_1(x), \dots, f_k(x)$ とす。

二九七

$$\Phi = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{array}} \right\} n$$

(df₁, ..., df_k 独立)

rank Φ = k

$$\text{rank } \overline{\Phi} = k$$

$$\exists A \quad (k \times n) \text{ - 行列}. \quad A \overline{\Phi} = 1_k.$$

$$A\overline{\Phi} = 1_k.$$

2 B

$$B\bar{\Phi} = 0$$

B17

~~$(\psi_1, \dots, \psi_n) \Phi = 0$~~

の解 vector を並べたもの (独立)

i.e. $B'A = 0 \Rightarrow B' = C^T B^{-1} C.$

ニルル

$$(\Phi A - I_n) \bar{\Phi} = 0.$$

$$\therefore \Phi A - 1_n = {}^B C \cdot B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}_{\text{non-degenerate}} \cdot \begin{pmatrix} \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\zeta = \sum_{i,v} a_{i,v}(x) f_i(x) \eta_v$$

ととれはふ。
 $\therefore d\zeta \equiv \sum a_{i,v} \eta_v \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} dx_\mu \pmod{\hat{J}_A}$

$$\hat{J} = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$$

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \{ (x, \eta) \in T^*X; \quad x \in S \text{ \& } \eta \in C_1 df_1 + \dots + C_k df_k \} \\ &= \sum_{i,j} C_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} dx_\mu \\ \text{i.e. } \eta_v &= \sum_i C_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v} \\ \Leftrightarrow \sum b_{j,v}(x) \eta_v &= 0 \end{aligned}$$

$$\hat{J} \supset \langle f_1, \dots, f_k, \sum b_{j,v}(x) \eta_v \rangle$$

$$d\zeta \equiv \omega \in \pi^*LT = \omega_0$$

$$\sum_{i,v} a_{i,v}(x) \eta_v \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \equiv \eta_\mu \pmod{\hat{J}}$$

$$\text{i.e. } \sum_v \sum_i (a_{i,v} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} - \delta_{v\mu}) \eta_v \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma = 3 \text{ かつ } \Sigma \text{ は } (A-1) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} &= 0 \text{ とおける,} \\ \Phi A - 1 = (B, B \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}) &= 0 \text{ となるから OK. } \end{aligned}$$

$$g \ni P(x, D) = P_1 + P_0 + \dots$$

$$P_i(x, \eta) = \sum_{i,v} a_{i,v}(x) f_i(x) \eta_v, \quad \sum \frac{\partial}{\partial x_\mu} P_i(x, \eta) = \sum \frac{\partial}{\partial x_\mu} (a_{i,v} f_i)$$

$$P(x, D) = \sum_{i,v} a_{i,v}(x) f_i(x) D_v + P_0(x, D) + \dots \equiv \sum a_{i,v}(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_v} \pmod{J}$$

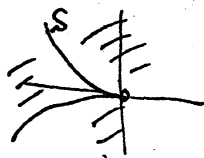
$$\therefore \text{ord}_A u = P_0(x, \eta) - \frac{1}{2} \text{tr } A \Phi$$

例1. $f(x) = x_1^3 + x_2^2$, $u = (f(x))^0$ weighted homogeneous poly.
 $\mathcal{I} = \{ P \in \mathcal{P} : Pu = 0 \}$ a base
 $\mathcal{I} = \left\{ \begin{aligned} &(\frac{1}{3}x_1 D_1 + \frac{1}{2}x_2 D_2 - \frac{1}{2})u = 0 \quad \dots \text{(Euler id.)} \\ &(\frac{1}{2}x_1^2 D_2 - \frac{1}{3}x_2 D_1)u = 0 \quad \dots (\frac{\partial f}{\partial x_1} D_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} D_2)u = 0 \end{aligned} \right.$

Λ の定義方程式は

$$\frac{1}{3}x_1\eta_1 + \frac{1}{2}x_2\eta_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1^2\eta_2 - \frac{1}{3}x_2\eta_1 = 0$$



stratify

$$\Lambda_2 = X \times \{0\} = T_X^* X$$

$$\Lambda_1 = T_S^* X$$

$$\Lambda_0 = T_{\{0\}}^* X = \{0\} \times \mathbb{C}^2$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2.$$

$$\Rightarrow \Lambda_0, \Lambda_2 \subset \Lambda \text{ は明らか.}$$

$$T_S^* X = \{(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) : x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$\eta_1 \parallel df(x) \}$$

$$\eta_1, \eta_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$= 3x_1^2 : 2x_2.$$

$$x_1(\frac{1}{2}\eta_2)^2 + (\frac{1}{3}\eta_1)^2 = 0.$$

$\Lambda_j \in$ simple $\eta_j = \sum \eta_j^i dx^i$.

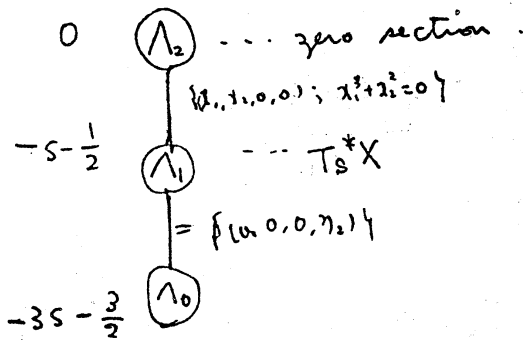
$$\Lambda_2 \cap \Lambda_0 = \{0\}$$

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \{(x_1, x_2, 0, 0) : f(x) = 0\}$$

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_0 = \{(0, 0, \eta_1, \eta_2)\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\sum \eta_j^i dx^i \\ &(\text{codim } 1.) \end{aligned} \right\}$$

次に order の計算.



1172 $-s - \frac{1}{2}$.

(non-singular な所を考慮して $f(x)^5$ は x_1^5 と書ける)

$$\zeta_1 = \frac{f(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \eta_1$$

Λ_0 の計算.

$$P(x, D) = 3 \times \left(\frac{1}{3} x_1 D_1 + \frac{1}{2} x_2 D_2 - s \right) + \frac{3}{2} D_1^{-1} D_2 \left(\frac{1}{2} x_1^2 D_1 - \frac{1}{3} x_2 D_1 \right)$$

D_1^{-1} invertible
 $\in \mathcal{F}^{(1)}$

$$\begin{aligned} P_1(x, \eta) &= 3 \left(\frac{1}{3} x_1 \eta_1 + \frac{1}{2} x_2 \eta_2 \right) + \frac{3}{2} \eta_1^{-1} \eta_2 \left(\frac{1}{2} x_1^2 \eta_2 - \frac{1}{3} x_2 \eta_1 \right) \\ &= x_1 \eta_1 + \frac{3}{2} x_2 \eta_2 + \frac{3}{4} x_1^2 \eta_1^{-1} \eta_2^2 - \frac{1}{2} x_2 \eta_2 \\ &= \underbrace{x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2}_{\zeta} + \frac{3}{4} x_1^2 \eta_2^2 \eta_1^{-1} \end{aligned}$$

原素の fibre ζ 上

$$\zeta = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2$$

ととくれば ζ 上では $\eta_1 = 1$

だから

で計算する。

P_0 を計算する。

$$P = x_1 D_1 + x_2 D_2 + \frac{3}{4} D_1^{-1} x_1^2 D_2^2 - \frac{1}{2} - 3s$$

$$x_1^2 D_1^{-1} + \frac{2x_1}{1!} (-D_1^{-2}) + -2 D_1^{-3}$$

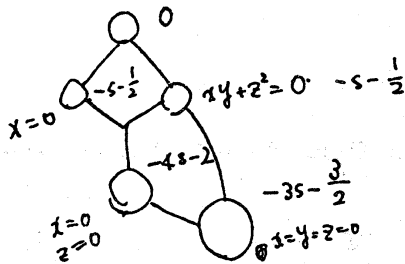
(Leibnitz)

generic なものは graph は簡単で multiplicity が決まる。

特殊なものは graph は複雑になるが simple になる。

multiplicity のときはまだあまり研究していない。

$$f(x, y, z) = x^2 y + x z^2 = x(x y + z^2)$$



(Yano)

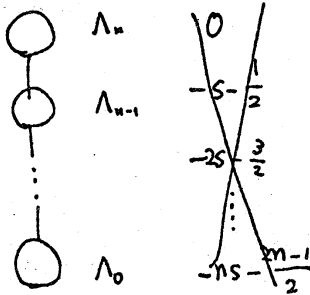
134. $f(x) = \det \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$

n^2 変数 n 次多項式

$$u = cf(x)^A$$

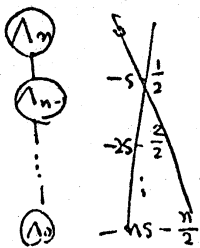
$$V^{n^2} = V_n \cup V_{n-1} \cup \dots \cup V_0$$

↑ rank n a matrix $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



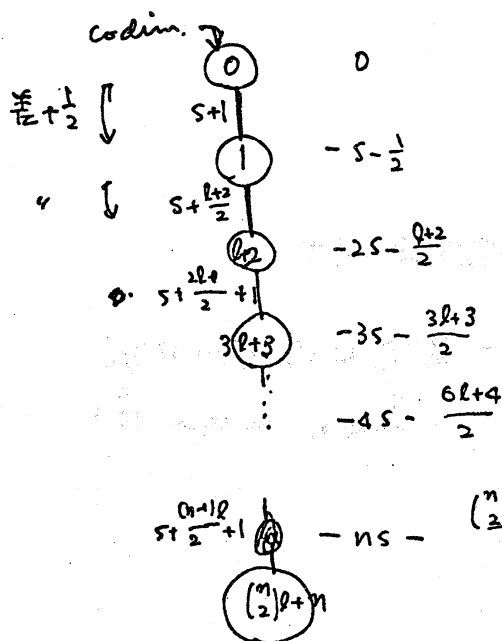
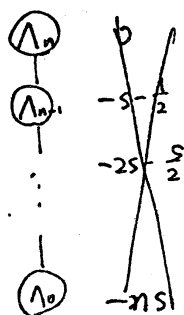
134. $f(x) = \det (n \times n \text{ 対称行列})$

$\frac{n(n-1)}{2}$ 変数 n 次式



$$Pf(2n \times 2n \text{ 歪対称行列}) = f(s) = (\det \quad)^{\frac{1}{2}}$$

$n(2n+)$ 変数 n 次多項式



$\Rightarrow$ type of example.

$l=1 \dots n$ 次対称行列

$l=2 \dots$ 正対称行列

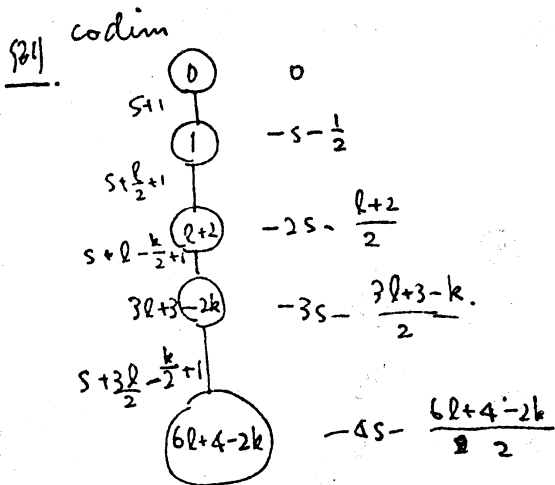
$l=4 \dots 2n$ 次歪対称行列の Pf.

$l=8, n \leq 3 \dots$ Cayley alg. 上の Hermite 行列

$$s + \frac{(n-1)l}{2} + 1 \quad -ns - \frac{\binom{n}{2}l + n}{2}$$

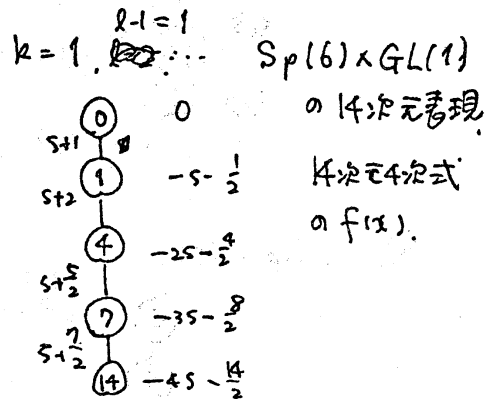
$\Rightarrow$ と $b(s) = \prod_{v=0}^{n-1} (s + \frac{vl}{2} + 1)$ と $l \in \mathbb{Z}$

“b 函数” が計算できる。



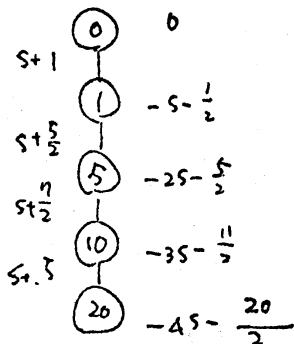
可能な order は 降られてしまう。
(例えば 最初の 2 つは いずれも
決まってしまうのであった)

$k \neq 0$ の example.



$k=1, l=2 \dots GL(6)$

$\Lambda^3(V(6))$ 20 次元
4 次式 $f(x)$.



$k=1, l=4$

$Spin(12) \times GL(1)$

32 次元 4 次式
半 2 C 表現

$k=1, l=8$

$E_7 \times GL(1)$

56 次元表現

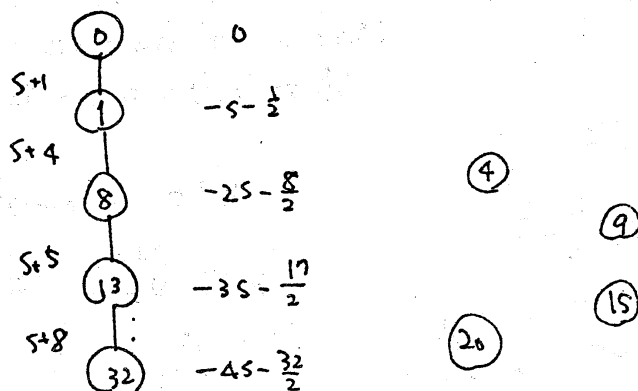
56 表数 4 次式

$k=4, l=6$

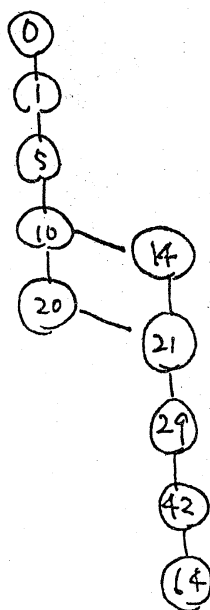
$Spin(10) \times GL(2)$

32 次元 4 次式

2aと3は 孤立した Lagrangean mfd が $2 \leq 3$.

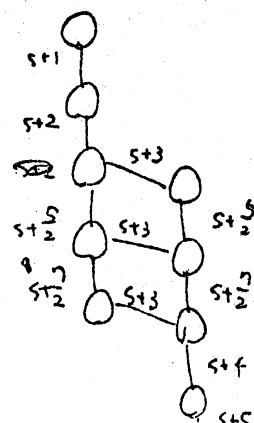


例 $Spin(14)$ 64次元 8次式



$GL(7)$

35変数 7次式



5月31日(金)

(Fourier 変換のことは ちびちびとやり終えていないので今回は省略)

multiplicity のある場合には order の差を考慮しただけでは足りなくなる。

また、これは こういう方法論でどこまでできるかという方が重要と思う。

unitary 表現論, 素粒子論: その他 まだまだ応用の途があるのではないか。

具体的な函数を支配するものが 極大過剰決定系であり
方程式を調べればよい という program の具体化

order に $2 < \alpha < \frac{1}{2}$ の説明。

$$u = c x_1^\alpha$$

$$(x_1 D_1 - \alpha) u = 0$$

$$\Lambda = \{ (0, x_2, \dots, x_n, \eta, 0, \dots, 0) \}$$

$$ad_\Lambda u = -\alpha - \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{\alpha!} \text{ ととれば } u_\alpha = \frac{1}{\alpha!} x^\alpha$$

$$u_\alpha = D^{-\nu} u_{\alpha-\nu} \text{ とかける。}$$

$$x_1 = z \text{ に対し } \nu = \frac{1}{2} \alpha \text{ とすると}$$

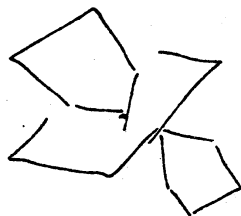
$$u_\alpha = D^{-\alpha-\frac{1}{2}} u_{\frac{1}{2}}$$

Stirling の公式 $\frac{1}{\alpha!} \sim \alpha^{-\alpha-\frac{1}{2}} e^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + \frac{0}{\alpha} + \frac{0}{\alpha^2} + \dots)$
を思い出す。

$\frac{0}{\alpha^n}$ の係数は $\sim n!$

operator としては 2 の程度 でも収束し、 $(1 + \dots)$ は invertible operator.

codim 1 の交わりが重要である理由.



~~dim~~ dim が小さいとき.

$$\mathcal{P}u = \mathcal{P}/g, \quad u \equiv 1 \pmod{g}$$

$$P_j u = 0$$

$$g = g_1 \wedge g_2, \quad \mathcal{P}/g = \mathcal{P}/g_1 \oplus \mathcal{P}/g_2$$

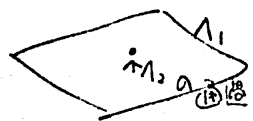
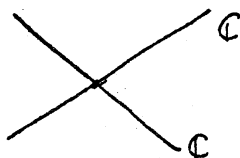
となることを言っている.

つまり方程式としては別々のものを並べたにすぎない.

codim 1 のときには交わりから構造をもう.

直観的にもむもであって,

$$X = \mathbb{C}, \quad T^*X = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \supset \Lambda = \mathbb{C}$$



$$\pi_1(\mathbb{C} - pt) \neq 0$$

$$\text{しかし } \mathbb{C}^2 - pt.$$

には影響がない.

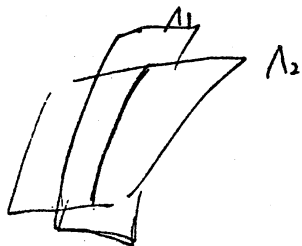
実は Λ_1 と Λ_2 が交わるということも $\epsilon = 2$ は g があまり小さくならないことを確認しなければいけない.

グラフと Fourier 変換の関係.

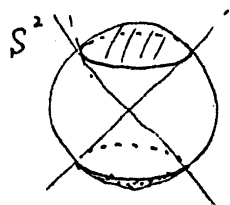
$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

complex

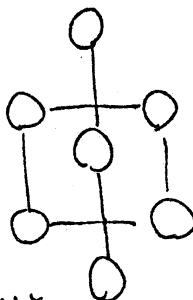
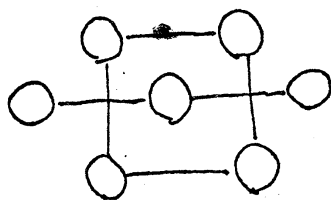
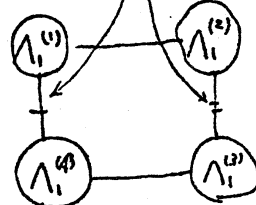
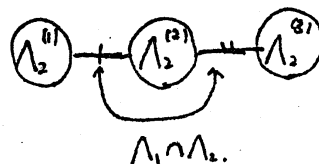
$$\begin{array}{l} \Lambda_2 \quad 0 \quad \{(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 0)\} \\ \leftarrow s+1 \quad \{(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 0); f(x)=0\} \\ \Lambda_1 \quad -s - \frac{1}{2} \quad \{(x_1, x_2, x_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3); x \neq \eta, f(x)=0\} \\ \leftarrow s + \frac{3}{2} \\ \Lambda_0 \quad -2s - \frac{3}{2} \quad \{(0, 0, 0; \eta_1, \eta_2, \eta_3)\} \end{array}$$



$\Lambda_2 - \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ は complex なら connected.
 しかし real だと、それは codim 1 のものをひくと
 components が一般に $2 \leq 3$.



3つの成分



実は「向きづけ」をは、主) 1 世代と
 1 の 4 世代の ambiguity が $2 \leq 3$.

Maslov index

$$\begin{cases} (\chi_1 D_1 + \chi_2 D_2 + \chi_3 D_3 - 2S) u = 0 \\ (\chi_1 D_2 + \chi_2 D_1) u = 0 \\ (\chi_1 D_3 + \chi_3 D_1) u = 0 \\ (\chi_2 D_3 - \chi_3 D_2) u = 0 \end{cases}$$

real な解を考へる. ($\beta \neq 0$) $\Rightarrow$ hyperfn とみるのは natural

$F_s^{(1)}, F_s^{(2)}, F_s^{(3)}$

増え DO hyperfn.

$s \neq$ negative integer なら well defined hyperfn.
Fourier 変換 を考えたい.

$$F_{-s-\frac{1}{2}}^{(1)}(y), \dots$$

の一次結合になる. この const. の決定が, 複雑な多項式だと
今は出来なかった.

Fourier 変換に 未来方向 に support があるとは?

$$SSU \subset \Lambda = \Lambda_0 \vee \Lambda_1 \vee \Lambda_2$$

$$F_s^{(j)} \text{ の特徴 } \dots \quad \underbrace{SSU \oplus \Lambda_2 \subset \Lambda_2^{(j)}} \text{ なる sol.}$$

このとき const. は あいまい であるが, maximally
overdetermined system においては const. を
決め normalizing する方法がある.

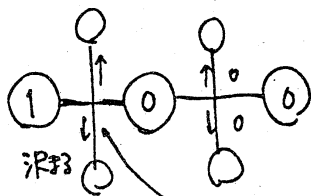
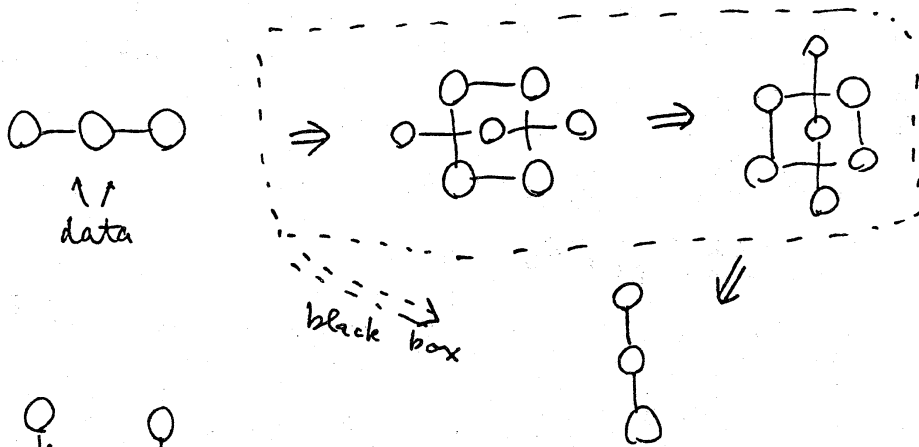
Fourier 変換 (た)方は

$$F_{-s-\frac{1}{2}}^{(j)} \cdot \dots \quad \underbrace{SSU \cap \Lambda_0 \subset \Lambda_0^{(j)}}$$

solution の空間 $\mathcal{S}$ は 3次元 vector space.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathbb{C}u^{(1)} \oplus \mathbb{C}u^{(2)} \oplus \mathbb{C}u^{(3)} \\ &= \mathbb{C}v^{(1)} \oplus \mathbb{C}v^{(2)} \oplus \mathbb{C}v^{(3)} \end{aligned}$$

basis の決め方は singular spectrum と, もう一つの
normalization によって basis の変換の matrix が
まちまち になる.



(generic pt. では 1次元)

交わり) の果ては sol. の次元は 2次元.

この matrix は

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i \alpha} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

order の差が 2 になる.

とかける

一種の波の伝播 のようなものである.

Lagrangian mfd の codim 1 の交わりにおける
伝播現象 とは black box の構造が分る.

途中に 2 になるのは microfn.

prehomogeneous vector space の話.

G : 連結複素線型代数群

G V に線型変換として作用. S proper alg. set

$V-S$ が G に对する homog. space.

G 1) 完全可約表現 とする.

$V \ni x_0$ $G \cdot x_0$: Zariski open dense subset

G_{x_0} : isotropy grp. $G \cdot x_0 = G/G_{x_0} = V-S$

2) G_{x_0} の表現も又 完全可約 とする.

このとき 松島の Th. を使えば $G \cdot x_0$ が affine になる.
 言い換えると S は purely 1-dimensional になる.

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_{k_2}$$

$$\begin{array}{ccc} & | & | \\ & f_1=0 & f_{k_2}=0 \end{array}$$

$$f_i(gx) = \chi_i(g) f_i(x) \quad \text{と成り ことが分る.}$$

χ_i : 一次指標

$\chi_1, \dots, \chi_{k_2}$ が 一次(乗法的)独立 である ことが分る.

$f_1, \dots, f_{k_2}$ が 代数独立 になる ことが分る.

また $(\det_V g)^2 = \chi_1(g)^{\varepsilon_1} \dots \chi_{k_2}(g)^{\varepsilon_{k_2}}$ と unique に
 かける。 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k_2}$ は integer > 0 .

例

$$GL(1) \times SO(n) \xrightarrow{\text{action}} V(n)$$

isotropy $SO(n-1)$.

このとき $f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ とする。

real form Σ は

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 \quad . q = n - p$$

$$GL^+(1, \mathbb{R}) \times SO(p, q) \hookrightarrow V(n, \mathbb{R})$$

$(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$ など。

これに対応するものを Siegel の indefinite q form の Zeta fn.

例. $G = GL(n),$
□

$$S^2(V(n)) = V\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)$$

n -次対称行列 と $\mathbb{C}$ の作用。

$$p(q) \chi = g \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & & & \\ & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{nn} \end{pmatrix}^t g$$

Young diagram については

H. Weyl

第 4 章 p. 201 ~ 299.

□	$V(n)$	n	□	$V(n)$	n
□□	$S^2(V(n))$	$\frac{n(n+1)}{2}$	□□	$\Lambda^2(V(n))$	$\frac{n(n-1)}{2}$
□□□	$S^3(V(n))$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$	□□□	$\Lambda^3(V(n))$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$
⋮			⋮		

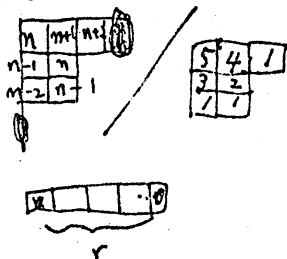
anti. sym.



symmetrization



次元.



$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n-1)(n-2)(n-1)}{5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$\frac{n(n+1) \dots (n+r)}{r \cdot (r-1) \dots 1} = \frac{n(n+1) \dots (n+r)}{r!}$$

訂正. 左右入れ替え.

$$X = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n+1} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

(お2の見た)

ただし $p_{-1} = p_{-2} = \dots = 0$
 $p_0 = 1$

と約束する。

$$X_0 = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & \dots & p_1 \\ p_{n-2} & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & & & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} n & = & l_1 \\ n-2 & = & l_2 \\ \vdots & & \\ 2 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \end{matrix}$$

$$= p_1.$$

計算に役に立つ 公式 だから覚えておくよ。

$$G = GL(n) \quad \square$$

$$V = S^2(V(n)) = \{n \text{ 対称行列全体}\}$$

$$S = \{x \in V; \det x = 0\}$$

$$S_v = \{x \in V; \text{rank } x = v\}$$

$$\overline{S_v}^{\text{Zariski closure}} = \bigcup_{\mu=0}^v S_\mu$$

$$V = S_n \cup S_{n-1} \cup \dots \cup S_0$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{S}$

$$A_0 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}$$

かゝる対称性.

$$\Leftrightarrow {}^t A_1 = -A_1 \text{ 及 } A_3 = 0.$$

$$\therefore \mathfrak{g}_{x^{(u)}} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \widetilde{A_2} \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}^v; {}^t A_1 = -A_1 \right\}$$

($\dim S_v$ の計算もこれで行ければよ.)

$$\begin{aligned} \dim S_v &= \dim G/G_{x^{(u)}} \\ &= n^2 - \dim \mathfrak{g}_{x^{(u)}} \\ &= n^2 - \left((n-v)n + \frac{1}{2}v(v-1) \right) \end{aligned}$$

(G, ρ, V) f : rel. inv.

$$S_v \ni x^{(u)}$$

$$\parallel \\ \mathfrak{g}_{x^{(u)}}$$

$$= \mathfrak{g} \cdot x^{(u)}$$

$$T_{x^{(u)}} S_v \hookrightarrow T_{x^{(u)}} V (= V)$$

$$V_{x^{(u)}} = T_{x^{(u)}} V / T_{x^{(u)}} S_v \text{ は normal vector sp. といふ.}$$

$$V^*_{x^{(u)}} \text{ は conormal sp. といふ.}$$

$$\{ y \in V^*; y \perp \mathfrak{g} \cdot x^{(u)} \}$$

$$\parallel \\ \mathfrak{g} \cdot x^{(u)} \perp \text{ in } V^*$$

$$\begin{array}{ccc}
 V \times V^* & & V^* \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \Lambda_V \supset V_{x^{(v)}}^* & \text{(fibre of } V_{x^{(v)}}^*) & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V \supset S_V & \rightarrow & x^{(v)}
 \end{array}$$

$G_{x^{(v)}}$ は $V_{x^{(v)}}^*$ に作用している。
 二つの $\mathfrak{sl}_2$ prehom. と作用する。
 (殆どどの場合には成立するか)

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{X} & GL(1) \\
 \uparrow & \nearrow & \\
 G_{x^{(v)}} & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \exists f_{x^{(v)}}^*(y) & \text{rel. inv.} \\
 \exists \tilde{f}_{x^{(v)}}^*(y) & \left(\begin{array}{l} \longleftrightarrow X|_{\cdot} \\ \xleftrightarrow{G_{x^{(v)}}} \end{array} \right) \longleftrightarrow (\det V_{x^{(v)}}^*)^2
 \end{array}$$

このとき Λ_V が simple であることが
 証明できる。 ($u = f^*$ に対して)

$$\begin{aligned}
 \text{ord}_{\Lambda_V} u &= -(\deg f_{x^{(v)}}^*) \cdot s - \frac{1}{2} (\deg \tilde{f}_{x^{(v)}}^*) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{codim } S_V \\
 &\quad \left(\parallel \frac{\dim V_{x^{(v)}}^*}{\dim V_{x^{(v)}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \text{ord} = -(\text{integer}) s - \frac{(\text{integer})}{2}$$

であることが分る。

Proof

$$\deg f_{x^{(v)}}^* = (n-v)$$

$$(\mathfrak{g}_{x^{(v)}} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ であることを示す。}$$

$$\langle x, y \rangle = \text{tr}(x \cdot y)$$

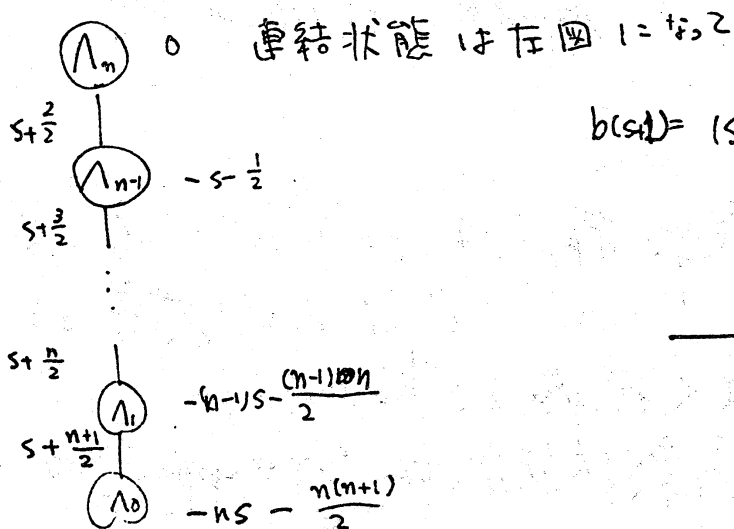
$$V_{x^{(v)}}^* = (\mathfrak{g}_{x^{(v)}})^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_{n-v} \end{pmatrix} \right\} \quad \leftarrow \text{対角形。}$$

$$f_{x^{(v)}}^* = \det y_{n-v} \quad \text{と示す。}$$

$$\# \Gamma. \deg \tilde{f}^* = 2 \times \frac{1}{2} (n-v)(n-v+1)$$

結論として

$$\text{ord}_{\Lambda_v} u = -(n-v)s - \frac{(n-v)(n-v+1)}{2}$$



$$b(s) = (s+1)(s+\frac{3}{2}) \cdots (s+\frac{n+1}{2})$$