

一次元非線形 Schrödinger 方程式
の Cauchy 問題の解について

早大理工 堤 正義 (Masayoshi Tsutsumi)

早大理工 仲光 邦昭 (Kuniaki Nakamitsu)

早大理工 林 仲夫 (Nakao Hayashi)

1. Introduction. 我々は次の非線形 Schrödinger 方程式の
Cauchy 問題を考えることにする。

$$(1.1) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda |u|^{p-1} u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$(1.2) \quad u(0, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

我々の目的は $\lambda > 0$, $p > 1$ が奇数, $\phi \in H^1(\mathbb{R})$ であれば
 $|x| \rightarrow \infty$ のとき ϕ が十分速く減少しているという条件のもと
で (1.1), (1.2) の解が $t \neq 0$ で 0 にならないということ、
すなわち、非線形放物形方程式の解のもつ smoothing effect
や、T. Kato [7] によって示された KdV 方程式の解の
smoothing effect と類似の性質を (1.1), (1.2) の解が持つこと
を示すことにある。我々は上記のことを次の2つの事実を
もちいることにより示すことが出来る。

1. 方程式 (1.1) は次の2つの保存量をもつ。

$$E_0(t) = \int |u(t, x)|^2 dx,$$

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int |Du(t, x)|^2 dx + \frac{\lambda}{p+1} \int |u(t, x)|^{p+1} dx.$$

2. 作用素 $J \triangleq e^{ix^2/4t} (2it) D (e^{-ix^2/4t})$

が Schrödinger 作用素 $L = i\partial/\partial t + \frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2$ と交換可能である。すなわち

$$LJ = JL.$$

ここで $D = \partial/\partial x$ である。

注) 初期値 $\phi \in H^1(\mathbb{R})$ という条件を $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ という条件に変えても $p=3$ であれば、ある程度同様の結果が得られる。その場合は上の事実は必要としない。
(くわしくは論文 [4] を参照。)

以下この論説で用いる記号の説明及び有用な補題を述べることにする。

$n \in \mathbb{N}$ (自然数), $1 \leq p \leq \infty$ とし $[s]$ を s をこえないが s に等しい最小の整数をあらわすことにする。 $L^p = L^p(\mathbb{R})$, $H^{n,p} = H^{n,p}(\mathbb{R})$ とそれぞれ次の norm を持つ通常の Sobolev 空間とする。

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess. sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad p = \infty,$$

$$\|f\|_{n,p} = \sum_{j=0}^n \|D^j f\|_p$$

$\mathbb{R}$ の区間 I と $\|\cdot\|_p$ なる norm を持つ Banach 空間 B に対して $C(I, B)$ (あるいは $C_b(I, B)$) により I から B への連続関数 (あるいは有界連続関数) の空間を表わす。

$C^l(I, B)$ (あるいは $C_b^l(I, B)$) を I から B への l 回連続微分可能 (あるいは l 回有界連続微分可能) な空間とする。簡単のために $H^{m,2}$ を H^m であらわすことにする。又 $C(a, b, \dots)$ により、 $a, b, \dots$ に依存した定数をあらわすことにし、とくに $a, b, \dots$ を明示する必要がないときは C で表わすことにする。

次の Gagliardo-Nirenberg の不等式 (以下簡単のため G-N の不等式とする。) は $J^n(|u|^{r-1}u)$ の評価を行なうときに有用である。

補題 1. $1 \leq p, r \leq \infty$, $j, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ かつ $j \leq m$ とする。そのとき次の不等式が成立する。

$$(1.3) \quad \|D^j u\|_p \leq M \|D^m u\|_r^a \|u\|_p^{1-a},$$

ここで $\frac{1}{p} = f + a((\frac{1}{r}) - m) + (1-a)\frac{1}{q}$ で
 a は次の不等式を満足するものとする。

$$(1.4) \quad f/m \leq a \leq 1$$

なお (1.3) における M は m, f, g, r, a へのみ依存した定数である。

証明は Friedman [1] 参照。

2. H^1 -solutions. 最初に我々の得た結果を述べることにする。

定理 1. $\lambda > 0$ のとき $1 < p < \infty$, $\lambda < 0$ のとき $1 < p < 5$. $\phi \in H^1$, $x^m \phi \in L^2$ ($m \in \mathbb{N}$) とし, もし p が奇数でなければ $p > n+1$ とする。以上の仮定のもと, (1.1), (1.2) の解 $u = u(t, x)$ が一意的に存在し次の性質を満足する。

$$(2.1) \quad u \in C_b(\mathbb{R}; H^1)$$

$$(2.2) \quad J^m u \in C(\mathbb{R}; L^2), \quad m = 1, 2, \dots, n$$

$$(2.3) \quad \|u(t)\|_2 = \|\phi\|_2$$

$$(2.4) \quad \|Du(t)\|_2^2 + \frac{2\lambda}{p+1} \|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \\ = \|D\phi\|_2^2 + \frac{2\lambda}{p+1} \|\phi\|_{p+1}^{p+1}$$

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad |Ju(t)|_2^2 + \frac{8t^2\lambda}{p+1} |u(t)|_{p+1}^{p+1} \\
 = |x\phi|_2^2 + \frac{4\lambda(5-p)}{p+1} \int_0^t \tau |u(\tau)|_{p+1}^{p+1} d\tau
 \end{aligned}$$

さらに次の不等式を満足する。

$$(2.6) \quad |J^m u(t)|_2^2 \leq C_m \eta_m(t), \quad m=1, 2, \dots, n$$

ここで C_m は $p, \lambda, m, |\phi|_{1,2}, |x^m \phi|_2$ により依存する定数である。又 $\eta_m(t)$ は次のとおりである。

$$\lambda > 0, \quad p > (3 + \sqrt{17})/2 \quad \text{のとき} \quad \eta_m(t) = 1$$

$$\lambda > 0, \quad p = (3 + \sqrt{17})/2 \quad \text{のとき} \quad \eta_m(t) = (1 + |t|)^{C_m}$$

$$\lambda > 0, \quad 1 < p < (3 + \sqrt{17})/2 \quad \text{のとき} \quad \eta_m(t) = \exp[C_m(1 + |t|)^{1 - \frac{(p-1)^2}{p+3}}]$$

$$\lambda < 0, \quad 1 < p < 5 \quad \text{のとき} \quad \eta_m(t) = \exp[C_m(1 + |t|)]$$

注 1.1. $J^m u = e^{ix^2/4t} (2it)^m D^m (e^{-ix^2/4t} u)$ であるから

(2.2) より

$$e^{-ix^2/4t} u \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; H^m).$$

系 1.1. 定理 1 の仮定の下 (1.1), (1.2) の解 u は

$$u \in \bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{n-2m-1}(\mathbb{R}))$$

を満足する。

系 1.2. 定理 1 において $p \in \text{奇数}$ とし, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $x^m \phi \in L^2$ とすれば (1.1), (1.2) の解は $t \neq 0$ で t と x に関して無限回微分可能である。

注 1.2. 多次元に関する類似の結果については論文 [5] 参照。

以下定理 1 の証明をすることにする。

定理 1 の証明. $t > 0$ だけを扱うことにする。(仮
ぜむら $t < 0$ は同様に扱うことが出来るから。) 以下我々
は (1.1), (1.2) に対する次の近似方程式を考えることにする。

$$(2.7) \quad i u_t + D^2 u = \lambda \phi_k(|u|^p) u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(2.8) \quad u(0, x) = \phi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ここで p が奇数のとき $\phi_k(s) = s^{(p-1)/2}$, p が奇数でない
とき $\phi_k(s) = s^{(p-1)/2} \exp(-s^{-\delta/2}/k)$, $\delta > 0$ とし
 $\phi_k(x) \in \mathcal{S}$ (急減少関数) の要素で $\phi_k \rightarrow \phi$ in H^1
 $x^m \phi_k \rightarrow x^m \phi$ in L^2 as $k \rightarrow \infty$ とする。

M. Tsutsumi [8] によつておのおのの k に対して

(2.7), (2.8) の一意的解 $u_k = u_k(t, x)$ が存在して
 $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ が示されているので、我々は定理 1
 の結果を得るために必要な a-priori 評価を (2.7), (2.8) の
 解に対して示せばよい。

補題 2.1. u_k を (2.7), (2.8) の解 とすると
 次の評価式を得ることが出来る。

$$(2.9) \quad \|u_k(t)\|_2 = \|\phi_k\|_2$$

$$(2.10) \quad \|Du_k(t)\|_2^2 + \lambda \int G_k(|u_k(t, x)|^2) dx \\
= \|D\phi_k\|_2^2 + \lambda \int G_k(|\phi_k|^2) dx$$

$$(2.11) \quad \|Ju_k(t)\|_2^2 + 4t^2 \lambda \int G_k(|u_k(t, x)|^2) dx \\
= \|x\phi_k\|_2^2 + 4\lambda \int_0^t \int H_k(|u_k(s, x)|^2) ds dx$$

ここで $G_k(s) = \int_0^s f_k(\sigma) d\sigma$, $H_k(s) = 3G_k(s) - f_k(s)s$ である。

証明 (2.9), (2.10) は (2.7) の両辺に $\bar{u}_k$ 及び $\overline{(u_k)_t}$
 をかけて部分積分を行なうことにより得られる。又 (2.11)
 は Ginibre - Velo [2] により得られた pseudoconformal
 law である。 Q.E.D.

以下 u_k は (2.7), (2.8) の解とする。

補題 2.2. u_k は次の不等式を満足する。

$$(2.12) \quad |u_k(t)|_{1,2} \leq C,$$

さらにもし $\lambda > 0$ ならば

$$(2.13) \quad |u_k(t)|_{\infty} \leq C(1+t)^{-\sigma}, \quad t > 0$$

ここで C は k, t に依存しない定数である。又

$$\sigma = \min \{1/2, (p-1)/(p+3)\}.$$

証明 (2.12) は (2.9), (2.10) よりあきらか。 $p \geq 5$, $\lambda > 0$ のとき (2.11) より

$$|Ju_k(t)|_2 \leq C,$$

よって G-N の不等式 及び (2.12) より

$$|u_k(t)|_{\infty} \leq C t^{-1/2} |Ju_k(t)|_2^{1/2} |u_k(t)|_2^{1/2} \leq C t^{1/2},$$

又 (2.12) より $|u_k(t)|_{\infty} \leq C$ であるから (2.13) が得られる。次に $1 < p < 5$, $\lambda > 0$ を考える。(2.11) より次の不等式が得られる。

$$t^2 |u_k(t)|_{p+1}^{p+1} \leq \frac{p+1}{8} |\chi \phi_k|_2^2 + \frac{5-p}{2} \int_0^t s |u_k(s)|_{p+1}^{p+1} ds$$

Kadekawa [6] により

$$(2.14) \quad |u_k(t)|_{p+1} \leq C t^{-(p-1)/2(p+1)}, \quad t > 1$$

これと (2.11) より

$$(2.15) \quad |Ju_k(t)|_2 \leq C t^{1-\frac{1}{4}(p-1)}, \quad t > 1$$

G-N の不等式 より

$$|u_k(t)|_\infty \leq C t^{-\frac{2}{p+3}} |Ju_k(t)|_2^{\frac{2}{p+3}} |u_k(t)|_{p+1}^{\frac{p+1}{p+3}}$$

これと (2.14), (2.15) より

$$|u_k(t)|_\infty \leq C t^{-(p-1)/(p+3)}, \quad t > 1$$

以上より補題は示された。

Q. E. D.

補題 2.3. u_k は次の不等式を満足する。

$$(2.16) \quad |J^m u_k(t)|_2 \leq C_m \eta_m(t), \quad m=1, 2, \dots, n,$$

ここで $\eta_m(t)$ は定理 1 にあるものと同じである。又 C_m は $p, \lambda, m, \|\phi\|_2, \|x^m \phi\|_2$ により依存した定数で k, t には依存していない。

証明. J と L が交換可能であるから $J^m u_k = w_{m,k}$ とおくと $w_{m,k}$ は次の方程式を満足する。

$$(2.17) \quad i(w_{m,k})_t + D^2 w_{m,k} = \lambda J^m (\phi_k(|u_k|) u_k)$$

$$(2.18) \quad w_{m,k}(0) = x^m \phi_k, \quad m=1, 2, \dots, n.$$

$\lambda < 0$ のときも $\lambda > 0$ のときと同様に扱うことができるので $\lambda > 0$ だけを考えることにする。(2.17) に $\bar{w}_{m,k}$ をかけて

x に関して部分積分をし虚数部をとれば次の式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad & \frac{d}{dt} |w_{m,k}(t)|_2^2 \\
 &= 2\lambda I_m \int [J^m(f_k(|u_k(t,x)|^2)u_k(t,x)) \bar{w}_{m,k}(t,x) dx \\
 &\leq C |(2tD)^m f_k(|v_k(t)|^2)v_k(t)|_2 |w_{m,k}(t)|_2
 \end{aligned}$$

ここで $v_k = e^{-ix^2/4t} u_k$ である。G-N の不等式より

$$\begin{aligned}
 |(2tD)^m f_k(|v_k|^2)v_k|_2 &\leq C_m |v_k|_\infty^{p-1} |w_{m,k}|_2 \\
 &\leq C_m |u_k|_\infty^{p-1} |w_{m,k}|_2
 \end{aligned}$$

上の式と (2.19), 及び (2.13) より

$$(2.20) \quad \frac{d}{dt} |w_{m,k}(t)|_2^2 \leq C_m (1+t)^{-\sigma(p-1)} |w_{m,k}(t)|_2^2$$

これから $\sigma(p-1) > 1$ ならば

$$|w_{m,k}(t)|_2^2 \leq C_m,$$

$\sigma(p-1) = 1$ ならば

$$|w_{m,k}(t)|_2^2 \leq C_m (1+t)^{C_m},$$

$0 < \sigma(p-1) < 1$ ならば

$$|w_{m,k}(t)|_2^2 \leq C_m \exp[C_m (1+t)^{1-\sigma(p-1)}],$$

以上より (2.16) がいえたことになる。

B. E. D.

次に $w_{m,k}$ の収束について考えることにする。

補題 2.4. $p > 2$ とする。そのとき任意の $T > 0$

に対して $\{u_k\}$ は次の不等式を満足する。

$$(2.21) \quad |u_k(t) - u_j(t)|_{1,2}^2 \leq C(T) \left\{ |\phi_k - \phi_j|_{1,2}^2 + A_p^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j} \right)^2 \right\}$$

ここで $C(T)$ は k, j に依存しない定数, A_p は p が奇数のとき 0, p が奇数でないとき 1 とする。

証明. $v_{k,j} = u_j - u_k$ とする。方程式 (2.7) より次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |v_{k,j}(t)|_{1,2}^2 &= 2\lambda \operatorname{Im} \int [\mathcal{F}_k(|u_k|^2)u_k - \mathcal{F}_j(|u_j|^2)u_j] \overline{v_{k,j}} dx \\ &\quad + 2\lambda \operatorname{Im} \int [D(\mathcal{F}_k(|u_k|^2)u_k - \mathcal{F}_j(|u_j|^2)u_j)] D\overline{v_{k,j}} dx \\ &\leq C(|u_k|_\infty^{p-1} + |u_j|_\infty^{p-1}) |v_{k,j}|_2^2 \\ &\quad + CA_p \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j} \right) (|u_k|_\infty^{p-1-\delta} + |u_j|_\infty^{p-1-\delta}) \\ &\quad \times (|u_k|_{1,2} + |u_j|_{1,2}) (|v_{k,j}|_2 + |Dv_{k,j}|_2) \\ &\quad + C(|u_k|_\infty^{p-2} + |u_j|_\infty^{p-2}) (|Dv_{k,j}|_2 + |Dv_j|_2) \\ &\quad \times (|v_{k,j}|_\infty |Dv_{k,j}|_2 + |Dv_{k,j}|_2^2) \end{aligned}$$

(2.12) より

$$\frac{d}{dt} \|U_{k,j}(t)\|_{1,2}^2 \leq C \|U_{k,j}(t)\|_{1,2}^2 + CA_p^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j}\right)^2$$

これより (2.21) は容易に得られる。

Q.E.D.

補題 2.5. p が奇数でないとき $p > n+1$ とする。そのとき任意の $T > 0$ に対し $w_{m,k}$ は次の不等式を満足する。

$$(2.22) \quad \|w_{m,k}(t) - w_{m,j}(t)\|_2^2 \leq C(T) \left[\|x^m(\phi_k - \phi_j)\|_2^2 + \|\phi_k - \phi_j\|_{1,2}^2 + A_p^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{j}\right)^2 \right].$$

ここで $C(T)$ は k, j に依存しない定数 A_p は p が奇数のとき 0, p が奇数でないとき 1 とする。

証明. $W_{k,j} = w_{m,k} - w_{m,j}$ とする。方程式 (2.17) より我々は次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} i(W_{k,j})_t + D^2 W_{k,j} &= \lambda J^m \left(\frac{1}{k} (|v_k|^2) u_k - \frac{1}{j} (|v_j|^2) u_j \right). \end{aligned}$$

$\overline{W_{k,j}}$ を両辺にかけて、 λ に関して積分し、虚数部分をとり次の不等式が得られる。

$$\frac{d}{dt} |W_{k,j}(t)|_2^2 \leq C (2tD)^m (\mathcal{F}_k(|v_k|^2)v_k - \mathcal{F}_j(|v_j|^2)v_j)|_2 \\ \times |W_{k,j}(t)|_2.$$

ところで

$$(2.23) \quad |(2tD)^m (\mathcal{F}_k(|v_k|^2)v_k - \mathcal{F}_j(|v_j|^2)v_j)|_2 \\ \leq |(2tD)^m (\mathcal{F}_k(|v_k|^2)v_k - \mathcal{F}_j(|v_k|^2)v_k)|_2 \\ + |(2tD)^m (\mathcal{F}_j(|v_k|^2)v_k - \mathcal{F}_j(|v_j|^2)v_j)|_2$$

(2.23) の右二項は次の式によって上から評価される。

$$CA_p \left[(1/k) |u_k|_\infty^{p-1-\delta} + (1/j) |u_k|_\infty^{p-1-\delta} \right] |w_{m,k}|_2 \\ \leq C(T) A_p (1/k + 1/j).$$

ここで補題 2.2, 補題 2.3 を用いた。(2.23) の右二項は G-N の不等式を用いることにより次の式によって上から評価される。

$$C (|w_{m,k}|_2^{p-1} + |w_{m,j}|_2^{p-1} + |u_k|_\infty^{p-1} + |u_j|_\infty^{p-1}) \\ \times \sum_{\ell=1}^m |v_{k,j}|_\infty^{1-\alpha_\ell} |W_{k,j}|_2^{\alpha_\ell}$$

ここで α_ℓ は $0 \leq \alpha_\ell \leq 1$ を満足する実数である。補題 2.2, 補題 2.4 と以上の計算により我々は次の不等式を得ることが出来る。

$$\frac{d}{dt} |W_{kj}(t)|_2^2 \leq C(T) \{ A_p^2 (\frac{1}{k} + \frac{1}{j})^2 + |\phi_k - \phi_j|_{1,2}^2 + |W_{kj}(t)|_2^2 \}$$

これより (2.22) は容易に得られる。

Q. E. D.

補題 2.4, 2.5 を用いることにより以下定理 1 を証明することにする。補題 2.4 より (2.1), (2.2) を満足する u が一意に決まることはあきらか、又それが (1.1) の解であることは容易にわかる。 u が性質 (2.3) - (2.6) を満足することは補題 2.1 - 2.3 より得られる。

Q. E. D.

最後に系 1.1 の証明を与えよう。

系 1.1 の証明 注 1.1 より $e^{-ix^2/4t} u \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; H^n(\mathbb{R}))$

Sobolev の不等式より $e^{-ix^2/4t} u \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{n-1}(\mathbb{R}))$

よって $u \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{n-1}(\mathbb{R}))$. 方程式 (1.1) を用いれば次の結果が得られる。

$$u \in \bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{n-2m-1}(\mathbb{R}))$$

次に L^2 -solutions について考える。

3. L^2 -solutions 最初にこの章で用いる記号及び補題について述べることにする。 $\mathbb{R}$ の区間 I に対して $L^p(I; B)$ で I 上で定義された Banach 空間 B に値をとる強可測関数 $u(t)$ で $|u(t)|_B \in L^p(I)$ を満足する関数空間を表わすことにする。 $\mathcal{F}$ を Fourier 変換, $\mathcal{F}^{-1}$ を逆 Fourier 変換とし $\tilde{v}(t)$ を次のように定義することにする。

$$\tilde{v}(t)\phi = \mathcal{F}^{-1} e^{-i|\xi|^2 t} \mathcal{F}\phi$$

$\tilde{v}(t)\phi$ に関する補題はこの章の結果を得るために重要である。

補題 3.1. 任意の $\phi \in L^{p'}$ に対して

$$|\tilde{v}(t)\phi|_p \leq C |t|^{-(p-2)/2p} |\phi|_{p'}$$

ここで $2 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$.

補題 3.2. 任意の $\phi \in L^2$ に対して

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{v}(t)\phi|_r^2 dt \right)^{1/2} \leq C |\phi|_2$$

ここで $2 \leq r \leq \infty$, $2/q = 1/2 - 1/r$.

補題 3.2 の証明については [3], [10] 参照。

次に我々の結果を述べることにする。

定理 2. $1 < p < 5$, $\phi \in L^2$, $x^m \phi \in L^2$ ($m \in \mathbb{N}$)
とし, $p \neq 3$ ならば $p > m+1$ とする。そのとき (1.1), (1.2)
の一意的な解 $u = u(t, x)$ が存在し, 次の性質を満足する。

$$(3.1) \quad u \in C_b(\mathbb{R}; L^2)$$

$$(3.2) \quad J^m u \in L_{loc}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}; L^{p+1}) \cap C(\mathbb{R}; L^2)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$\text{ここで } \frac{p}{p-1} = 4(p+1)/(p-1).$$

証明 第2章の H^1 -solutions のときと同様に補題 3.1, 3.2
及び G-N の不等式を用いることにより我々は近似方程式
(2.7)-(2.8) の解 u_k に対して次の不等式を得ることが出来
る。任意の $T > 0$, 及び $m = 0, 1, 2, \dots, m$ に対して

$$(3.3) \quad \left(\int_0^T |J^m u_k(t)|_{\frac{p}{p-1}}^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{1/\frac{p}{p-1}} \leq C(T)$$

$$(3.4) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} |J^m u_k(t)|_2 \leq C(T)$$

ここで $C(T)$ は k に依存しない定数である。次に補題 3.1,
3.2, 及び (3.3), (3.4) 式と G-N の不等式を用いると
次の不等式が得られる。

任意の $T > 0$ と, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して

$$(3.5) \quad \left(\int_0^T |J^m(u_k(t) - u_j(t))|_{p+1}^2 dt \right)^{1/2} \\ \leq C(T) (A_p (1/k + 1/j) + |\phi_k - \phi_j|_2 + |x^m(\phi_k - \phi_j)|_2).$$

$$(3.6) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} |J^m(u_k(t) - u_j(t))|_2 \\ \leq C(T) (A_p (1/k + 1/j) + |\phi_k - \phi_j|_2 + |x^m(\phi_k - \phi_j)|_2)$$

ここで $C(T)$ は k, j に依存しない定数及び A_p は $p=3$ のとき 0 , $p \neq 3$ のとき $A_p = 1$ である。不等式 (3.3) - (3.6) に関するくわしい証明については [4] 参照。

定理 1 の議論と同様にして定理 2 は不等式 (3.5), (3.6) より得らる。

Q. E. D.

系 1.1 と同様にして次の系 2.1 が定理 2 より得らる。

系 2.1. 定理 2 の仮定の下 (1.1), (1.2) の解 u は

$$u \in \bigcap_{m=0}^{[n/2]} C^m(\mathbb{R} \setminus \{0\}; C^{n-2m-1}(\mathbb{R}))$$

を満足する。

References

- [1] A. Friedman : Partial Differential Equations :
Holt-Rinehart and Winston New-York, 1969.
- [2] J. Ginibre and G. Velo : On a class of nonlinear
Schrödinger equation I, II, J. Functional Analysis,
32 (1979), 1-32, 33-71 ; III, Ann. Inst. Henri
Poincaré Sect. A, 28 (1978), 287-316.
- [3] J. Ginibre and G. Velo : Scattering theory in the
energy space for a class of nonlinear Schrödinger
equations, Preprint (1984).
- [4] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi : On
solutions of the initial value problem for the
nonlinear Schrödinger equations in one space
dimension, to appear (1985).
- [5] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi : On
solutions of the initial value problem for the
nonlinear Schrödinger equations, submitted
(1985).
- [6] S. Kadekawa : Ph. D. Thesis, Indiana University,
(1980).

- [7] T. Kato : On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg - de Vries equations, in "Studies in applied mathematics", edited by V. Guillemin, advances in mathematics supplementary studies, Vol. 8, Academic press, (1983), 93-128.
- [8] M. Tsutsumi : Weighted Sobolev spaces and rapidly decreasing solutions of some nonlinear dispersive wave equations, J. Differential Equations, 42 (1981), 260-281.
- [9] Y. Tsutsumi : Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations, to appear (1985)
- [10] Y. Tsutsumi : L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups, preprint, (1985)
- [11] V. E. Zakharov and A. B. Shabat : Exact theory of two dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, Sov. Phys. JETP. 34 (1972), 62-69.