

6. ボーズ流体における相転移と Scaling law

茨大理 菅 野 正 吉

1. はじめに

Widom¹⁾ - Kadanoff²⁾ の scaling law は、弱い磁場内の Ising model から求められたものである。ボーズ流体は Matsubara-Matsuda³⁾ によって示されたように、easy plane を持つ強い磁場内のスピン系に対応している。従って、Widom - Kadanoff の scaling law が、そのままボーズ流体の相転移に適用できるかどうかは明らかでない。

最近、Migdal⁴⁾ がグリーン関数の方法によって粒子分布 n_p ($= \langle a_p^+ a_p \rangle$) に対し、 λ 点の近くで scaling law が成り立つこと、即ち

$|p| \lesssim p_0$ (characteristic momentum) に対して、

$$n_p = r_c^{2-\eta} g(r_c p) \quad (1)$$

の形に表わせることを示した。ただし $r_c \sim \epsilon^{-\nu}$ ($\epsilon = |\mu - \mu_c|$) は correlation length である。そして、 $C_p \sim \epsilon^{-\alpha}$ とおくと、 $3\nu = 2 - \alpha$ が成り立つことを示した。しかし、彼の得た結果には矛盾があり、その結論が正しいかどうかは分らない。

ここでは n_p に対して、scaling law が成り立つ、即ち(1)を仮定したとき熱力学量の critical exponents の間にはどのような関係が成り立つか調べる。さらに、これとは別に、 λ 点において $n_p \sim 1/p^{2-\eta}$ ようになるとしたとき、相転移はどのようなになるか、Landau のフェルミ流体の理論⁵⁾ と同じような方法によって考察する。

2. Scaling law

a) normal phase : λ 点で n_p が存在するためには、 $x \rightarrow \infty$ で $g(x) \sim x^{-(2-\eta)}$ でなければならぬ。従って、 $r_c^{-1} \lesssim p < p_0$ に対して、

$$n_p^{-1} \sim p^{2-\eta} + C r_c^{-(2-\eta)} (r_c p)^s, \quad p < 2-\eta, \quad C: \text{定数} \quad (2)$$

ように書ける。これから

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \sum_p \frac{\partial n_p}{\partial \mu} \sim \frac{1}{\epsilon} \sum_{p \lesssim p_0} n_p^2 r_c^{-(2-\eta)} (r_c p)^s$$

$$\sim \begin{cases} \epsilon^{-1} r_c^{(1+\eta)} & 1-2\eta \geq s \text{ のとき} \\ \epsilon^{-1} r_c^{2-\eta-s} & 1-2\eta < s \text{ のとき} \end{cases}$$

λ -点 近くでは, $c_p \sim \partial N / \partial \mu$ であることに注意して $c_p \sim \epsilon^{-\alpha}$ とおくと, 上から

$$(1+\eta)\nu \geq 1-\alpha \quad (3)$$

等式は, $1-2\eta \geq s$ のとき成り立つ。 n_p に対する scaling law の仮定にもかかわらず, (3) のような不等式になるのは運動量と同じ次元を持つものに r_c^{-1} の他に p_0 があることによる。[このことについては, 鈴木増雄氏から weak scaling の考え方と関係があるとの御指摘があった。] Migdal は(2)における s の値を求めているが, その値を用いて, C_p を計算すると彼の結論とは違ったものになる。

- b) Condensed phase: grand potential Ω を μ と N_0 (condensation density) の関数と考える。 N_0 の平均値は Ω の minimum 即ち $\partial \Omega / \partial N_0 = 0$ から求まる。この条件から,

$$0 = d(\partial \Omega / \partial N_0) = (\partial^2 \Omega / \partial N_0^2) dN_0 + (\partial^2 \Omega / \partial \mu \partial N) d\mu$$

$$\equiv r(0) dN_0 - \alpha(0) d\mu$$

λ -transition であることと安定性から

$$\frac{\partial N_0}{\partial \mu} \geq 0, r(0) \geq 0 \quad \therefore \alpha(0) \geq 0 \quad (4)$$

仮定から

$$r(0)N_0 \sim \alpha(0)\epsilon \sim r_c^{-(2-\eta)\nu} \quad (5)$$

なぜなら, N_p を p を含む cell Δp^3 にある粒子の個数と, Ω を N_p の関数と考えれば, N_p の平均値は

$$0 = \partial \Omega / \partial N_p \cong -g_p / N_p + \varphi(p), \quad g_p = V \Delta p^3 / (2\pi)^3$$

から求まる。ただし, 右辺の第1項はエントロピーの第2項は $E - \mu N$ の N_p による微分からくる。ここで $p \rightarrow 0$, $g_p \rightarrow 1$ 極限を考えれば $\partial \Omega / \partial N_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \varphi(p)$

となる。 $\partial \Omega / \partial N_0 \sim r(0) N_0 - \alpha(0) \epsilon$, $\varphi(p) \sim p^{2-\eta}$ に注意すれば(5)が得られる。

さて

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{N_0} + \left(\frac{\partial N}{\partial N_0} \right)_{\mu} \left(\frac{\partial N_0}{\partial \mu} \right)$$

$\partial N / \partial N_0 = \alpha(0) \geq 0$ に注意すれば, 上式の各項は正である。従って

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} \geq \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{N_0}, \quad \frac{\partial N}{\partial \mu} \geq \alpha(0) \left(\frac{\partial N_0}{\partial \mu} \right) \quad (6)$$

Critical exponents を次のように定義する。

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} \sim \epsilon^{-\alpha'}, \quad \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{N_0} \sim \epsilon^{-\alpha}, \quad N_0 \sim \epsilon^{2\beta}$$

(3)を求めたときと同じようにして $(1+\eta)\nu \geq 1-\alpha$ を得る。これと(5), (6)から

$$(1+\eta)\nu \geq 1-\alpha' \quad (7)$$

$$2\beta + (2-\eta)\nu \geq 2-\alpha' \quad (8)$$

$r' = (2-\eta)\nu$ とおくと(8)は Rushbrooke⁶⁾ によって求められた関係

$r' + 2\beta \geq 2 - \alpha'$ に形式的に一致する。

(1)式の仮定は condensed phase においては N_0 を独立変数とみなしたとき,

$n_p \sim \epsilon^{-(2-\eta)\nu} g(\epsilon^{-\nu} p, N_0/\epsilon^{2\beta})$ と書けることを意味している。

そうすると, Ω は次のように書けることが示される。

$$\Omega \sim \epsilon^{2-\alpha} + \epsilon^{2\beta+(2-\eta)\nu} F(N_0/\epsilon^{2\beta}) \quad (9)$$

ここに, $F(0)=0$ であり, $F(N_0/\epsilon^{2\beta})$ は, $N_0 \sim \epsilon^{2\beta}$ のとき最小になる。

(1)式の仮定からだけでは, $2-\alpha=2\beta+(2-\eta)\nu$ を結論することはできない。

Rippard^{7), 2)} と同じような議論によって

$$2\beta = (1+\eta)\nu$$

を得る。それは, ある点のまわり(体積 r^3)で fluctuation によって $N_0=0$

になったとすると, Ω は $r^3 \epsilon^{2\beta+(2-\eta)\nu} |F(1)|$ だけ大きくなる。これから

$r_c^3 \epsilon^{2\beta+(2-\eta)\nu} \sim kT_c$ となり, (10)を得る。

ボーズ流体における相転移と Scaling law
 もしも、 $1 \geq 2\beta$, $\alpha' = 0$ を仮定すると、(7)と(8)から $1 = 2\beta = (1+\eta)\nu$,
 $\eta \leq 1/2$ でなければならない。

3. 比 熱

Partition function $Z = \sum \langle \{n_p\} | e^{-\beta H} | \{n_p\} \rangle$ ($| \{n_p\} \rangle$: 粒子分布によって指定される free state) への最大寄与を考えることにより、自由エネルギーは $\{n_p\}$ の functional と考えることができる。即ち、 $F = E\{n_p\} - TS\{n_p\}$ のように表わされる。(その際、 p -space を cell に分ける等の工夫がいる)
 n_p の平均値は、自由エネルギーの minimum から求まる。

$$n_p = 1 / \{ \exp \{ \beta (\delta E / \delta n_p - \mu) \} - 1 \}$$

Bose condensation は $\mu = \delta E / \delta n_0$ のとき起る。

$$d(\delta E / \delta n_p - \mu) = -\alpha(p) d\mu + r(p) dN_0 \quad (11)$$

とおくと、 $\delta E / \delta n_p$ は、 $\{n_k\}$ の functional であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \alpha(p) + \sum f(p, k) \chi_k \alpha(k) &= 1 \\ r(p) + \sum f(p, k) \chi_k r(k) &= f(p, 0) \\ f(p, k) &= \delta^2 E / \delta n_p \delta n_k, \quad \chi_p \cong n_p^2 \end{aligned} \quad (12)$$

(11) で $p=0$ とおいたものから、 $\partial N_0 / \partial \mu = \alpha(0) / r(0)$ を得る。 $f(p, k)$ はフェルミ流体の理論における Landau f -function に相当するものである。

フェルミ流体では $|P| \cong p_F$ 近くだけを考えればよかったが、ボーズ流体においては $|P| \lesssim p_0$ のものを全部考えなければならない。

λ -点で、 $n_p \sim 1/p^{2-\eta}$ を仮定すると、Ladder 近似で、 $f(p, k) \sim |p+k|^{1-2\eta}$ となることが示される。これを用いて、(12)式の両辺に χ_p や $\chi_p f(0, p)$ をかけて、 p について積分したりすることにより、 $0 < \eta < \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum \chi_p \alpha(p) &\sim \sum \chi_p f(0, p) \sim \log(1/\epsilon) \\ \alpha(0) &\sim r_c^{2\eta-1} (\log \epsilon)^2, \quad r(0) \sim r_c^{2\eta-1}, \quad r_c \sim \epsilon^{-1/(1+\eta)} \end{aligned}$$

を得る。 $\eta = 1/2$ のときは、上の式で $\log(1/\epsilon)$, $r_c^{2\eta-1}$ をそれぞれ

菅野正吉

$\log(\log \epsilon)$, $\log(1/\epsilon)$ におきかえればよい。 $\partial N / \partial \mu \sim \sum \chi_p \alpha(p)$

及び $\partial N_0 / \partial \mu = \alpha(0) / r(0)$ に注意すれば

$$C_p \sim \begin{cases} \log(1/\epsilon) \\ \log(\log(1/\epsilon)) \end{cases}, \quad N_0 \sim \begin{cases} \epsilon(\log(1/\epsilon))^2 \\ \epsilon(\log(\log(1/\epsilon)))^2 \end{cases}$$

ただし、下段の式は $\eta = 1/2$ ものである。Critical exponents で書くと、

$1 = 2\beta = (1+\eta)\nu$ となる。 N_0 の fluctuation は

$$\langle \Delta N_0^2 \rangle \sim r(0)^{-1} \sim \epsilon^{-(1-2\eta)/(1+\eta)}$$

(or $\log(1/\epsilon)$, $\eta = 1/2$ のとき)

となり、これは density fluctuation $\partial N / \partial \mu$ よりずっと大きい。

References

- 1) B.Widom, J.Chem.Phys. 43 (1965) 3898, 3892
- 2) L.P.Kadanoff, Physics 2 (1966) 263
- 3) T.Matsubara and H.Matsuda, Prog.Theor.Phys. 16 (1956) 569
- 4) A.A.Migdal, Soviet Phys.JETP 28 (1969) 1036
- 5) L.D.Landau, Soviet Phys.JETP 3 (1956) 920
- 6) G.S.Rushbrooke, J.Chem.Phys. 39 (1963) 842
- 7) A.B.Pippard, Proc. Roy. Soc. London A216 (1953) 547