

モノイダル変換の逆問題について

京大 数理研 中野茂男

§1. Introduction

2次変換・モノイダル変換は、代数幾何学や多変数函数論（解析空間の理論）において、*modification*の最も基本的な例として、古くから著明なものである。今この論文で必要な場合について復習しておく。

X は n 次元複素多様体、 M はその一つの部分多様体で次元は m 、余次元 $r=n-m$ は2以上であるとする。（本論では、別に断らぬ限り、多様体とはパラコンパクトで連結なものを意味することにする。）座標近傍 U_j, U_k による X の被覆 $\{U_j, U_k\}$ を、つぎのようにとる：

$U_k \cap M = \emptyset$, $U_j \cap M \neq \emptyset$ で、 U_j での局所座標系 $(z_j^1, \dots, z_j^m, y_j^1, \dots, y_j^r)$ は、 $(y_j^1, \dots, y_j^r)$ が U_j の各点で M のイデアルを生成する。（ j, k ともある範囲で変る。）

今、一つの U_j に注目し、添字 j を略して書くことにする。 $r-1$ 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^{r-1}$ をとり、一組の斉次座標 $(\eta^1 : \dots : \eta^r)$ をとる。直積 $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ 内で

$$W = \{(p, \eta) \in U \times \mathbb{P} \mid (y^1(p) : \dots : y^r(p)) = (\eta^1 : \dots : \eta^r)\}$$

を考えると, W は $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ の部分多様体で, 射影 $U \times \mathbb{P} \rightarrow U$ の W への制限 π は W から U への正則な写像であり, $S = \pi^{-1}(M \cap U)$ は $\cong (M \cap U) \times \mathbb{P}$ 従って W 内で余次元 1, $\pi: W - S \rightarrow U - (M \cap U)$ は双正則同型対応である。 $U - (M \cap U)$ から $\mathbb{P}$ への正則写像 $p \rightarrow (y^1(p): \dots: y^r(p))$ のグラフを W' とすれば, W は $U \times \mathbb{P}$ における W' の閉包でもある。

以上の構成を各 U_i について行う。 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ であるときは, 対応する W_i と W_j とは $U_i \cap U_j$ の上に来る部分どうしうまくつながることがわかる。 $U_i \cap U_j \cap M$ の上に来る部分すなわち S_i と S_j との, つながるところが問題であるが, $(y_i^1, \dots, y_i^r)$ と $(y_j^1, \dots, y_j^r)$ とがともに $U_i \cap U_j$ の各点で M の定義イデアルを生成することから, $y_i^\alpha = \sum a_{\beta}^{\alpha} y_j^{\beta}$ (a_{β}^{α} は $U_i \cap U_j$ で正則) という関係があることを利用して, これが証明できる。 a_{β}^{α} は一意的に定まる訳ではないが, a_{β}^{α} の M 上への制限は一意的に定まり, $(a_{\beta}^{\alpha} | S) = A_{ij}$ は X における M の normal bundle の transition function をなしている。

このようにして W_j や $W'_k (= U'_k)$ が貼り合わされて,

一つの複素多様体 $\tilde{X}$ ができ、 $\tilde{X}$ から X 上への正則な写像 π ができる。 S_i はつながって余次元 1 の部分多様体 S をなすが、上に述べたことから、 $\pi: S \rightarrow M$ は射影空間 $\mathbb{P}^{r-1}$ をファイバーとする解析的なファイバー・バンドルをなし、それは *normal bundle* を“射影化”したもの（*normal bundle* のファイバー $\cong \mathbb{C}^r$ における線型座標を、斉次座標と考えるもの）に他ならないことが、わかる。 π が $\tilde{X}-S$ と $X-M$ との間では双正則同型であることも当然である。この $\tilde{X}$ を、 M を中心とする X のモノイダル変換（像）というのであった。（ M が一点の場合が 2 次変換である。）

モノイダル変換に現れる S は特異な位置にある。 $\tilde{X}$ の因子 S の定める複素直線バンドル $[S]$ を、 $\pi: S \rightarrow M$ における任意のファイバー $L_a = \pi^{-1}(a)$ ($\cong \mathbb{P}^{r-1}$, $a \in M$) に制限すると、 $\mathbb{P}^{r-1}$ の超平面 e の定める複素直線バンドルの逆 $[e]^{-1}$ となる。 $\mathbb{P}^{r-1}$ が $\mathbb{P}^r$ 内の超平面として存在するとき、 $[\mathbb{P}^{r-1}]$ の $\mathbb{P}^{r-1}$ への制限は $[e]$ になっていることを考えると、 L_a は云わば逆向きになって $\tilde{X}$ に含まれているという感じである。逆に

IPMT 複素多様体 $\tilde{X}^n, S^{n-1}, M^m$ が与えられ, S は $\tilde{X}$ の部分多様体であり, また M を $\text{base } \mathbb{P}^{r-1}$ を ファイバー
(とする) バンドルの構造をもっており, その各ファイバー $L_\alpha (\alpha \in M)$ に対して $[S]_{L_\alpha} = [e]^{-1}$ が成り立つとする. ($[S]_{L_\alpha}$ は $[S]$ の L_α への制限.) このとき M を含む複素多様体 X^n があって, $\tilde{X}$ は M を中心とする X のモノイダル変換となっているであろうか?

代数幾何学ではこのことは *Castelnuovo* の定理として知られているが, 近代的な意味での証明があるとは云えない. $M = \text{一点}$, $S = \mathbb{P}^{n-1}$ のときは, $\tilde{X}$ が射影空間内の代数的多様体の場合小平によって肯定的に解かれ, その後小平, *Grauert*, *Mumford* などによる研究がある. $m > 0$ のとき *Moishezon*, *Lascu* による研究などがあるが, 本稿では一般的な条件のもとにこの問題がとけることを示す. すなわち

主定理 IPMT は肯定的にとける.

§2. 証明のプログラム

主定理の証明はつぎの三段階から成る:

定理 1. V は複素多様体で, その上に実数値 C^∞ -函数 Ψ と複素直線バンドル B とがあって, つぎの条件が満たれるとする:

(a) Ψ は多重劣調和である. すなわち V の任意の点に対しその近傍での正則局所座標系 $x^1, \dots, x^n$ をとるとき

$$(2.1) \quad \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial \bar{x}^k} \right) \geq 0 \quad (\text{半正定値}).$$

(b) 任意の実数 A に対し, $\{p \mid \Psi(p) \leq A\}$ は空であるかコンパクトである.

(c) V の canonical bundle を K で表わすとき, $K \otimes B$ は negative である, すなわち $K \otimes B$ が V の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ に関して transition function の系 $\{e_{\alpha\beta}\}$ で定義されているとし, U_α における正值 C^∞ -函数 a_α があって,

$$(2.2) \quad \begin{cases} U_\alpha \cap U_\beta \text{ で} & a_\alpha / a_\beta = |e_{\alpha\beta}|^2, \\ U_\alpha \text{ の各点で} & \left(\frac{\partial^2 \log a_\alpha}{\partial x^i \partial \bar{x}^k} \right) < 0 \end{cases}$$

がなりたつ。

この場合には $H^q(V, \mathcal{O}(B^{-1})) = 0$ ($q = 1, 2, \dots, n-1$) がなりたつ。

定理 2. $\tilde{X}, S, M$ が IPMT の条件をみたすときは, M の各点 a に対し, ($S \rightarrow M$ における) その上のファイバー L_a の, $\tilde{X}$ における近傍 V があって, $S \rightarrow M$ のファイバー L_b に対して $V \cap L_b \neq \emptyset$ ならば必ず $L_b \subset V$ であり, この V と $B = [S]_V^k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) とに対し定理 1 の条件がなりたつ。

補足. IPMT の条件 $[S]_{L_a} = [e]^{-1}$ を, $[S]_{L_a} = [e]^{-k_0}$ ($k_0 \geq 1$) でおきかえても, 定理 2 の結果は同じようになりたつ。

以上二つの定理 (二つの段階) ができたとすれば, 主定理の証明はやさしい。 M の任意の点 a に対し, L_a の開近傍 ($\tilde{X}$ における近傍) V で, 定理 2 の条件をみたすものとする。 $S \cap V$ は $D \times \mathbb{P}^{r-1}$ と双正則同型であると考えて

よい。ここに D は $\mathbb{C}^m$ における原点の近傍である。(D は M における a の近傍で, D における座標 $\zeta^1, \dots, \zeta^m$ は M 上の局所座標だと考えてもよい。) $[S]_{S \cap V} = [e]^{-1}$ であることは容易にわかる。ここに右辺の $[e]$ は $\mathbb{P}^{r-1}$ 上のそれを, 射影 $D \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ によって $D \times \mathbb{P} \cong S \cap V$ 上にひきもどしたものを表わす。

定理 1. を $k=1, 2, g=1$ に対して適用すると, 層の完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}([S]^{-1}) \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_{V \cap S} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}([S]^{-2}) \rightarrow \mathcal{O}([S]^{-1}) \rightarrow \mathcal{O}_{V \cap S}([S]_S^{-1}) \rightarrow 0$$

から, 定義域の制限で定められる写像

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_V) \rightarrow \Gamma(V \cap S, \mathcal{O}_{V \cap S}),$$

$$\Gamma(V, \mathcal{O}([S]^{-1})) \rightarrow \Gamma(V \cap S, \mathcal{O}([e]))$$

が全射であることが, わかる。それ故つぎのようにできる:

V 上の正則関数 $z^1, \dots, z^m$ があって $z^i|_S = \zeta^i$,

V 上での $[S]^{-1}$ の正則切断^面 $f^1, \dots, f^r$ があって, それらの $S \cap V$ への制限が $\mathbb{P}^r$ の斉次座標 $\eta^1, \dots, \eta^r$ に対応する。

後の方で述べたことの具体的内容は次のとおりである。
 $V = \bigcup_{\lambda} V'_{\lambda}$ と開集合で覆い、各の V'_{λ} で S の局所方程式
 が $y_{\lambda} = 0$ で与えられるとする。 $e_{\lambda\mu} = y_{\lambda}/y_{\mu}$ は $[S]$ の
transition function を与える。(V を小さくとり直すこ
 とは差支えないので、) $V'_{\lambda} \cap S = D \times U'_{\lambda}$ の形であり、 P の
 の被覆 $\{U'_{\lambda}\}$ は $\{U_{\alpha}\}_{\alpha=1, \dots, r}$, $U_{\alpha} = \{\eta^{\alpha} \neq 0\}$ の細分
 になっていると考えてよい。細分関係を定める写像 $\lambda \rightarrow$
 $\alpha = \tau(\lambda)$ ($U'_{\lambda} \subset U_{\alpha}$) をきめておく。さらに $e_{\lambda\mu}|_S$
 $= \eta^{\tau(\mu)}/\eta^{\tau(\lambda)}$ となっていると考えてよい。この状態
 の下に切断面 f^{α} は $\{f^{\alpha}_{\lambda}\}$ ($V'_{\lambda} \cap V'_{\mu}$ では $f^{\alpha}_{\lambda} = e_{\lambda\mu}^{-1} f^{\alpha}_{\mu}$)
 と表わされる訳だが、その $S \cap V$ への制限が η^{α} に対応
 するとは、

$$f^{\alpha}_{\lambda}|_S = \eta^{\alpha}/\eta^{\tau(\lambda)}$$

がなりたつという意味である。

さて $y_{\lambda} f^{\alpha}_{\lambda} = y_{\mu} f^{\alpha}_{\mu}$ だから、これは V 全体での正則函
 数を与える。これをまた f^{α} で表わす。 f^{α} は S 上で 0
 になる。今 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ をとり、その座
 標を $(Z^1, \dots, Z^m, Y^1, \dots, Y^r)$ とする。 $Y^1 = \dots = Y^r = 0$ で定
 義される $\mathbb{C}^m$ を中心とする $\mathbb{C}^n$ のモノイダル変換 $\tilde{C}$ を考

え, V から $\tilde{\mathbb{C}}$ 内への写像重をつぎのように定める:

$$V \ni p \rightarrow \Phi(p) = ((z^1(p), \dots, z^m(p), f^1(p), \dots, f^r(p)), (f^1(p), \dots, f^r(p)))$$

上に見てきた考察, とくに S 上では $f^\alpha : f^\beta = \eta^\alpha : \eta^\beta$ となっていることから, 重 a は L_a の各点で正則な写像で, (n 次元の) ヤコビアンが 0 にならず, L_a を $(0) \times \mathbb{P}^{r-1}$ の上に双正則に写すことがわかる。従って L_a の近傍 W , $\mathbb{C}^m$ における 0 の近傍 Δ が存在して, 重は W を Δ のモノイダル変換 $\mathcal{Z}$ (変換の中心は $\Gamma = \Delta \cap \mathbb{C}^m$) に, 双正則に写像する。言いかえれば W はモノイダル変換である。

M の点 a ごとに上のような W を作ると, それらの全体が $\tilde{X}$ における S の近傍をなすこと, 対応する Δ や Γ がうまくつながって複素多様体 X' とその一部分多様体 ($\cong M$) をなすことは, 容易にわかる。これで主定理の証明ができた。

§3. 定理 1 の略証

層係数コホモロジーに関する Serre の双対定理によって, $H^q(V, \mathcal{O}(B^{-1})) = 0$ を示すには $H_K^{n-q}(V, \Omega^n(B)) = 0$ を

示せばよい。ここに H_K は *compact support* のコホモロジー群を示す。 $\Omega^n(B) = \mathcal{O}(K \otimes B) = \mathcal{O}(B')$ ($K \otimes B$ を B' とおいた) であることと *de Rham* の定理 (*Dolbeault* の定理) とから, つぎの命題 SV が云えればよい。 B' -valued で型 (p, q) かつコンパクトな台をもつ C^∞ 微分型式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{D}^{p,q}(B')$ で表わす, 特に $\mathcal{D}^{0,q}$ を $\mathcal{D}^q$ で表わすとき

命題 SV. $\varphi \in \mathcal{D}^q(B'), \bar{\partial}\varphi = 0, 1 \leq q \leq n-1$ ならば, $\exists \psi \in \mathcal{D}^{q-1}(B')$ で $\varphi = \bar{\partial}\psi$.

この命題を証明するために調和微分式の理論を使い, 特に *Andreotti-Vesentini* による *Carleman estimate* の方法を使う。まづ V に complete なエルミット計量を入れる。一般的な場合にこれは可能であるが, 特に目下の場合は complete なケーラー計量を入れることができる。それはオーに (2.2) を見ると

$$(3.1) \quad d\sigma^2 = - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \log a_\alpha}{\partial x^j \partial \bar{x}^k} (dx^j, d\bar{x}^k)$$

がケーラー計量を与えている。さらにこの a_α を $e^{-\mu(\psi)} \cdot a_\alpha$

でおきかえると, 実数値 C^∞ -函数 $\mu(\tau)$ が $\mu(\tau) \geq 0$, $\mu'(\tau) \geq 0$, $\mu''(\tau) \geq 0$, $\int_0^\infty \sqrt{\mu''(\tau)} d\tau = \infty$ を満すようにとってある限り, 新らしい a_α に対して (2.2) は成り立ち, (3.1) は complete になることが, 示される。

そこで以下 $\{a_\alpha\}$ はこのようにとってあるものとする。つぎに B' のファイバー上におけるエルミット計量を導入する。すなわち U_α における正值 C^∞ -函数 b_α で,

$$(3.2) \quad U_\alpha \cap U_\beta \text{ で } b_\alpha / b_\beta = |e_{\alpha\beta}|^2$$

を満すものを考える。(上の $\{a_\alpha\}$ はこんな計量の一例だが, 我々はファイバー上の計量としては別のものをも考えねばならない。) (3.1), (3.2) を使うと, $\mathcal{D}^{p,q}(B') \ni \varphi, \psi$

(φ は組 $\{\varphi_\alpha\}$ で, φ_α は U_α で型 (p, q) の C^∞ -微分式, $U_\alpha \cap U_\beta$ では $\varphi_\alpha = e_{\alpha\beta} \cdot \varphi_\beta$) に対して内積

$$(3.3) \quad (\varphi, \psi) = \int_V \frac{1}{b_\alpha} \varphi_\alpha \wedge * \bar{\psi}_\alpha$$

を定めることができる。さらに

$$(3.4) \quad \begin{cases} \rho_\alpha = -\partial \log b_\alpha \\ \chi = \sqrt{-1} \bar{\partial} \rho_\alpha = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log b_\alpha \end{cases}$$

によって, B' における (metric) connection とその曲率形式とを導入し,

$$(3.5) \quad \begin{cases} D = D' + \bar{\partial}, \\ \mathcal{D}^{p,q}(B') \ni \varphi = \{\varphi_\alpha\} \mapsto D\varphi = \{\partial\varphi_\alpha + \rho_\alpha \wedge \varphi_\alpha\} \\ \mapsto \bar{\partial}\varphi = \{\bar{\partial}\varphi_\alpha\} \end{cases}$$

によって共変(外)微分を導^入する。内積(3.3)に関する D' , $\bar{\partial}$ の同伴作用素はそれぞれ

$$(3.6) \quad \delta' = - * \bar{\partial} * , \quad \mathcal{J} = - * D' *$$

である。これらの用意をした上で Laplace-Beltrami 作用素を定義する,

$$\square = \bar{\partial} \mathcal{J} + \mathcal{J} \bar{\partial}.$$

$\mathcal{D}^{p,q}(B')$ に2種のノルムを考える:

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi),$$

$$n(\varphi)^2 = (\varphi, \varphi) + (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\varphi) + (\mathcal{J}\varphi, \mathcal{J}\varphi).$$

この両者に関する $\mathcal{D}^{p,q}(B')$ の完備化をそれぞれ $\mathcal{L}^{p,q}(B')$, $W^{p,q}(B')$ で表わす。 V の計量の Completeness を基礎として、つぎの事実が証明される。(Andreotti-Vesentini [1] より.)

補題1. $W^{p,q}(B') = \{\varphi \in \mathcal{L}^{p,q}(B') \mid \bar{\partial}\varphi \in \mathcal{L}^{p,q+1}(B'), \mathcal{J}\varphi \in \mathcal{L}^{p,q+1}(B')\}.$

と考えてよい。ここに $\bar{\partial}\varphi, \mathcal{J}\varphi$ は distribution の意味で

考える.

補題2. φ が $\mathcal{L}^{p,q}(B')$ の元でかつ C^∞ であり, $\square\varphi \in \mathcal{L}^{p,q}(B')$ ならば, $\varphi \in W^{p,q}(B')$ である. 特に $\square\varphi = 0$ ならば $\bar{\partial}\varphi = 0$, $\partial\varphi = 0$ である.

補題3. 正の定数 c があって, $\mathcal{D}^{p,q}(B')$ の任意の φ に対し

$$(3.7) \quad (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\varphi) + (\partial\varphi, \partial\varphi) \geq c(\varphi, \varphi)$$

がなりたつならば, $\forall \alpha \in \mathcal{L}^{p,q}(B')$ に対し唯一つの $x \in W^{p,q}(B')$ があって, $\square x = \alpha$ がなりたつ.

補題4. 上の補題3の場合, α が C^∞ で $\bar{\partial}\alpha = 0$ をみたせば, $\beta = \partial x$ は $\bar{\partial}\beta = \alpha$, $\partial\beta = 0$ をみたす (唯一つの) C^∞ 微分式 $\in \mathcal{L}^{p,q-1}(B')$ である. このとき

$$(3.8) \quad (\beta, \beta) \leq 4/c (\alpha, \alpha)$$

がなりたつ.

(3.8) の証明には, (これもやはり計量の *Completeness*

からえられる) Stampacchia の不等式というのが使われること, 補題 3 のように α に x を対応させる写像は Green の作用素とよばれ, G で表わされることをつけ加えておく。

以上に言ってきた一般論は, 複素直線バンドルが *negative* であるということを直接使わずに言えることである。これからさき, B' が *negative* で, (3.2) にいう $\{b\alpha\}$ として V の complete Kähler metric (3.1) を与える $\{a\alpha\}$ をとりうることを, 利用する。こうとてあると曲率形式 x はケーラー計量の基本形式の (-1) 倍にほかならない, 従って

$$e(x) = -L$$

となる。ケーラー計量に関する公式

$$L\delta' - \delta'L = \sqrt{-1} \bar{\partial}, \quad \Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda = -\sqrt{-1} \delta'$$

(これらは line bundle valued の微分式に対しても使える) を使って

$$\begin{aligned} e(x)\Lambda - \Lambda e(x) &= \sqrt{-1} \{(D'\bar{\partial} + \bar{\partial}D')\Lambda - \Lambda(D'\bar{\partial} + \bar{\partial}D')\} \\ &= (\bar{\partial}\delta' + \delta'\bar{\partial}) - (D'\delta' + \delta'D') \end{aligned}$$

がえられる。それ故

$$(3.9) \quad \square = (\wedge L - L \wedge) + *^{-1} \square *$$

q 次の微分式 φ に対しては $(\wedge L - L \wedge) \varphi = (n - q) \varphi$ であるから, $\mathcal{D}^q(B')$ の φ に対し

$$\begin{aligned} (\bar{\partial} \varphi, \bar{\partial} \varphi) + (\partial \varphi, \partial \varphi) &= (\square \varphi, \varphi) \\ &= (n - q)(\varphi, \varphi) + (\square * \varphi, * \varphi) \\ &\geq (n - q) \cdot (\varphi, \varphi) \end{aligned}$$

がえられる。すなわち

補題 5. 我々の $\mathcal{D}^q(B')$ ($1 \leq q < n$) に対しては, $C = (n - q)$ とすれば補題 3 の条件 (3.7) がなりたつ。

従って補題 4 により,

命題 W V. 我々の B' に対しては, $\varphi \in \mathcal{D}^q(B')$ で $\bar{\partial} \varphi = 0$ を満す φ に対して, 型 $(0, q-1)$ の B' -valued C^∞ 微分式 $\psi \in \mathcal{L}^{q-1}(B')$ で, $\bar{\partial} \psi = \varphi$, $\partial \psi = 0$, $(\psi, \psi) \leq \frac{4}{n-q}(\varphi, \varphi)$ をみたすものが, 存在する。

$\bar{\partial} \psi = \varphi$ をみたす ψ が $\mathcal{D}^{q-1}(B')$ 内に (台がコンパクト

なように) とれることを示すのが、次の段階であって、
そこに Carleman 評価の方法が使われる。

$\lambda(t)$ を、実変数 t の C^∞ 函数で

$$\begin{cases} \lambda(t), \lambda'(t), \lambda''(t) \geq 0 \\ t < 0 \text{ では } \lambda(t) = \lambda'(t) = \lambda''(t) = 0 \\ t > 0 \text{ では } \lambda'(t) > 0 \\ 0 < t < 1 \text{ では } \lambda''(t) > 0, t < 1 \text{ では } \lambda''(t) = 0 \end{cases}$$

を満すものとする。 A を正の定数とし、(3.2)にいう ϕ_α として

$$(3.10) \quad \phi_{\alpha, \nu} = e^{-\nu \cdot \lambda(\Psi - A)} a_\alpha \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

をとる。(V のケラー計量はかえない。) これに対応して
内積 $(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{L}^{p,q}$, $\mathcal{D}$, $\square$... にも添字 ν をつけて区別
する。 $\nu = 0$ に対応するものは、既に考えたのと同じだ
から添字はつけない。

χ の変化についてみると、

$$(3.11) \quad \begin{cases} \chi_\nu = \chi - \nu \cdot \omega, \\ \omega = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \lambda(\Psi - A) \end{cases}$$

がわかる。(3.9)は

$$\square_\nu = (\Lambda L - L \Lambda) + *^{-1} \square * + \nu (\Lambda e(\omega) - e(\omega) \Lambda)$$

となる。重が多重劣調和であったこと、 $\lambda'(t), \lambda''(t) \geq 0$ であることを使うと、 $\mathcal{D}^{p,q}(B') \ni \varphi$ に対して $((\wedge e(\omega) - e(\omega) \wedge) \varphi, \varphi)_\nu \geq 0$ になりたつことが、計算により示されるので、結局

補題 6. ファイバー上の計量 (3.10) をとった場合にも、 ν に無関係な定数 $c = n - q$ を使って、 $\mathcal{D}^q(B') \ni \varphi$ ($1 \leq q \leq n-1$) に対し

$$(\bar{\partial} \varphi, \bar{\partial} \varphi)_\nu + (\partial_\nu \varphi, \partial_\nu \varphi)_\nu \geq c \cdot (\varphi, \varphi)_\nu$$

になりたつ。従ってさらに $\bar{\partial} \varphi = 0$ ならば、型 $(0, q-1)$ の C^∞ 微分式 $\psi_\nu \in \mathcal{L}_\nu^q(B')$ があって

$$\bar{\partial} \psi_\nu = \varphi, \quad \partial_\nu \psi_\nu = 0, \quad (\psi_\nu, \psi_\nu)_\nu \leq \frac{4}{n-q} (\varphi, \varphi)_\nu.$$

さて $\varphi \in \mathcal{D}^q(B')$, $\bar{\partial} \varphi = 0$ が与えられたとし、 $K = \text{supp } \varphi$, $A = \max_{p \in K} \Psi(p)$ とおく。この A を使って (3.10) の $b_{\alpha, \nu}$ を定める。そして補題 6 を適用すると、 ψ_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) がえられる。内積を積分の形に書き下してみれば、 $(\psi_\nu, \psi_\nu)_\nu \geq (\psi_\nu, \psi_\nu)$, および (K 上で $b_{\alpha, \nu} = a_\alpha$ であることを使って) $(\varphi, \varphi)_\nu = (\varphi, \varphi)$ がわかる。故に

$$(\psi_\nu, \psi_\nu) \leq (\psi_\nu, \psi_\nu)_\nu \leq \frac{4}{n-q}(\varphi, \varphi)_\nu = \frac{4}{n-q}(\varphi, \varphi).$$

これは $\{\psi_\nu; \nu=1, 2, 3, \dots\}$ が $\mathcal{L}^{q-1}(B')$ 内で有界な集合をなすことを示す。従って必要ならばその部分列をとると, 弱収束の意味で $\mathcal{L}^{q-1}(B')$ 内に極限 ψ をもち, *distribution* の意味で $\bar{\psi} = \varphi$ がなりたつ。

$M = \{p \mid \Psi(p) > A+1\}$ とおくと,

$$\int_M e^{\nu\lambda(\Psi-A)} a_\alpha^{-1}(\psi_\nu)_\alpha \wedge * \overline{(\psi_\nu)_\alpha} \leq (\psi_\nu, \psi_\nu)_\nu \leq \frac{4}{n-q}(\varphi, \varphi).$$

一方 M 上では $\lambda(\Psi-A) \geq c > 0$ となる定数 c がある。

それ故上式の左辺 $\geq e^{\nu c} \int_M a_\alpha^{-1}(\psi_\nu)_\alpha \wedge * \overline{(\psi_\nu)_\alpha}$. 従って $\nu \rightarrow \infty$ のとき $\int_M a_\alpha^{-1}(\psi_\nu)_\alpha \wedge * \overline{(\psi_\nu)_\alpha} \rightarrow 0$. これから, *distribution* としての ψ の *support* がコンパクト集合 $V-M$ 内に含まれることがわかる。

最後に Andreotti-Vesentini [1] の Lemma 12 にいう *regularization* を行って, 台がもう少し大きくなることを許せば, $\exists \psi_0 \in \mathcal{L}^{q-1}(B'), \bar{\psi}_0 = \varphi$ がわかる。

§4. 定理2の証明

$\tilde{X} \supset S \xrightarrow{\pi} M$ という状態にあるとき, M の一葉 a に対

し, M 上における局所座標 $z^1, \dots, z^m$ を, $z^i(a) = 0$ で,
 $D = \{z \mid \sum |z^i|^2 < 1\}$ が a の十分小さい近傍になるように,
 とる。 $\pi^{-1}(D) \cong D \times \mathbb{P}^{r-1}$ である。 $\mathbb{P}^{r-1}$ 上の斉次座標 $(\eta^1, \dots, \eta^r)$ をとっておく。 $U_\alpha = \{\eta^\alpha \neq 0\}$ とおけば, $\{\xi_\alpha^r = \eta^r / \eta^\alpha \mid r=1, \dots, \hat{\alpha}, \dots, r\}$ は U_α 上での局所座標系をなす。 $\{U_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, r}$ は $\mathbb{P}^{r-1}$ の開被覆であり, 超平面 e の定める複素直線バンドル $[e]$ はこの被覆に関して transition functions

$$(4.1) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \eta^\beta / \eta^\alpha = \xi_\alpha^\beta$$

によって与えられる。

$$(4.2) \quad a_\alpha^{(0)} = \sum_r |\eta^r|^2 / |\eta^\alpha|^2 = \sum_r |\xi_\alpha^r|^2$$

は, ファイバー上の計量を与える。(その曲率形式は標準的な $\mathbb{P}^{r-1}$ の Hodge 計量である。) $D \times \mathbb{P}$ 上における $[e]$ の pull back を $[e]$ であらわすと, これは被覆 $\{D \times U_\alpha\}$ に関し (4.1) で定められる。計量としては

$$(4.3) \quad \begin{cases} a_\alpha = e^{\phi(z)} \cdot a_\alpha^{(0)}, \\ \phi(z) = \sum_r |z^r|^2 \end{cases}$$

をとる。その曲率形式は $D \times \mathbb{P}$ 上で正定値である。条件

$[S]_{La} = [e]^{-1}$ のため, $[S]_{D \times \mathbb{P}} = [e]^{-1}$ となる。

$\tilde{X}$ 上の座標近傍の有限集合 $\{V'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で, つぎのようなものがとれる:

$V'_\lambda \cap S = D \times U'_\lambda$, $\{U'_\lambda\}$ は $\mathbb{P}$ の被覆をなし $\{U_\alpha\}$ の細分である。(細分関係をあらわす写像を $\tau: \Lambda \rightarrow \{1, \dots, r\}$ とする, $U'_\lambda (U_{\tau(\lambda)})$ V'_λ 上に $\tilde{X}$ の局所座標系 $(z_\lambda^1, \dots, z_\lambda^m, x_\lambda^1, \dots, \hat{x}_\lambda^{\tau(\lambda)}, \dots, x_\lambda^r, y_\lambda)$ があって, y_λ は V'_λ における S のイデアルを生成し, $[S]$ の変換函数 $e_{\lambda\mu} = y_\lambda / y_\mu$ などについて,

$$(4.4) \quad \begin{cases} e_{\lambda\mu}|_S = \varepsilon_{\lambda\mu}^{-1}, \\ z_\lambda^i|_S = \zeta^i, \quad x_\lambda^\alpha|_S = \xi_{\tau(\lambda)}^\alpha \end{cases}$$

がなりたつ。(ここに $\varepsilon_{\tau(\lambda), \tau(\mu)}$ のことを $\varepsilon_{\lambda\mu}$ と書いている。また $\hat{x}_\lambda^{\tau(\lambda)} \equiv 1$ とおいている。)

$V' = \bigcup_\lambda V'_\lambda$ とおくと, これは La の近傍である。 V' の canonical bundle $\mathcal{K}$ を $S \cap V'$ 上に制限すると, adjunction formula により

$$\mathcal{K}|_{S \cap V'} = \mathcal{K}(D \times \mathbb{P}^{r-1}) \otimes [S]_S^{-1} = [e]^{-(r-1)}$$

となる。それ故 $\mathcal{K}$ の変換函数 $k_{\lambda\mu}$ も

$$k_{\lambda\mu}|_S = \varepsilon_{\lambda\mu}^{-(r-1)}$$

をみたすと考えてよい。

今 j を一つきめ添字を略して z_λ^j を z_λ と書くことにする。 $z_\lambda - z_\mu$ は S 上で 0 になるから

$$f_{\lambda\mu} = y_\lambda^{-1}(z_\lambda - z_\mu)$$

は $V'_\lambda \cap V'_\mu$ での正則函数である。容易にたしかめられるように $\{f_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}([S]^{-1}))$ である。($\mathcal{U}$ は被覆 $\{V'_\lambda\}$ の, $\mathcal{U}$ は $\{D \times U'_\lambda\}$ の Nerve をあらわす。) $f_{\lambda\mu}|_S = \varphi_{\lambda\mu}$ とおくと, $\{\varphi_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}([e]))$ だが, $H^1(D \times \mathbb{P}, \mathcal{O}([e])) = 0$ のため $D \times U'_\lambda$ での正則函数 φ_λ があって

$$\varphi_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda - \varepsilon_{\lambda\mu} \varphi_\mu$$

となる。 φ_λ の V'_λ への拡張を一つとって f_λ とし, $z'_\lambda = z_\lambda - y_\lambda f_\lambda$ とおけば, $z'_\lambda - z'_\mu \equiv 0 \pmod{y_\lambda^2}$ $f'_{\lambda\mu} = y_\lambda^{-2}(z'_\lambda - z'_\mu)$ とおいて上同様の操作を行う。 $H^1(D \times \mathbb{P}, \mathcal{O}([e]^2)) = 0$ を使って $z''_\lambda = z'_\lambda - (y_\lambda)^2 f'_\lambda$ を作り, $z''_\lambda - z''_\mu \equiv 0 \pmod{(y_\lambda)^3}$ に到達する。以下同様に進むことができる。

$[e]$ の正則切断面 $\xi^\alpha = \{\xi_\beta^\alpha\}_{\beta=1, \dots, r}$ や, $[e]^{r-1}$ のそれ $\omega^p = \{\omega_\lambda^p\}$, $\omega_\lambda^p = M^p / (\eta^{\tau(\lambda)})^{r-1}$ (ここに M^p は (η)

に関する $(r-1)$ 次単項式全体にわたる) やを, 近似的に V' に拡張する問題についても同様のことができる.

$\omega = \omega^p$ についてやってみると, ω_λ の V'_λ への延長の一つ w_λ から出発して, $w_\lambda - k_{\lambda\mu}^{-1} w_\mu = y_\lambda \cdot g_{\lambda\mu}$ で $\{g_{\lambda\mu}\}$ を定めると, これが $\in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathcal{K}^{-1} \otimes [S]^{-1}))$. その S 上の制限を coboundary の形に書いて, 現れる 0-コチェインの成分を V'_λ に延長し g_λ とおく. $(w_\lambda - y_\lambda g_\lambda) - k_{\lambda\mu}^{-1} (w_\mu - y_\mu g_\mu) = (y_\lambda)^2 \cdot g'_{\lambda\mu}$, $\{g'_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\mathcal{K}^{-1} \otimes [S]^{-1}))$ となる. 以下同様. そこでつぎの補題をうる:

補題 7. 整数 l を与えるとき, 局所座標 z_λ^i, x_λ^r は, (4.4) のほかにつぎの (4.5) をもみたすようにとれる. また V'_λ における正則関数 w_λ^p を, (4.5) をみたすようにとれる.

$$(4.5) \quad \begin{cases} z_\lambda^i - z_\mu^i \equiv (y_\lambda)^l f_{\lambda\mu}^i, \\ x_\lambda^\alpha - e_{\lambda\mu}^{-1} x_\mu^\alpha = (y_\lambda)^l g_{\lambda\mu}^\alpha, \\ w_\lambda^p - k_{\lambda\mu}^{-1} w_\mu^p = (y_\lambda)^l h_{\lambda\mu}^p, \end{cases}$$

ここに $f_{\lambda\mu}^i, g_{\lambda\mu}^\alpha, h_{\lambda\mu}^p$ は $V'_\lambda \cap V'_\mu$ における正則関数である.

(V' はもう少し小さいもので置き換えねばならないかも知れないが, それは差支ない。) $f^{\dot{i}} = \{f_{\lambda\mu}^{\dot{i}}\}$, $g^{\alpha} = \{g_{\lambda\mu}^{\alpha}\}$, $h^{\rho} = \{h_{\lambda\mu}^{\rho}\}$ は, それぞれ $Z^1(\mathcal{W}, \mathcal{Q}([S]^{\ell}))$, $Z^1(\mathcal{W}, \mathcal{Q}([S]^{\ell_1}))$, $Z^1(\mathcal{W}, \mathcal{Q}(\mathcal{K}^{-1} \otimes [S]^{\ell}))$ の元である。これらを *differentiable sections* を使って *coboundary* に書くことは常に可能である。従って

補題8. V_{λ} における C^{∞} -函数 $\varphi_{\lambda}^{\dot{i}}$, ψ_{λ}^{α} , π_{λ}^{ρ} をうまくとって, $V_{\lambda} \cap V_{\mu}$ で

$$(4.6) \quad \begin{cases} Z^{\dot{i}} = z_{\lambda}^{\dot{i}} - (y_{\lambda})^{\ell} \varphi_{\lambda}^{\dot{i}} = z_{\mu}^{\dot{i}} - (y_{\mu})^{\ell} \varphi_{\mu}^{\dot{i}} \\ X_{\lambda}^{\alpha} = x_{\lambda}^{\alpha} - (y_{\lambda})^{\ell} \psi_{\lambda}^{\alpha} \text{ に対し } X_{\lambda}^{\alpha} = e_{\lambda\mu}^{-1} X_{\mu}^{\alpha} \\ W_{\lambda}^{\rho} = w_{\lambda}^{\rho} - (y_{\lambda})^{\ell} \pi_{\lambda}^{\rho} \text{ に対し } W_{\lambda}^{\rho} = k_{\lambda\mu}^{-1} W_{\mu}^{\rho} \end{cases}$$

となるようにできる。

そこで

$$(4.7) \quad \begin{cases} A_{\lambda} = e^{\sum |z_{\lambda}^{\dot{i}}|^2} (\sum_{\alpha} |X_{\lambda}^{\alpha}|^2) \\ B_{\lambda} = \sum_{\rho} |W_{\lambda}^{\rho}|^2 \\ F = A_{\lambda} \cdot |y_{\lambda}|^2 = A_{\mu} \cdot |y_{\mu}|^2 \\ \psi = \sum_{\dot{i}} |Z^{\dot{i}}|^2 + F \end{cases}$$

とおく。 $l \geq 3$ とおけば、つぎの二つの補題が成り立つ。

補題 9. V' 上 F が十分小さい範囲では、 ψ の Levi form は、 $\frac{1}{2} \{ \sum_i |dz^i|^2 + |dy|^2 \}$ と半正定値形式との和として表わされる。

補題 10. V_λ 上 F が十分小さい範囲では

$$\left(\frac{\partial^2 \log A_\lambda}{\partial x_\lambda^\alpha \partial \bar{x}_\lambda^\beta} \right), \quad \left(\frac{\partial^2 \log B_\lambda}{\partial x_\lambda^\alpha \partial \bar{x}_\lambda^\beta} \right)$$

は正定値行列である。

この二つが云えたとすれば、定理 2 はつぎのように示される。 $\delta > 0$ を十分小さくとると、 $V = \{p \in V' \mid \psi(p) < \delta\}$ は V' 内で *relatively compact*, かつ V では補題 9, 10 が成り立つようになる。 $\Psi = (1 - \psi/\delta)^{-1}$ とおけば条件 (a), (b) は成り立つ。 $B_\lambda^{-1} \cdot A_\lambda^{-k} e^{-m\psi}$ が $\mathcal{H} \otimes [S]^k$ に対するファイバー上の計量を与えるから、 m を十分大にすれば条件 (c) が $B = [S]^k$ に対して成り立つ。

補題10は, $y_\lambda = 0$ に対して A_λ が a_λ に, B_λ が a_λ^{r-1} に, 帰着することに注意すれば, 直ちにわかる。補題9. については, $(\tau(\lambda) = r$ であるような V_λ で考え, 添字 λ を略して) 直接の計算により

$$\begin{pmatrix}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^j \partial \bar{y}} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^j \partial \bar{x}^\beta} \\
 * & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \bar{y}} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \bar{x}^\beta} \\
 * & * & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\alpha \partial \bar{x}^\beta}
 \end{pmatrix}
 = \begin{pmatrix}
 I_m + O(|y|) & e^{\sum |z^j|^2} (1 + \sum |x^\alpha|^2) \{ \bar{z}^k u + O(|y|^2) \} & O(|y|^2) \\
 * & e^{\sum |z^j|^2} (1 + \sum |x^\alpha|^2) + O(|y|) & e^{\sum |z^j|^2} \bar{y} (x^\beta + O(|y|)) \\
 * & * & e^{\sum |z^j|^2} |y|^2 (I_{r-1} + O(|y|))
 \end{pmatrix}$$

となる。 $y=0$ で (図の) 対角線以外の項は 0 となるが, 右下の所も 0 となるので気になる。 $G > 0$ を大きくとれば, $\sum |x^\alpha|^2 \leq G$ なる範囲で考えればよいから, $\eta > 0$ を, $\eta G < \frac{1}{3}$ となるようにとっておくと,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \bar{y}}(dy, d\bar{y}) + \sum_{\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \bar{x}^{\beta}}(dy, d\bar{x}^{\beta}) + \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{\alpha} \partial \bar{y}}(dx^{\alpha}, d\bar{y}) + \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{\alpha} \partial \bar{x}^{\beta}}(dx^{\alpha}, d\bar{x}^{\beta}) \\
&= e^{\sum |z^{\alpha}|^2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{F-1} |(1+\eta)^{-\frac{1}{2}} y dx^{\alpha} + (1+\eta)^{\frac{1}{2}} x^{\alpha} dy|^2 + (1-\eta \sum |x_{\alpha}|^2 + O(|y|)) (dy, d\bar{y}) \right. \\
&\quad \left. + \sum \bar{y} a_{\beta} (dy, d\bar{x}^{\beta}) + \sum y \bar{a}_{\alpha} (dx^{\alpha}, d\bar{y}) + |y|^2 \sum \left(\frac{\eta}{1+\eta} \delta_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} \right) (dx^{\alpha}, d\bar{x}^{\beta}) \right\} \\
&\geq e^{\sum |z^{\alpha}|^2} \left\{ \frac{2}{3} (dy, d\bar{y}) + \sum \bar{y} a_{\beta} (dy, d\bar{x}^{\beta}) + \sum y \bar{a}_{\alpha} (dx^{\alpha}, d\bar{y}) \right. \\
&\quad \left. + |y|^2 \sum \left(\frac{\eta}{2} \delta_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} \right) (dx^{\alpha}, d\bar{x}^{\beta}) \right\}
\end{aligned}$$

となる, ここに $a_{\alpha}, b_{\alpha\beta}$ は $O(|y|)$ の量である。同じような方法で $\sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^{\alpha} \partial x^{\beta}}(d\bar{z}^{\alpha}, dx^{\beta})$ の項から来る影響も処理して, 補題9の成立が認められる。

§5. モノイダル変換の微小変形

複素多様体 W_0 が, 複素多様体 V_0 のモノイダル変換 (中心 M_0, M_0 の 逆像 S_0) であるとする。 W_0 を中心メンバーとする, 複素多様体の解析的変形族があるとき, W_0 に十分近いメンバー W_t は, 再びある V_t のモノイダル変換になっているであろうか?

この問題に対しては Kodaira[3] によって十分な準備

ができていたので、我々の主定理が直ちに応用され、肯定的な解決が与えられる。Kodaira[3]の結果とはつぎのようなことである：

W , B は複素多様体, p は W から B 上への正則な写像で, W の各点でそのヤコビアン の階数が $\dim B$ だけあるものとする。そうすれば $t \in B$ に対し $W_t = p^{-1}(t)$ は (連結でないかも知れないが) W の複素部分多様体である。 B の点 0 に対し W_0 がコンパクト, 余次元 1 の部分多様体 S_0 をふくみ, S_0 はある複素多様体 M_0 上の解析的 $\mathbb{P}^{r-1}$ バンドルになっているとする。さらに複素直線バンドル $[S_0]$ を, $\pi: S_0 \rightarrow M_0$ の任意のファイバー上に制限すると $[e]^{-1}$ となっているとする。この場合 B における 0 の小近傍 N , $W' = \pi^{-1}(N)$ の余次元 1 の部分多様体 $\mathcal{S}$, コンパクト複素多様体の解析的変形族 $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow N$, 正則写像 $\tilde{\pi}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ があって,

(a) $(\mathcal{S}, N, p)$ もコンパクト複素多様体の解析的変形族であり, $p^{-1}(0) = S_0$, $\mathcal{F}^{-1}(0) = M_0$.

(b) $p = \mathcal{F} \circ \tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ は $\mathbb{P}^{r-1}$ をファイバーとする解析的バンドルであり, $\tilde{\pi}|_{S_0} = \pi$ (はじめの $\mathbb{P}^{r-1}$ バン

ドル $S_0 \rightarrow M_0$ での射影) である。

主定理を $\psi \rightarrow \mathcal{S}$ に適用すれば $\psi \rightarrow \mathcal{M}$ がえられる。
 $\psi \rightarrow B$ が定まって、各 V_t のモノイダル変換が W_t になることは、見易い。

以上本稿は Nakano [4], Fujiki - Nakano [2] の内容をまとめて述べたものである。それ故研究集会の記録ではないが、現実に時日の余裕があり、一斉別の目的のためこれを書いたので、流用した。御諒承下さい。

参 考 文 献

- [1] A. Andreotti-E. Vesentini, Carleman estimate for the Laplace-Beltrami equations on complex manifolds, Publication Mathematiques IHES, 25(1965) pp.81-155.
- [2] A. Fujiki-S. Nakano, Supplement to "On the inverse of monoidal transformation", to appear in Publications RIMS.
- [3] K. Kodaira, On stability of compact submanifolds of complex manifolds, Amer. J. Math., vol.85(1963) pp.79-94.
- [4] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformation, Publications RIMS, vol.6.