

L-函数の近似函数等式について

日大理工 本 橋 洋 一

最近, 零点密度理論は, Large Sieve や Halász の方法を得て H. L. Montgomery により長足の進歩がなされたが, その理論の展開にあたり, それ自身を極めて興味深い事実が本質的に用いられている。それは L-函数の直線 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上における4乗平均値である。Montgomery によれば, これは次の形式となる。

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-T}^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt \ll \varphi(q) T \log^4 q T,$$

但し $\sum^*$ は原始指標についての和, $\varphi(q)$ は Euler 函数, 更に $T \geq 2$ と仮定する。これはほとんど best-possible のものでありその深さは, この不等式が Brun-Titchmarsh の定理の改良に深くかかわっており, 最近の筆者自身の結果からよくうかがわれるのである。

このように重要な事実にもかかわらず, リままで発表された証明は, いずれも大筋に於ては優れるものの細部に

いては多くの反省を求めざるを得ないものである。従って、極めて詳細な証明をこの講究録中に残しておくのは、単なる計算練習以上の意味をもつものと思われる。上記不等式の証明は Huxley 及び Larrick-Montgomery のものがあるが、いずれも根底には Linnik の深い考察があることを注意しておくべきであろう。

ここでは Larrick の次の 2 つの論文を中心にして計算をすすめていくことにする。

A. F. Larrick :

- (1) A functional equation for Dirichlet L-series and the problem of divisors in arithmetic progressions

A.M.S. Transl., (2) 82 (1969), 47-65.

- (2) An approximate functional equation for the Dirichlet L-function

Trans. Moscow Math. Soc., 18 (1968), 101-115.

1.) Landau の θ -変換公式:

$$\operatorname{Re}(z) > 0, \quad a = \frac{1}{2} (1 - \chi(-1)), \quad \chi: \text{primitive mod } q$$

なる条件下で

$$z^{\frac{1}{2}+a} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi}{q} z n^2} = \varepsilon(\chi) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{q \bar{z}} n^2}$$

$\varepsilon(\chi)$ は χ についての Gauss 和から誘導される ± 1 の値. $|\varepsilon(\chi)| = 1$.

2.) $\operatorname{Re} s = a > 0$ のとき

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{q} z n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi = \left(\frac{q}{\pi n^2 z} \right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)$$

3.) 従って $\operatorname{Re} s = a > 1$ ならば

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q}{\pi z} \right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a \left(\frac{q}{\pi n^2 z} \right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{q} z n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi}{q} z n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \\ &= \int_1^{\infty} + \int_0^1 \end{aligned}$$

θ 変換公式によつて

$$\begin{aligned} \int_0^1 &= \int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi z}{\theta \xi} n^2} \right\} \xi^{-\frac{s+a}{2}-1} d\xi \\ &= \varepsilon(\chi) \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}+a} \int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty \bar{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{\theta z} n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi. \end{aligned}$$

従つて

$$\begin{aligned} &\left(\frac{q_r}{\pi z}\right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi) \\ &= \int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi z}{\theta} n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi + \\ &\quad + \varepsilon(\chi) \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}+a} \int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty \bar{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{\theta z} n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi. \end{aligned}$$

右辺は全 z の s について絶対収束，よつて左辺は全 z の s について成立する。

4) 以下 $0 < \alpha < 1$ とする。又， $\chi > 0$ を任意にとる。

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi}{\theta} z n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_1^\infty \chi(n) n^a e^{-\frac{\pi}{\theta} z n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \leq x} + \sum_{n > x} \quad \text{と 4.17.3.}$$

$$\sum_{n \leq x} = \sum_{n \leq x} \chi(n) n^a \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi z}{t} n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi - \int_0^1 e^{-\frac{\pi z}{t} n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \right\}$$

$$= \sum_{n \leq x} \chi(n) n^a \left\{ \left(\frac{t}{\pi z n^2} \right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) - \left(\frac{t}{\pi z n^2} \right)^{\frac{s+a}{2}} \gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{t} n^2\right) \right\}$$

但し $\gamma(\alpha, \beta) = \int_0^{\beta} e^{-\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi.$

$$\sum_{n \leq x} = \left(\frac{t}{\pi z} \right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \left\{ \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} - \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} \frac{\gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{t} n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \right\}.$$

一方

$$\sum_{n > x} = \left(\frac{t}{\pi z} \right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{n^s} \frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{t} n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}.$$

但し

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\alpha-1} d\xi.$$

5.) 次に $y > 0$ と任意に $t, z,$

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \right\} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \bar{\chi}(n) n^a e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi \\
&= \sum_{n \leq y} + \sum_{n > y} \\
&\sum_{n \leq y} = \sum_{n \leq y} \bar{\chi}(n) n^a \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{qz} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi \right\} \\
&= \sum_{n \leq y} \bar{\chi}(n) n^a \left\{ \left(\frac{qz}{\pi n^2} \right)^{\frac{1-s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) - \left(\frac{qz}{\pi n^2} \right)^{\frac{1-s+a}{2}} \gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{qz}\right) \right\} \\
&= \left(\frac{qz}{\pi} \right)^{\frac{1-s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) \left\{ \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} - \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \frac{\gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{qz}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)} \right\}
\end{aligned}$$

- 3

$$\sum_{n > y} = \left(\frac{qz}{\pi} \right)^{\frac{1-s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right) \sum_{n > y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{qz}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}$$

6.) 以上 3) 4) 5) をまとめると

$$0 < \sigma < 1$$

のとき, 任意の $x, y > 0 \Rightarrow$ " "

$$\begin{aligned}
 L(s, \chi) &= \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \\
 &\quad - \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \frac{\gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{q} x n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + \sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{q} x n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \\
 &\quad - \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \varepsilon(\chi) \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \cdot \frac{\gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{q x}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + \\
 &\quad + \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \varepsilon(\chi) \sum_{n > y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{q x}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

これは Larrik の "函数等式" である。ここで重要なのは変数
 が $\operatorname{Re} z > 0$ であるのは何でトヨリという事である。これは
 が以下の計算では $\operatorname{Arg} z$ をある $\delta < \frac{\pi}{2}$ に近くして, 上記の
 等式にあるから

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

から出る $e^{+\frac{\pi}{4}|t|}$ という大きな値を消してしまふ = に用い
 るからのである。このことにはじめて想到したのは Linnik で
 ある。

以下, 次の約束[Y]を設定する。

$$[Y] \begin{cases} t \geq 1, & q \geq 2, & \Delta > 0, & 0 < \alpha < 1 \\ z = \Delta^2 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\right)\right) = \Delta^2 \sin \frac{1}{t} + i \Delta^2 \cos \frac{1}{t} \\ x = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{qt}{2\pi}}, & y = \Delta \sqrt{\frac{qt}{2\pi}} & (xy = \frac{qt}{2\pi}) \end{cases}$$

7.) まず

$$F_1 = \sum_{n \geq 2 \log qt} \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

の評価をする。

$v_1 < v_2$ は任意として $\sum_{v_1 < n < v_2} \frac{\chi(n)}{n^s}$ は (s をとめて) 有界。又

$$\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} v^2\right) \rightarrow 0 \quad (v \rightarrow \infty) \quad \text{が 明か。}$$

よって部分積分法により

$$F_1 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_{2 \log qt}^{\infty} \left\{ \sum_{2 \log qt \leq n \leq v} \frac{\chi(n)}{n^s} \right\} \frac{d}{dv} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} v^2\right) dv$$

$\Gamma(d, \beta)$ の定義から

$$\frac{d}{dv} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi z}{q} v^2\right) = - \frac{2\pi z v}{q} e^{-\frac{\pi z}{q} v^2} \left(\frac{\pi z}{q} v^2\right)^{\frac{s+a}{2}-1}.$$

従って

$$F_1 = -2 \frac{\left(\frac{\pi}{q} z\right)^{\frac{s+a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_{x \log q t}^{\infty} \left\{ \sum_{x \log q t \leq n \leq v} \frac{\chi(n)}{n^s} \right\} v^{s+a-1} e^{-\frac{\pi}{q} z v^2} dv.$$

しかるに

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\pi}{q} z\right)^{\frac{s+a}{2}} \right| &\ll q^{-\frac{\sigma+a}{2}} \Delta^{\sigma+a} \left| \exp\left(\frac{s+a}{2} i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\right)\right) \right| \\ &\ll q^{-\frac{\sigma+a}{2}} \Delta^{\sigma+a} e^{-\frac{\pi}{4} t}, \end{aligned}$$

スターリングの公式により

$$\frac{1}{|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)|} \ll e^{\frac{\pi}{4} t} t^{\frac{1-\sigma-a}{2}} \quad (\because t \gg 1).$$

更に

$$\left| e^{-\frac{\pi}{q} z v^2} \right| \leq e^{-\frac{\pi}{q} \Delta^2 v^2 \sin \frac{1}{t}} \leq e^{-\frac{2}{8t} \Delta^2 v^2} \quad \left(\because \sin \alpha \geq \frac{2}{\pi} \alpha \right) \\ \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

又、一方 Pólya-Vinogradov の定理

$$\left| \sum_{v_1 \leq n \leq v_2} \chi(n) \right| \ll \sqrt{q} \log q$$

によつて

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x \log q t \leq n \leq v} \frac{\chi(n)}{n^s} \right| &\ll \frac{\sqrt{q} \log q}{v^{\sigma}} + |s| \int_{x \log q t}^v \frac{\sqrt{q} \log q}{\xi^{\sigma+1}} d\xi \\ &\ll \frac{t \sqrt{q} \log q}{(x \log q t)^{\sigma}} \quad (\because t \gg 1) \end{aligned}$$

$$\ll \Delta^{\sigma} t \sqrt{q} \log q (qt)^{-\frac{\sigma}{2}}.$$

以上をまとめると

$$|F_1| \ll \Delta^{2\sigma+a} q^{\frac{1}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} t^{\frac{3}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} \log q \int_{x \log qt}^{\infty} e^{-\frac{\Delta^2}{qt} v^2} v^{\sigma+a-1} dv$$

$$\ll \Delta^{2\sigma+a} q^{\frac{1}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} t^{\frac{3}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} \log q \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{qt} (x \log qt)^2} \times$$

$$\times \int_{x \log qt}^{\infty} e^{-\frac{\Delta^2}{qt} v^2} v^{\sigma+a-1} dv$$

$$\ll \Delta^{2\sigma+a} (qt)^{\frac{3}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} e^{-\frac{1}{2\pi} (\log qt)^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\Delta^2}{qt} v^2} v^{\sigma+a-1} dv$$

$$\ll \Delta^{2\sigma+a} (qt)^{\frac{3}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} e^{-\frac{1}{2\pi} (\log qt)^2} \left(\frac{\sqrt{qt}}{\Delta}\right)^{\sigma+a}.$$

従って

$$|F_1| \ll \Delta^{\sigma} (qt)^{\frac{3}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} e^{-\frac{1}{2\pi} (\log qt)^2}$$

$$\ll_M \Delta^{\sigma} (qt)^{-M} \quad (M: \text{任意}).$$

8.) 次に

$$F_2 = \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{n > y \log q t} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi n^2}{qz}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

$$= -2 \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\left(\frac{\pi}{qz}\right)^{\frac{1-s+a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_0^\infty \left\{ \sum_{y \log q t \leq n \leq v} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right\} v^{(1-s+a)-1} e^{-\frac{\pi}{qz} v^2} dv.$$

$$\left| \left(\frac{\pi}{qz}\right)^{\frac{1-s+a}{2}} \right| \ll q^{\frac{-1+s-a}{2}} \Delta^{-1+s-a} e^{-\frac{\pi}{4}t}$$

$$\frac{1}{\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right|} \ll e^{\frac{\pi}{4}t} t^{\frac{1-s-a}{2}}$$

$$\left| \sum_{y \log q t \leq n \leq v} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right| \ll \frac{t \sqrt{q} \log q}{(y \log q t)^{1-s}} \ll t \sqrt{q} \log q \cdot \Delta^{s-1} (qt)^{\frac{s-1}{2}}$$

$$\left| e^{-\frac{\pi}{qz} v^2} \right| \ll e^{-\frac{2}{qt\Delta^2} v^2}$$

$F_2 \ll$

$$|F_2| \ll \Delta^{2s-2-a} t^{1-\frac{a}{2}} q^{s-\frac{1}{2}-\frac{a}{2}} \log q \cdot e^{-\frac{1}{qt\Delta^2} (y \log qt)^2} \cdot (\Delta \sqrt{qt})^{1-s+a}$$

$$\ll \Delta^{s-1} t^{\frac{3}{2}-\frac{s}{2}} q^{\frac{s}{2}} \log q \cdot e^{-\frac{1}{2\pi} (\log qt)^2}$$

$$\ll_M \Delta^{s-1} (qt)^{-M}$$

9.) 以上 6.) 7.) 8.) をまとめると $[Y]$ なる条件のもとに, M を任意の正数として, 次の "Lavrik の近似函数等式" を得る.

$$\begin{aligned}
 L(s, \chi) = & \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} + \\
 & + \sum_{n \leq x \log qt} \chi(n) F(s, n, x) + \sum_{n \leq y \log qt} \bar{\chi}(n) G(s, n, y) + \\
 & + O_M(\Delta^{\sigma}(qt)^{-M}).
 \end{aligned}$$

但し

$$F(s, n, x) = \begin{cases} - \frac{\gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{q} n^2 z\right)}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} & (n \leq x) \\ \frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{q} n^2 z\right)}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} & (n > x) \end{cases}$$

$$G(s, n, y) = \begin{cases} - \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi}{q^2} n^2\right)}{n^{1-s} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} & (n \leq y) \\ \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi}{q^2} n^2\right)}{n^{1-s} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} & (n > y) \end{cases}$$

以下 F, G の評価に入る。

10.) まず $F(s, n, x)$, $n \leq x$ の場合。

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{q} x n^2\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{q} x n^2} e^{-\xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \\ &= \left(\frac{\pi}{q} x n^2\right)^{\frac{s+a}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{q} n^2 x \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \\ &= \left(\frac{\pi}{q} x n^2\right)^{\frac{s+a}{2}} f_n(0) \quad \text{と可なり。} \end{aligned}$$

$$F(s, n, x) = -\frac{1}{n^s} \left(\frac{\pi}{q} x n^2\right)^{\frac{s+a}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} f_n(0)$$

4. 2

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{n^{s+a} q^{-\frac{s+a}{2}} \Delta^{s+a} e^{-\frac{\pi}{q} x}}{n^s e^{-\frac{\pi}{q} x} x^{\frac{s+a}{2}-1}} |f_n(0)|$$

$$\ll n^a (qt)^{-\frac{s+a}{2}} \sqrt{t} \Delta^{s+a} |f_n(0)|$$

$$\ll \left(\frac{\Delta n}{\sqrt{qt}}\right)^a (qt)^{-\frac{s}{2}} \sqrt{t} \Delta^s |f_n(0)|$$

$$\ll (qt)^{-\frac{s}{2}} \sqrt{t} \Delta^s |f_n(0)|$$

$$\left(\because \frac{\Delta n}{\sqrt{qt}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

さて, $f_n(0)$ について,

$$f_n(0) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi}{t} n^2 \Delta^2 \sin \frac{1}{t} \cdot \xi + \frac{t}{2} \log \xi - i \frac{\pi}{t} n^2 \Delta^2 \cos \frac{1}{t} \cdot \xi\right) \xi^{\frac{\sigma+a}{2}-1} d\xi$$

$\xi \rightarrow u^{\frac{2}{\sigma+a}}$ と変換して

$$\begin{aligned} f_n(0) &= \frac{2}{\sigma+a} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{\pi}{t} n^2 \Delta^2 \sin \frac{1}{t} \cdot u^{\frac{2}{\sigma+a}} + i\left(\frac{t}{\sigma+a} \log u - \frac{\pi}{t} n^2 \Delta^2 \cos \frac{1}{t} \cdot u^{\frac{2}{\sigma+a}}\right)\right\} du \\ &= \frac{2}{\sigma+a} \int_0^1 \exp(-H(u) + iE(u)) du \quad \text{と可る。} \end{aligned}$$

以下, 才 2 平均値定理が重要な手段になる。

$$E'(u) = \frac{1}{(\sigma+a)u} \left\{ t - \frac{2\pi}{t} n^2 \Delta^2 \cos \frac{1}{t} u^{\frac{2}{\sigma+a}} \right\}$$

であるが, 今後の計算のみとあしを良くするため,

$$n = \alpha (1 - \rho(u)) = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{bt}{2\pi}} (1 - \rho(u)) \quad (\rho(u) \geq 0)$$

と置くことにすると,

$$E'(u) = \frac{t}{(\sigma+a)u} \left\{ 1 - (1 - \rho(u))^2 \cos \frac{1}{t} u^{\frac{2}{\sigma+a}} \right\}$$

と書ける。

この $E'(u)$ について次のことに注意する。

$$(1) \quad E'(u) \geq \frac{\tau}{(\alpha+\alpha)u} (1 - (1-f(u))^2) > 0 \quad (0 \leq u \leq 1)$$

であり, $E'(u) \neq 0 \quad (0 \leq u \leq 1)$.

(2) 又,

$$E''(u) = -\frac{\tau}{(\alpha+\alpha)u^2} \left(1 + (1-f(u))^2 \cos \frac{1}{\tau} \cdot \left(\frac{2}{\alpha+\alpha} - 1 \right) u^{\frac{2}{\alpha+\alpha}} \right)$$

に於いて $\frac{2}{\alpha+\alpha} > 1 \quad (\because 0 < \alpha < 1)$ であるから

$$E''(u) < 0.$$

よって

$\frac{1}{E'(u)}$ は $u=0$ に於いて 0, 且て $0 \leq u \leq 1$ で単調増大.

次に $f(u)$ の大まかによ, 2つの場合に分ける.

(i) $f(u) \geq \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ のとき.

$E'(u) \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right) f_n(0) &= \int_0^1 \frac{e^{-H(u)}}{E'(u)} d e^{iE(u)} \\ &= \left[\frac{e^{-H(u)+iE(u)}}{E'(u)} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{H'(u)}{E'(u)} e^{-H(u)+iE(u)} du \\ &\quad + \int_0^1 \frac{E''(u)}{(E'(u))^2} e^{-H(u)+iE(u)} du \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-H(1)+iE(1)}}{E'(1)} + f_n^{(1)}(0) + f_n^{(2)}(0) \quad \text{と } \frac{1}{E} < 0.$$

$$|f_n^{(1)}(0)| \leq \int_0^1 \frac{H'(u)}{E'(u)} e^{-H(u)} du \leq \frac{1}{E'(1)} \int_0^1 H'(u) e^{-H(u)} du$$

$$= \frac{1}{E'(1)} \{1 - e^{-H(1)}\}.$$

又,

$$|f_n^{(2)}(0)| \leq \int_0^1 \frac{|E''(u)|}{(E'(u))^2} e^{-H(u)} du \leq - \int_0^1 \frac{E''(u)}{E'(u)^2} du \quad (\because E''(u) < 0)$$

$$= \frac{1}{E'(1)}.$$

従, τ , $\frac{1}{E}$ と $\frac{1}{E}$ と

$$\frac{\alpha + \alpha}{2} |f_n(0)| \leq \frac{e^{-H(1)}}{E'(1)} + \frac{1}{E'(1)} (1 - e^{-H(1)}) + \frac{1}{E'(1)}$$

$$= \frac{2}{E'(1)}$$

$$= \frac{2(\alpha + \alpha)}{\tau (1 - (1 - \rho(u))^2 \cos \frac{1}{E})}$$

$$\leq \frac{2(\alpha + \alpha)}{\tau (1 - (1 - \rho(u))^2)}$$

故に

$$|f_n(0)| \leq \frac{4}{t(1-(1-p(n))^2)}$$

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{\Delta^n (t)^{-\frac{\sigma}{2}}}{\sqrt{t}(1-(1-p(n))^2)}$$

よって,

$$\sqrt{t}(1-(1-p(n))^2) = \sqrt{t}p(n)(2-p(n)) \geq \sqrt{t}p(n) \geq 1$$

であるから

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{\Delta^n (t)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1 + \sqrt{t}(1-(1-p(n))^2)}$$

と書くことができる。更に $n \leq x$ なる n は $\frac{2}{t} n^2 \Delta^2 \leq \frac{1}{\pi}$ であるから

$$e^{-\frac{2}{t} n^2 \Delta^2} \geq e^{-\frac{1}{\pi}}$$

従って結局

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{\Delta^n (t)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1 + \sqrt{t}(1-(1-p(n))^2)} e^{-\frac{2}{t} n^2 \Delta^2}$$

$$\ll \frac{\Delta^n (t)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1 + \sqrt{t} \left| 1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2 \right|} e^{-\frac{2}{t} n^2 \Delta^2}$$

(ii) 次に $p(n) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ の場合を考へる。

$$\frac{\sigma+a}{2} f_n(0) = \left\{ \int_0^{(1-\frac{1}{\sqrt{t}})^{\frac{\sigma+a}{2}}} + \int_{(1-\frac{1}{\sqrt{t}})^{\frac{\sigma+a}{2}}}^1 \right\} e^{-H(u)+iE(u)} du$$

$$= f'_n(0) + f''_n(0) \text{ と分割する。}$$

$$|f''_n(0)| \leq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}\right) \ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}}$$

一方 $f'_n(0) = 0$ ならば ($t=1$ の場合は当然 $f'_n(0)=0$)

$$E'(u) \geq \frac{t}{(\sigma+a)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}} \left\{1 - (1 - \rho(u))^2 \cos \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}} \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{t}}{(\sigma+a)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}}$$

$$if'_n(0) = \int_0^{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}} \frac{e^{-H(u)}}{E'(u)} du e^{iE(u)}$$

$$\ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}}$$

まとめると

$$|f_n(0)| \ll \frac{1}{\sqrt{t}} \ll \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{2}{8t} n^2 \Delta^2}$$

$$|F(s, n, \lambda)| \ll \Delta^n (8t)^{-\frac{\sigma}{2}} e^{-\frac{2}{8t} n^2 \Delta^2}$$

$$p(n) \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \quad t \text{ あり } 3 \text{ あり } 3$$

$$\sqrt{t} |1 - (1 - p(n))^2| = \sqrt{t} p(n) (2 - p(n)) \leq 2$$

従, 2

$$\begin{aligned} |F(s, n, x)| &\ll \frac{\Delta^n (t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{2}{t} n^2 \Delta^2}}{1 + \sqrt{t} |1 - (1 - p(n))^2|} \\ &= \frac{\Delta^n (t)^{-\frac{n}{2}}}{1 + \sqrt{t} |1 - (\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{2}{t} n^2 \Delta^2} \end{aligned}$$

以上 (i) (ii) の結果をまとめると,

$$n \leq x \quad n \leq 2$$

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{\Delta^n (t)^{-\frac{n}{2}}}{1 + \sqrt{t} |1 - (\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{2}{t} n^2 \Delta^2}$$

11) $F(s, n, x)$, $n \geq x$ の場合.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}, \frac{\pi}{b} z n^2\right) &= \int_{\frac{\pi}{b} z n^2}^{\infty} e^{-\xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \\ &= \left(\frac{\pi}{b} n^2 z\right)^{\frac{s+a}{2}} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi}{b} z n^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi \\ &= \left(\frac{\pi}{b} n^2 z\right)^{\frac{s+a}{2}} f_n(1) \quad \text{と } \dagger 3. \end{aligned}$$

$$F(s, n, x) = \frac{\left(\frac{\pi}{t} n^2 x\right)^{\frac{s+a}{2}}}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} f_n(u).$$

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{t^{-\frac{s+a}{2}} n^{s+a} \Delta^{s+a} e^{-\frac{\pi}{t} t}}{n^s e^{-\frac{\pi}{t} t} t^{\frac{s+a}{2}-\frac{1}{2}}} |f_n(u)|$$

$$\ll \left(\frac{\Delta n}{\sqrt{t}}\right)^s (t)^{-\frac{s}{2}} \sqrt{t} \Delta^s |f_n(u)|.$$

$$f_n(u) = \frac{2}{s+a} \int_1^\infty \exp(-H(u) + iE(u)) du,$$

但し $H(u), E(u)$ は前節と同様。

$$E'(u) = \frac{1}{(s+a)u} \left\{ t - \frac{2\pi}{t} n^2 \Delta^2 \cos \frac{1}{t} u^{\frac{2}{s+a}} \right\}$$

ここで $n = x(1 + \rho(u)) = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} (1 + \rho(u))$ ($\rho(u) \geq 0$) と

おけば,

$$E'(u) = \frac{t}{(s+a)u} \left(1 - (1 + \rho(u))^2 \cos \frac{1}{t} u^{\frac{2}{s+a}} \right)$$

$$E''(u) = -\frac{t}{(s+a)u^2} \left(1 + (1 + \rho(u))^2 \cos \frac{1}{t} \left(\frac{2}{s+a} - 1 \right) u^{\frac{2}{s+a}} \right) < 0.$$

そこで $\rho(u)$ の大きさによって 2つの場合に分ける。

(i) $\rho(u) \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$ の場合

$u \geq 1$ のとき

$$E'(u) \leq \frac{t}{(a+u)u} \left(1 - (1+f(u))^2 \cos \frac{1}{t} \right).$$

又, $\cos \frac{1}{t} \geq 1 - \frac{2}{\pi t}$ ($t \geq 1$) のとき

$$E'(u) \leq \frac{t}{(a+u)u} \left(1 - (1+f(u))^2 \left(1 - \frac{2}{\pi t} \right) \right).$$

したがって

$$\begin{aligned} & 1 - (1+f(u))^2 \left(1 - \frac{2}{\pi t} \right) \\ &= \left\{ 1 - (1+f(u))^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{\frac{2}{\pi t} (1+f(u))^2}{(1+f(u))^2 - 1} \right\} \\ & 1 - \frac{\frac{2}{\pi t} (1+f(u))^2}{(1+f(u))^2 - 1} = 1 - \frac{2}{\pi t} - \frac{2}{\pi t ((1+f(u))^2 - 1)} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi t} - \frac{2}{\pi t f(u) (2+f(u))} \\ &\geq 1 - \frac{2}{\pi t} - \frac{1}{\pi t f(u)} \\ &\geq 1 - \frac{2}{\pi t} - \frac{1}{\pi \sqrt{t}} \geq 1 - \frac{3}{\pi} (> 0). \end{aligned}$$

従って

$$E'(u) \leq - \frac{t}{(a+u)u} \left((1+f(u))^2 - 1 \right) \left(1 - \frac{3}{\pi} \right) < 0.$$

まとめると, $\rho(u) \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$ なる u は

$E'(u)$ は 常に 負

$\frac{1}{|E'(u)|}$ は $u=1$ で 最大

$$\frac{1}{|E'(u)|} \leq \frac{\alpha+a}{t} \cdot \frac{\pi}{\pi-3} \cdot \frac{1}{(1+\rho(u))^2-1}$$

よって, $u \neq 1$ かつ $E'(u) \neq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\alpha+a}{2}\right)f_n^{(1)} &= \int_1^\infty \frac{e^{-H(u)}}{E'(u)} de^{iE(u)} \\ &= \left[\frac{e^{-H(u)+iE(u)}}{E'(u)} \right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{H'(u)}{E'(u)} e^{-H(u)+iE(u)} du \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{E''(u)}{E'(u)^2} e^{-H(u)+iE(u)} du \\ &= -\frac{e^{-H(1)+iE(1)}}{E'(1)} + f_n^{(1)}(1) + f_n^{(2)}(1) \quad \text{とある。} \end{aligned}$$

$$|f_n^{(1)}(1)| \leq \int_1^\infty \frac{H'(u)}{|E'(u)|} e^{-H(u)} du$$

$$\leq \frac{1}{|E'(1)|} \int_1^\infty H'(u) e^{-H(u)} du = \frac{e^{-H(1)}}{|E'(1)|}$$

$$\begin{aligned}
|f_n^{(2)}(1)| &\leq \int_1^\infty \frac{|E''(u)|}{E'(u)^2} e^{-H(u)} du \\
&\leq e^{-H(1)} \int_1^\infty \left\{ -\frac{E''(u)}{E'(u)^2} \right\} du \quad (\because E''(u) < 0) \\
&= e^{-H(1)} \left[\frac{1}{E'(u)} \right]_1^\infty = -e^{-H(1)} \frac{1}{E'(1)} = \frac{e^{-H(1)}}{|E'(1)|}
\end{aligned}$$

$$(\because \frac{1}{E'(u)} \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow \infty), \text{ 又 } \frac{2}{a+a} > 1 \text{ 又 } 3 \text{ 又 } 3.)$$

また、

$$\begin{aligned}
\frac{a+a}{2} |f_n(1)| &\leq 3 \frac{e^{-H(1)}}{|E'(1)|} \\
&\leq \frac{3\pi}{\pi-3} (a+a) \frac{e^{-H(1)}}{t((1+\rho(u))^2-1)}
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
|f_n(1)| &\ll \frac{e^{-\frac{\pi}{8} n^2 \Delta^2 \sin \frac{1}{t}}}{t((1+\rho(u))^2-1)} \\
&\ll \frac{e^{-\frac{2}{8t} n^2 \Delta^2}}{t((1+\rho(u))^2-1)}
\end{aligned}$$

$$|F(n, s, x)| \ll \left(\frac{\Delta n}{\sqrt{8t}} \right)^a (8t)^{-\frac{a}{2}} \Delta^a \frac{e^{-\frac{2}{8t} n^2 \Delta^2}}{\sqrt{t}((1+\rho(u))^2-1)}.$$

$$\text{よ、 } 3 \text{ に } \sqrt{t} ((1+f(n))^2 - 1) = \sqrt{t} f(n) (2+f(n)) \geq 2.$$

又、明らかなに

$$e^{-\frac{n^2 \Delta^2}{4t}} \leq \left(\frac{4t}{n^2 \Delta^2} \right)^{\frac{a}{2}} = \left(\frac{\sqrt{4t}}{n \Delta} \right)^a.$$

$$\text{よ、 } 2 \quad f(n) \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{なる } n \text{ は}$$

$$|F(n, s, x)| \ll \frac{\Delta^a (4t)^{-\frac{a}{2}}}{1 + \sqrt{t} |1 - (\frac{n}{2})^2|} e^{-\frac{1}{4t} \Delta^2 n^2}.$$

$$(ii)' \quad f(n) \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{の } n \text{ は}$$

$$\frac{\sigma+a}{2} f_n(1) = \left\{ \int_1^{(1+\frac{2}{\sqrt{t}})^{\frac{\sigma+a}{2}}} + \int_{(1+\frac{2}{\sqrt{t}})^{\frac{\sigma+a}{2}}}^{\infty} \right\} e^{-H(u)+iE(u)} du$$

$$= f_n'(1) + f_n''(1) \quad \text{と 分る。}$$

$$|f_n'(1)| \leq \left(\left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}} - 1 \right) e^{-H(1)} \ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}} e^{-H(1)}$$

$$f_n''(1) \text{ には } > \text{ " } \text{ なる } n \text{ は, } u \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{\sigma+a}{2}} \text{ なる } u \text{ は,}$$

$$-E'(u) = \frac{t}{(\sigma+a)u} \left((1+f(n))^2 \cos \frac{1}{t} u^{\frac{2}{\sigma+a}} - 1 \right)$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)u} \left(\cos \frac{1}{t} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}} \right) - 1 \right)$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)u} \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi t} \right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}} \right) - 1 \right\}$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)u} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\pi t} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}} \right) \right\}$$

$$\geq \frac{t}{(\sigma+a)u} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{3}{\pi t} \right\} \geq \frac{2\sqrt{t}}{(\sigma+a)u} \left(1 - \frac{3}{\pi} \right).$$

よ、 τ

$$i f_n''(1) = \int_{\frac{(1+\frac{2}{\sqrt{t}})^{\frac{\sigma+a}{2}}}{\infty}}^{\infty} \frac{e^{-H(u)}}{E'(u)} d e^{iE(u)}$$

$$\ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}} e^{-H(1)}.$$

よ、 τ と ε

$$\frac{\sigma+a}{2} |f_n(1)| \ll \frac{\sigma+a}{\sqrt{t}} e^{-H(1)}.$$

よ、 τ $\beta(n) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ σ と ε

$$|F(n, s, x)| \ll (\delta t)^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^n \left(\frac{\Delta n}{\sqrt{\delta t}} \right)^a e^{-\frac{2}{\delta t} n^2 \Delta^2}$$

$$\ll \frac{\Delta^n (\delta t)^{-\frac{\sigma}{2}}}{1 + \sqrt{t} \left| 1 - \left(\frac{n}{x} \right)^2 \right|} e^{-\frac{n^2}{\delta t} \Delta^2}.$$

以上 (i), (ii) の結果をまとめると,

$n > x$ のとき

$$|F(n, s, x)| \ll \frac{\Delta^n (xt)^{-\frac{s}{2}}}{1 + \sqrt{t} |1 - (\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{n^2}{xt} \Delta^2}$$

12.) 以上 10.) 及び 11.) の結果をまとめると,

全ての n に対して

$$|F(n, s, x)| \ll \frac{\Delta^n (xt)^{-\frac{s}{2}}}{1 + \sqrt{t} |1 - (\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{\Delta^2}{xt} n^2}$$

$$\ll \frac{\Delta^n (xt)^{-\frac{s}{2}}}{1 + \sqrt{t} |1 - (\frac{n}{x})^2|} e^{-\frac{1}{2\pi} (\frac{n}{x})^2}$$

13.) $G(s, n, y)$ の評価, $n \leq y$ の場合

$$G(s, n, y) = -\varepsilon(x) \left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi}{y^2} n^2\right)}{n^{1-s} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

$$= -\varepsilon(x) \left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\left(\frac{\pi}{y^2} n^2\right)^{\frac{1-s+a}{2}}}{n^{1-s} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{y^2} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi$$

よって

$$|G(s, n, j)| \ll \frac{q^{\frac{1}{2}-a} q^{\frac{-1+a}{2}} n^{1-a+a}}{n^{1-a} e^{-\frac{\pi}{4}t} t^{\frac{a+a-1}{2}}} \Delta^{-1+a-a} e^{-\frac{\pi}{4}t} |g_n(0)|$$

$$= \left(\frac{n}{\Delta \sqrt{qt}} \right)^a (qt)^{-\frac{a}{2}} \sqrt{t} \Delta^{a-1} |g_n(0)|$$

$$\ll (qt)^{-\frac{a}{2}} \sqrt{t} \Delta^{a-1} |g_n(0)| \quad (\because \frac{n}{\Delta \sqrt{qt}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$$

但し

$$g_n(0) = \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{q\Delta^2} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-a+a}{2}-1} d\xi$$

$$= \int_0^1 \exp \left\{ -\frac{\pi}{q\Delta^2} n^2 \sin \frac{1}{t} \cdot \xi - \frac{ti}{2} \log \xi + i \frac{\pi}{q\Delta^2} n^2 \cos \frac{1}{t} \cdot \xi \right\} \xi^{\frac{1-a+a}{2}-1} d\xi$$

$$\xi \rightarrow u^{\frac{2}{1-a+a}} \quad \text{と変換して,}$$

$$g_n(0) = \frac{2}{1-a+a} \int_0^1 \exp \left\{ -\frac{\pi}{q\Delta^2} \sin \frac{1}{t} u^{\frac{2}{1-a+a}} - i \left(\frac{t}{1-a+a} \log u + \frac{\pi n^2}{q\Delta^2} \cos \frac{1}{t} u^{\frac{2}{1-a+a}} \right) \right\} du$$

$$= \frac{2}{1-a+a} \int_0^1 \exp (-H_1(u) - i E_1(u)) du.$$

この形から明らかになるように $g_n(0)$ には、

$$\Delta \rightarrow \frac{1}{\Delta}, \quad a \rightarrow 1-a \quad E_1(u) \rightarrow -E_1(u)$$

とあるが、これは n と全く同じである。従って

$$n = y(1 - \rho(n)) \quad \text{とする}$$

$$|g_n(0)| \ll \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & (\rho(n) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}) \\ \frac{1}{t(1 - (1 - \rho(n))^2)} & (\rho(n) \geq \frac{1}{\sqrt{t}}) \end{cases}.$$

よって $n \leq y$ なるば

$$\begin{aligned} |G(s, n, y)| &\ll \frac{(qt)^{-\frac{s}{2}} \Delta^{a-1}}{1 + \sqrt{t} |1 - (\frac{n}{y})^2|} \\ &\ll \frac{(qt)^{-\frac{s}{2}} \Delta^{a-1}}{1 + \sqrt{t} |1 - (\frac{n}{y})^2|} e^{-2\frac{n^2}{qt\Delta^2}} \\ &\quad (\because \frac{2n^2}{qt\Delta^2} \leq \frac{1}{\pi}). \end{aligned}$$

14.) $G(s, n, y)$ の評価, $n > y$ の場合.

$$\begin{aligned} G(s, n, y) &= \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi}{qt^2} n^2)}{n^{1-s} \Gamma(\frac{s+a}{2})} \\ &= \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{(\frac{\pi}{qt^2} n^2)^{\frac{1-s+a}{2}}}{n^{1-s} \Gamma(\frac{s+a}{2})} \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{qt^2} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi. \end{aligned}$$

$$|G(s, n, y)| \ll \left(\frac{n}{\Delta\sqrt{qt}}\right)^a (qt)^{-\frac{s}{2}} \sqrt{t} \Delta^{a-1} |g_n(1)|.$$

$$g_n(1) = \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{t^2} n^2 \xi} \xi^{\frac{1-s+a}{2}-1} d\xi$$

$$= \frac{2}{1-a+a} \int_1^\infty \exp(-H_1(u) - iE_1(u)) du.$$

= 以下の形から明らかなように, $f_n(1)$ には, 2

$$\Delta \rightarrow \frac{1}{\Delta}, \quad a \rightarrow 1-a, \quad E(u) \rightarrow -E_1(u)$$

とある. また t は $\frac{1}{t}$ のに他ならない. 従って $n = y(1+\rho(n))$ とする
とすると,

$$|g_n(1)| \ll \begin{cases} \frac{e^{-H_1(1)}}{\sqrt{t}} & (\rho(n) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}) \\ \frac{e^{-H_1(1)}}{t((1+\rho(n))^2-1)} & (\rho(n) \geq \frac{1}{\sqrt{t}}). \end{cases}$$

よって $n > y$ のとき,

$$|G(s, n, y)| \ll \left(\frac{n}{\Delta \sqrt{qt}}\right)^a (qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^{\sigma-1} \cdot \frac{e^{-H_1(1)}}{1+\sqrt{t} \left|1-\left(\frac{n}{y}\right)^t\right|}.$$

$$H_1(1) = \frac{\pi n^2}{qt \Delta^2} \sin \frac{1}{t} \geq \frac{2n^2}{qt \Delta^2}$$

$$e^{-H_1(1)} \leq e^{-\frac{2n^2}{qt \Delta^2}} \leq \left(\frac{qt \Delta^2}{n^2}\right)^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{n^2}{qt \Delta^2}}$$

$$|G(s, n, y)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^{\alpha-1}}{1 + \sqrt{t} \left| 1 - \left(\frac{n}{y}\right)^2 \right|} e^{-\frac{n^2}{qt\Delta^2}}$$

15.) 13.) 及び 14.) の 5

全 z の n について

$$|G(s, n, y)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^{\alpha-1}}{1 + \sqrt{t} \left| 1 - \left(\frac{n}{y}\right)^2 \right|} e^{-\frac{n^2}{qt\Delta^2}}$$

$$= \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^{\alpha-1}}{1 + \sqrt{t} \left| 1 - \left(\frac{n}{y}\right)^2 \right|} e^{-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{n}{y}\right)^2}$$

16.) 以上 9.) 12.) 15.) をまとめると

条件

$$t \geq 1, \quad q \geq 2, \quad \Delta > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$x = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{qt}{2\pi}}, \quad y = \Delta \sqrt{\frac{qt}{2\pi}}, \quad \chi: \text{primitive mod } q,$$

M : 任意の正数

の t と t

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + \varepsilon(\chi) \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} + \\ &+ \sum_{n \leq x \log qt} \chi(n) F(s, n, x) + \sum_{n \leq y \log qt} \bar{\chi}(n) G(s, n, y) + \end{aligned}$$

$$+ O_M(\Delta^n (qt)^{-M}).$$

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^n}{1 + \sqrt{t} \left| 1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2 \right|} e^{-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

$$|G(s, n, x)| \ll \frac{(qt)^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^{n-1}}{1 + \sqrt{t} \left| 1 - \left(\frac{n}{y}\right)^2 \right|} e^{-\frac{1}{2\pi} \left(\frac{n}{y}\right)^2}$$

次に, $0 \leq t \leq 1$ の場合にはついでしてみておかなければならない。そこで, 以上までの考察中において, 条件 [Y] を次のように変える。

$$[Y'] \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq 1, \quad q \geq 2, \quad \Delta > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \\ z = \Delta^2 \\ x = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{q}{2\pi}}, \quad y = \Delta \sqrt{\frac{q}{2\pi}}. \end{array} \right.$$

17.) まず

$$F_1' = \sum_{n \geq x \log q} \frac{\chi(n)}{n^s} \frac{\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}, \frac{\pi}{q} n^2 z\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)} \quad \text{にて}$$

$$F_1' = -2 \frac{\left(\frac{\pi}{q} z\right)^{\frac{s+a}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_{x \log q}^{\infty} \left\{ \sum_{x \log q \leq n \leq u} \frac{\chi(n)}{n^s} \right\} e^{-\frac{\pi}{q} z u^2} u^{s+a-1} du$$

$$\left| \left(\frac{\pi}{q} z\right)^{\frac{s+a}{2}} \right| \ll \Delta^{a+a} q^{-\frac{\sigma+a}{2}}$$

$$\frac{1}{\left| \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) \right|} : \text{有界}$$

$$\left| \sum_{x \log q \leq n \leq u} \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \ll \frac{\sqrt{q} \log q}{(x \log q)^{\sigma}} \ll \Delta^{\sigma} q^{\frac{1-\sigma}{2}} \log q.$$

從, 2

$$|F_1'| \ll \Delta^{2a+a} q^{\frac{1}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} \log q e^{-\frac{\pi}{2q} z (x \log q)^2} \int_{x \log q}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2q} u^2} u^{a+a-1} du$$

$$\ll \Delta^{2a+a} q^{\frac{1}{2}-\sigma-\frac{a}{2}} \log q e^{-\frac{1}{4} (\log q)^2} \left(\frac{\sqrt{q}}{\Delta}\right)^{a+a}$$

$$\ll_M \Delta^{\sigma} q^{-M} \quad (M: \text{任意}).$$

18.) 全く同様.

$$F_2' = \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{n > y \log q} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}, \frac{\pi}{q^2} n^2\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$$

12. > 12. 1

$$|F_2'| \ll_M \Delta^{a-1} q^{-M} \quad \text{を得る.}$$

19.) 以上まとめると $[Y']$ なる条件下に

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + E(\chi) \left(\frac{x}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}}$$

$$+ \sum_{n \leq x \log q} \chi(n) F(s, n, x) + \sum_{n \leq y \log q} \bar{\chi}(n) G(s, n, y) + O_M(\Delta^a q^{-M}).$$

但し F, G は 9.) にある通り。

20.) $F(s, n, x)$ ($n \leq x$) の評価.

$$F(s, n, x) = - \frac{\left(\frac{\pi}{q} n^2 x\right)^{\frac{s+a}{2}}}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{q} n^2 x^2 \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi$$

$$= - \frac{\left(\frac{\pi}{q} n^2 x\right)^{\frac{s+a}{2}}}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} f_n(0)$$

$\frac{1}{|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)|}$ は有界であるから

$$|F(s, n, x)| \ll n^a \Delta^{a+a} q^{-\frac{a+a}{2}} |f_n(0)| \ll q^{-\frac{a}{2}} \Delta^a |f_n(0)|.$$

$$|f_n(0)| \ll \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{q} n^2 \Delta^2 \xi} \xi^{\frac{a+a}{2}-1} d\xi \ll 1.$$

よって

$$e^{-\frac{\pi}{q} n^2 \Delta^2} \geq e^{-\frac{1}{2}}$$

とあるから

$$|f_n(0)| \ll e^{-\frac{\pi}{b} n^2 \Delta^2} \quad (n \geq 1).$$

次に

$$n = x(1 - f(u)) \quad (f(u) \geq 0)$$

とすると,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\pi}{b} n^2 \Delta^2} &= e^{-\frac{1}{2} (1 - f(u))^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} (1 - f(u))^2} \cdot e^{-\frac{1}{4} (1 - f(u))^2} \\ &\leq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} (1 - f(u))^2} e^{-\frac{\pi}{2b} n^2 \Delta^2} \\ &\leq \frac{4e^{-\frac{1}{2}}}{1 + 1 - (1 - f(u))^2} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{n}{x}\right)^2} \\ &\leq \frac{4e^{-\frac{1}{2}}}{1 + \left|1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2\right|} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{n}{x}\right)^2}. \end{aligned}$$

従って $n \leq x$ のとき

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{q^{-\frac{s}{2}} \Delta^s}{1 + \left|1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2\right|} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{n}{x}\right)^2}.$$

21.) $F(s, n, x)$ ($n > x$) の評価.

$$F(s, n, x) = - \frac{\left(\frac{\pi}{q} n^2 x\right)^{\frac{s+a}{2}}}{n^s \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{q} n^2 x \xi} \xi^{\frac{s+a}{2}-1} d\xi$$

$$\frac{1}{|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)|} : \text{有界}$$

$$|F(s, n, x)| \ll n^a \Delta^{a+a} q^{-\frac{a+a}{2}} |f_n(1)|$$

$$\ll q^{-\frac{a}{2}} \Delta^a \left(\frac{n\Delta}{\sqrt{q}}\right)^a |f_n(1)|$$

$$|f_n(1)| \leq \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{q} n^2 \Delta^2 \xi} \xi^{\frac{a+a}{2}-1} d\xi$$

$$\leq e^{-\frac{\pi}{2q} n^2 \Delta^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2q} n^2 \Delta^2 \xi} \xi^{\frac{a+a}{2}-1} d\xi$$

$$\ll \left(\frac{\sqrt{q}}{n\Delta}\right)^{a+a} e^{-\frac{\pi}{2q} n^2 \Delta^2}$$

$s > 2$

$$|F(s, n, x)| \ll q^{-\frac{s}{2}} \Delta^s \left(\frac{\sqrt{q}}{n\Delta}\right)^s e^{-\frac{\pi}{2q} n^2 \Delta^2}$$

$$= \frac{1}{n^s} e^{-\frac{\pi}{2q} n^2 \Delta^2}$$

$$\ll \Delta^s q^{-\frac{s}{2}} e^{-\frac{\pi}{2q} n^2 \Delta^2}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 e^{-\frac{\sqrt{p}}{2q} n^2 \Delta^2} &= e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{n}{x}\right)^2} \\
 &= e^{-\frac{1}{8} \left(\frac{n}{x}\right)^2} \frac{1}{e^{\frac{1}{8} \left(\frac{n}{x}\right)^2}} \\
 &= e^{-\frac{1}{8} \left(\frac{n}{x}\right)^2} \frac{1}{e^{\frac{1}{8} \left(\left(\frac{n}{x}\right)^2 - 1\right) + \frac{1}{8}}} \\
 &\leq \frac{8 e^{-\frac{1}{8} \left(\frac{n}{x}\right)^2}}{1 + \left(\left(\frac{n}{x}\right)^2 - 1\right)} = \frac{8 e^{-\frac{1}{8} \left(\frac{n}{x}\right)^2}}{1 + |1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2|}
 \end{aligned}$$

従って $n > x$ のときは

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{q^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^n}{1 + |1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2|} e^{-\frac{1}{8} \left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

22.) 以上 20.) 及び 21.) から,

全ての n について条件 [Y'] のときは

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{q^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^n}{1 + |1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2|} e^{-\frac{1}{8} \left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

23.) $G(s, n, y)$ についても同様にして

全ての n について条件 [Y'] のときは

$$|G(s, n, y)| \ll \frac{q^{-\frac{\sigma}{2}} \Delta^{n-1}}{1 + |1 - \left(\frac{n}{y}\right)^2|} e^{-\frac{1}{8} \left(\frac{n}{y}\right)^2}$$

以上全てをまとめると,

定理 (A.F. Lavrik)

$$\tau = \max(1, |t|), \quad q \geq 2, \quad \Delta > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$x = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}, \quad y = \Delta \sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}, \quad M: \text{任意の正数},$$

χ : primitive mod q .

とす

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} + \varepsilon(\chi) \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(\frac{1-s+\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{s+\alpha}{2})} \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} + \\ &+ \sum_{n \leq x \log q\tau} \chi(n) F(s, n, x) + \sum_{n \leq y \log q\tau} \bar{\chi}(n) G(s, n, y) + \\ &+ O_M((\Delta^\alpha + \Delta^{\alpha-1})(q\tau)^{-M}) \end{aligned}$$

なる近似函数等式が成立し, 更に

$$|F(s, n, x)| \ll \frac{(q\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \Delta^\alpha}{1 + \sqrt{\tau} \left|1 - \left(\frac{n}{x}\right)^2\right|} e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

$$|G(s, n, y)| \ll \frac{(q\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \Delta^{\alpha-1}}{1 + \sqrt{\tau} \left|1 - \left(\frac{n}{y}\right)^2\right|} e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n}{y}\right)^2}.$$

以下, この Landau の定理をもとにして, はじめにのいた
L-函数の4乗平均値を計算する。

$\gamma = \tau$, 2より3は

$$[Z] \begin{cases} s = \frac{1}{2} + i\tau, & \tau = \max(1, |t|), & q \geq 2 \\ xy = \frac{\tau\tau}{2\pi}, & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau\tau}{2\pi}} \leq x \leq 2 \sqrt{\frac{\tau\tau}{2\pi}} \\ \text{従, } \tau & \frac{1}{2} \leq \Delta \leq 2 \end{cases}$$

とまとめておく。

24.)

$$\begin{aligned} |L(s, \chi)|^4 &\ll \left| \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} \right|^4 + \left| \sum_{n \leq y} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^{1-s}} \right|^4 + \\ &+ \left| \sum_{n \leq x \log q\tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 + \left| \sum_{n \leq y \log q\tau} \bar{\chi}(n) G(n, s, y) \right|^4 + \\ &+ O_M((q\tau)^{-M}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n, x^2) \right|^2 + \left| \sum_{n \leq y^2} \frac{\bar{\chi}(n)}{n^s} a(n, y^2) \right|^2 + \\ &+ \left| \sum_{n \leq x \log q\tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 + \left| \sum_{n \leq y \log q\tau} \bar{\chi}(n) G(n, s, y) \right|^4 + O((q\tau)^{-2}). \end{aligned}$$

但し

$$a(n, x^2) = \sum_{\substack{n = d_1 d_2 \\ d_1, d_2 \leq x}} 1 \quad |a(n, x^2)|, |a(n, y^2)| \leq d(n) : \text{約数}$$

この両辺に $x dx$ をかけて $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}} \leq x \leq 2 \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}$ で積分を行う。

$$\begin{aligned} & 8\tau |L(s, \chi)|^4 \\ & \ll \int_{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}}^{2 \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq x^2} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n, x^2) \right|^2 dx + \\ & + \int_{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}}^{2 \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq y^2} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n, y^2) \right|^2 dy + \\ & + \int_{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}}^{2 \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq 2 \log 8\tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 x dx + \\ & + \int_{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}}^{2 \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq y \log 8\tau} \bar{\chi}(n) G(n, s, y) \right|^4 x dx + O((8\tau)^{-1}). \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad xy = \sqrt{\frac{8\tau}{2\pi}} \quad \tau \text{ 及び } 3 \text{ 及び } 5,$$

$$y dx + 2 dy = 0$$

$$d(x^2) = 2x dx = -2y \cdot \frac{2}{y} dy$$

$$\text{よして明らか} = \frac{x}{y} \leq 4.$$

従て、上記の積分のうち、才2, 才4番目は y の積分になおしてかまわない。よして $x^2 \rightarrow \xi$ ($y^2 \rightarrow \xi$) と変数変換して

$$\begin{aligned} |L(s, \chi)|^4 &\ll \frac{1}{q\tau} \int_{\frac{q\tau}{8\pi}}^{\frac{2q\tau}{\pi}} \left| \sum_{n \leq \xi} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n, \xi) \right|^2 d\xi + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{q\tau}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq x \log q\tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 dx + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{q\tau}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq y \log q\tau} \bar{\chi}(n) G(n, s, y) \right|^4 dy + O((q\tau)^{-2}). \end{aligned}$$

25.) まず

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \frac{1}{\sqrt{q\tau}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq x \log q\tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 dx$$

について考へる。これは、全部の $\chi \bmod q$ に和をひくわけ、

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq x \log q \tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

を計算する = ことによつて評価される。

以下において

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{N}{q}\right) \sum_{M \leq n \leq M+N} |a_n|^2$$

(a_n : 任意の複素数)

をたいて用いる。これは証明は容易である。

さて、

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq x \log q \tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq \frac{x}{2}} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 + \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \geq 2x} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 \\ &\quad + \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4. \end{aligned}$$

26.)

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq \frac{x}{2}} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$= \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq \frac{x^2}{4}} \chi(n) E(n, s, x) \right|^2.$$

$$P(n, s, x) = \sum_{\substack{lm=n \\ l, m \leq \frac{x}{2}}} F(l, s, x) F(m, s, x)$$

$$|P(n, s, x)| \leq \sum_{\substack{lm=n \\ l, m \leq \frac{x}{2}}} |F(l, s, x)| |F(m, s, x)|$$

$$\ll \sum_{\substack{lm=n \\ l, m \leq \frac{x}{2}}} \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{4}}}{1 + \sqrt{\tau} \left| 1 - \left(\frac{l}{x}\right)^2 \right|} \cdot \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{4}}}{1 + \sqrt{\tau} \left| 1 - \left(\frac{m}{x}\right)^2 \right|}$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{q\tau} \cdot \tau} d(n) \quad (\because l, m \leq \frac{x}{2})$$

x, τ

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq \frac{x}{2}} \chi(n) F(n, s, x) \right|^2$$

$$\ll \varphi(q) \left(1 + \frac{x^2}{q}\right) \sum_{n \leq x^2} \frac{1}{q\tau^3} d^2(n)$$

$$\ll \varphi(q) (1 + \tau) \frac{1}{q\tau^3} \cdot q\tau \log^3 q\tau \quad (\because \sum_{n \leq u} d^2(n) \ll u \log^3 u)$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau.$$

27). 次は

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{2x \leq n \leq x \log q \tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 \\ &= \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{j=1}^{\ll \log \log q \tau} \sum_{2^j x \leq n < 2^{j+1} x} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4. \end{aligned}$$

== 次のように注意する: Hölder 不等式により

$$\begin{aligned} \left| \sum_j b_j \right|^4 &= \left| \sum_j \frac{1}{2^{\frac{j}{3}}} \cdot 2^{\frac{j}{3}} b_j \right|^4 \\ &\leq \left(\sum_j \frac{1}{2^{\frac{j}{3}}} \right)^3 \left(\sum_j 2^j |b_j|^4 \right) \\ &\ll \sum_j 2^j |b_j|^4. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{2x \leq n \leq x \log q \tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 \\ &\ll \sum_{j=1}^{\ll \log \log q \tau} 2^j \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{2^j x \leq n < 2^{j+1} x} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 \\ &= \sum_{j=1}^{\ll \log \log q \tau} 2^j \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{2^j x^2 \leq n < 2^{j+2} x^2} \chi(n) P_j(n, s, x) \right|^2. \end{aligned}$$

$$P_j(n, s, x) = \sum_{\substack{lm=n \\ 2^j x \leq l, m < 2^{j+1} x}} F(l, s, x) F(m, s, x)$$

$$\begin{aligned} |P_j(n, s, x)| &\ll \sum_{\substack{lm=n \\ 2^j x \leq l, m < 2^{j+1} x}} \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{8}(\frac{m}{x})^2}}{1 + \sqrt{\tau} |1 - (\frac{m}{x})^2|} \cdot \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{8}(\frac{l}{x})^2}}{1 + \sqrt{\tau} |1 - (\frac{l}{x})^2|} \\ &\ll \frac{(q\tau)^{-\frac{1}{2}}}{\tau 2^{4j}} e^{-\frac{1}{4} 2^{2j}} d(n). \end{aligned}$$

従, τ

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{2^{2j} x^2 \leq n < 2^{2j+2} x^2} \chi(n) P_j(n, s, x) \right|^2$$

$$\ll \varphi(q) \left(1 + \frac{2^{2j+2}}{q} x^2\right) \sum_{n \leq 2^{2j+2} x^2} \frac{e^{-\frac{1}{2} 2^{2j}}}{q \tau^3 2^{8j}} d^2(n)$$

$$\ll \varphi(q) \frac{2^{2j+2}}{q} x^2 \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} 2^{2j}}}{q \tau^3 2^{8j}} \cdot x^2 2^{2j+2} \log^3 q \tau$$

$$(\because x^2 2^{2j+2} \ll q \tau \log^2 q \tau)$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q \tau \cdot e^{-\frac{1}{2} 2^{2j}}$$

よ, τ

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{2x \leq n \leq 2 \log q \tau} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q \tau \sum_j 2^j e^{-\frac{1}{2} 2^j} \ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q \tau.$$

28.) 更に

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{\frac{1}{2}x < n < 2x} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\ll \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{j=0}^{2^{j+1} \leq \sqrt{x}} \sum_{x(1+\frac{2^j}{\sqrt{x}}) < n \leq x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{x}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 +$$

$$+ \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{j=0}^{2^{j+2} \leq \sqrt{x}} \sum_{x(1-\frac{2^{j+1}}{\sqrt{x}}) \leq n < x(1-\frac{2^j}{\sqrt{x}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 +$$

$$+ \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x(1-\frac{1}{\sqrt{x}}) \leq n \leq x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\ll \sum_{j=0}^{2^{j+1} \leq \sqrt{x}} 2^j \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x(1+\frac{2^j}{\sqrt{x}}) < n \leq x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{x}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{2^{j+2} \leq \sqrt{c}} 2^j \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{2(1-\frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}}) \leq n < 2(1-\frac{2^j}{\sqrt{c}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4 + \\
& + \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x(1-\frac{1}{\sqrt{c}}) \leq n \leq x(1+\frac{1}{\sqrt{c}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4.
\end{aligned}$$

29.) $\neq 3''$,

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x(1+\frac{2^j}{\sqrt{c}}) < n \leq x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$= \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x^2(1+\frac{2^j}{\sqrt{c}})^2 < n \leq x^2(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}})^2} \chi(n) P'_j(n, s, x) \right|^4.$$

$$\begin{aligned}
P'_j(n, s, x) &= \sum_{\substack{\ell m = n \\ x(1+\frac{2^j}{\sqrt{c}}) < \ell, m \leq x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}})}} F(\ell, s, x) F(m, s, x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|P'_j(n, s, x)| &\ll \sum_{\substack{\ell m = n \\ x(1+\frac{2^j}{\sqrt{c}}) < \ell, m \leq x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}})}} \frac{(\ell \tau)^{-\frac{1}{4}}}{1 + \sqrt{c} \left| 1 - (\frac{\ell}{x})^4 \right|} \cdot \frac{(\ell \tau)^{-\frac{1}{4}}}{1 + \sqrt{c} \left| 1 - (\frac{m}{x})^2 \right|} \\
&\ll \frac{d(n)}{\sqrt{q\tau} 2^{2j}}.
\end{aligned}$$

よ、 τ

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x(1+\frac{2^j}{\sqrt{c}}) < n \leq x(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\ll \varphi(q) \left\{ 1 + \frac{1}{q} \left(x^2 \left(1 + \frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}} \right)^2 - x^2 \left(1 + \frac{2^j}{\sqrt{c}} \right)^2 \right) \right\} \sum_{x^2 \left(1 + \frac{2^j}{\sqrt{c}} \right)^2 < n \leq x^2 \left(1 + \frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}} \right)^2} \frac{d^2(n)}{q \tau 2^{4j}}$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q \tau} \cdot \frac{1}{2^{4j} q} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{c}} 2^j \sum_{x^2 \left(1 + \frac{2^j}{\sqrt{c}} \right)^2 < n \leq x^2 \left(1 + \frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}} \right)^2} d^2(n)$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q \sqrt{c}} 2^{-3j} \sum_{x^2 \left(1 + \frac{2^j}{\sqrt{c}} \right)^2 < n \leq x^2 \left(1 + \frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}} \right)^2} d^2(n)$$

全く同様にして

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x \left(1 - \frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}} \right) \leq n < x \left(1 - \frac{2^j}{\sqrt{c}} \right)} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q \sqrt{c}} 2^{-3j} \sum_{x^2 \left(1 - \frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}} \right)^2 \leq n < x^2 \left(1 - \frac{2^j}{\sqrt{c}} \right)^2} d^2(n)$$

又、更に、

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x(1-\frac{1}{\sqrt{c}}) \leq n \leq x(1+\frac{1}{\sqrt{c}})} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{c}} \sum_{x^2(1-\frac{1}{\sqrt{c}})^2 \leq n \leq x^2(1+\frac{1}{\sqrt{c}})^2} d^2(n)$$

† 容易にわかる。

30.) 以上 28.) 29.) をまとめると,

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{c}} \sum_{j=0}^{j+1 \leq \sqrt{c}} 2^{-2j} \sum_{x^2(1+\frac{2^j}{\sqrt{c}})^2 \leq n \leq x^2(1+\frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}})^2} d^2(n) +$$

$$+ \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{c}} \sum_{j=0}^{j+2 \leq \sqrt{c}} 2^{-2j} \sum_{x^2(1-\frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}})^2 \leq n \leq x^2(1-\frac{2^j}{\sqrt{c}})^2} d^2(n) +$$

$$+ \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{c}} \sum_{x^2(1-\frac{1}{\sqrt{c}})^2 \leq n \leq x^2(1+\frac{1}{\sqrt{c}})^2} d^2(n)$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{c}} \sum_{\frac{x^2}{4} \leq n \leq x^2(1-\frac{1}{\sqrt{c}})^2} d^2(n) \sum_j (i) \frac{1}{2^{2j}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{c}} \sum_{x^2(1+\frac{1}{\sqrt{c}})^2 \leq n \leq 4x^2} d^2(n) \sum_j^{(ii)} \frac{1}{2^{2j}} + \\
& + \frac{\varphi(q)}{q\sqrt{c}} \sum_{x^2(1-\frac{1}{\sqrt{c}})^2 \leq n \leq x^2(1+\frac{1}{\sqrt{c}})^2} d^2(n)
\end{aligned}$$

但し, $\sum_j^{(i)}$ には n に対して,

$$x^2 \left(1 + \frac{2^j}{\sqrt{c}}\right)^2 \leq n \leq x^2 \left(1 + \frac{2^{j+1}}{\sqrt{c}}\right)^2$$

より,

$$\frac{1}{2} \sqrt{c} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} - 1\right) \leq 2^j \leq \sqrt{c} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} - 1\right)$$

又, $\sum_j^{(ii)}$ には n に対して

$$\frac{1}{2} \sqrt{c} \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{x}\right) \leq 2^j \leq \sqrt{c} \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{x}\right).$$

従って

$$\sum_j^{(i)} \frac{1}{2^{2j}}, \quad \sum_j^{(ii)} \frac{1}{2^{2j}} \ll \frac{1}{1+c \left|1 - \frac{\sqrt{n}}{x}\right|^2}$$

とわかる。よって,

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \chi(n) F(n, s, x) \right|^4$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q^{\frac{3}{2}}\tau} \sum_{n \leq \frac{8}{\pi} q\tau} d^2(n) \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \frac{q\tau}{q\tau + \tau(x - \sqrt{n})^2} dx$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q^{\frac{3}{2}}\tau} \sum_{n \leq \frac{8}{\pi} q\tau} d^2(n) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{q + (x - \sqrt{n})^2} dx$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q^{\frac{3}{2}}\tau} \sum_{n \leq \frac{8}{\pi} q\tau} d^2(n) \sqrt{q}$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{\tau} \log^3 q\tau + \frac{\varphi(q)}{q\tau} \cdot q\tau \log^3 q\tau$$

$$\ll \varphi(q) \log^3 q\tau.$$

全く同様にして

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \frac{1}{\sqrt{q\tau}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}}^{2\sqrt{\frac{q\tau}{2\pi}}} \left| \sum_{n \leq y \log q\tau} \bar{\chi}(n) G(n, s, y) \right|^2 dy$$

$$\ll \varphi(q) \log^3 q\tau.$$

32.) 結局 24.) と 31.) とをまとめると

$$\sum_{\chi \bmod q}^* |L(\frac{1}{2}+it, \chi)|^4$$

$$\ll \frac{1}{q^T} \sum_{\chi \bmod q} \int_{\frac{8\pi}{8\pi}}^{\frac{2}{\pi} q^T} \left| \sum_{n \leq \xi} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n, \xi) \right|^2 d\xi + \varphi(q) \log^3 q^T.$$

33) さて, $|t| \leq 2$ の場合は $\xi \leq \frac{4}{\pi} q$ であるから

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq \xi} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n, \xi) \right|^2$$

$$\ll \varphi(q) \left(1 + \frac{\xi}{q}\right) \sum_{n \leq \xi} \frac{d^4(n)}{n} \ll \varphi(q) \log^4 q$$

すなわち

$|t| \leq 2$ なる時は

$$\sum_{\chi \bmod q}^* |L(\frac{1}{2}+it, \chi)|^4 \ll \varphi(q) \log^4 q.$$

これは Linnik の結果である。

従って

$0 \leq T \leq 2$ なる時は

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-T}^T |L(\frac{1}{2}+it, \chi)|^4 dt \ll T \varphi(q) \log^4 q^{(T+2)}.$$

34.) $\chi = \chi^*$, $T \geq 2$ とする

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-T}^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt \ll \varphi(q) \log^4 q +$$

$$+ \sum_{\chi \bmod q}^* \int_2^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt.$$

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_2^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt$$

$$\leq \sum_{j=1}^{2^{j+1} \leq T} \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{2^j}^{2^{j+1}} |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt$$

前節の結果をもちいて,

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_{2^j}^{2^{j+1}} |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt$$

$$\ll 2^j \varphi(q) \log^3 q T + \frac{1}{q 2^j} \sum_{\chi \bmod q} \int_{\frac{q 2^j}{8\pi}}^{\frac{2}{\pi} q 2^{j+1}} d\xi \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left| \sum_{n \leq \xi} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n, \xi) \right|^2 dt.$$

ここで 強力な Gallagher の不等式

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{-T_0}^{T_0} \left| \sum_{n \leq N} a_n \chi(n) n^{-it} \right|^2 dt$$

$$\ll \varphi(q) \left(T_0 + \frac{N}{q} \right) \sum_{n \leq N} |a_n|^2$$

(但し $T_0 \geq 2$, a_n は任意の複素数)

Σ ≠ ∅ として

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left| \sum_{n \in \Sigma} \frac{\chi(n)}{n^s} a(n, \Sigma) \right|^2 dt$$

$$\ll \varphi(q) \left(2^j + \frac{\Sigma}{q} \right) \sum_{n \in \Sigma} \frac{d^2(n)}{n}$$

$$\ll \varphi(q) \left(2^j + \frac{\Sigma}{q} \right) \log^4 \Sigma$$

$$\ll \varphi(q) 2^j \log^4 q T \quad \left(\because \Sigma \leq \frac{2}{\pi} q 2^{j+1} \right).$$

あるいは

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_{2^j}^{2^{j+1}} |L(\tfrac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt \ll 2^j \varphi(q) \log^4 q T.$$

従って

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \bmod q}^* \int_2^T |L(\tfrac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt &\ll \sum_{\substack{2^{j+1} \leq T \\ j=1}} 2^j \varphi(q) \log^4 q T \\ &\ll T \varphi(q) \log^4 q T. \end{aligned}$$

以上, 33) 及び 34) をまとめると,

定理 (Larrik - Montgomery - Huxley)

任意の $T \geq 0$ について

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-T}^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt \ll T \varphi(q) \log^4 q (T+2).$$

又, このことから容易に次のことを導くことができる,

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{-T}^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt \ll T q \log^4 q (T+2).$$

更にまた, Large Sieve をとり入れるには

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-T}^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt \ll T^2 Q^2 \log^{16} Q (T+2)$$

を示すことは容易である。

— Kész —