

対称性破壊：分岐論からの接近

鈴木 貴 (都立大・理)

Takashi Suzuki

§1. 序 対称な方程式から非対称な解が生成されるのである。

Gidas-Ni-Nirenberg [8] によれば $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に対する半線形楕円型境界値問題

$$(1) \quad -\Delta u = f(u) \quad (\text{in } B \equiv \{ |x| < 1 \} \subset \mathbb{R}^n), \quad u = 0 \quad (\text{on } \partial B)$$

の正値古典解 $u \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ は、半径 $r = |x|$ のみの関数であって $u_r < 0$ ($0 < r \leq 1$) をみたす。この結果の重要性は、

(1) の解が一般には一意でない点にある。ではどのような場合に非対称な解が生成されるのだろうか。 u の正値性をとりはじめ、線形の場合 $f(u) = \lambda u$ (λ は正定数) でも非対称解が存在する。境界条件を第三種にした時の研究 ([12], [18]) もある。ここでは領域が球殻である場合に正の非対称解が生成されることを述べる。線形では起こり得ないこのような現象を発見したのは、Brezis-Nirenberg [1] である。

状況によってはこのような場合でも対称解のみしか存在しないこともある。従って示す事は、方程式に含まれている参数を動かして探さぶった時に非対称解が現れてくること：対称性破壊である。現在の所、変分法と分岐論は基本的な道具となっている。

(2) $-\Delta u = f(u)$, $u > 0$ ($\text{in } A \equiv \{a < |x| < a+1\} \subset \mathbb{R}^n$), $u = 0$ ($\text{on } \partial A$)
 において $f(0) = f'(0) = 0$ の場合には $a \rightarrow \infty$ の時に拡散力の
 影響が弱くなり、非対称な解が生成してくるであろうこと
 が予想できる。Coffman [2] によって 2次元の場合に示され
 た後 Lin [10], Lin [13], Suzuki [21] によって高次元化され、
 非対称解の profile もある程度わかるようになってきている。証
 明は変分法による。従って非線形性は劣臨界という制約を
 受けるが、非対称性が $a \gg 1$ について一様に証明できる。

例えば $n=2$, $f(u) = u^p$ ($1 < p < \infty$) とすると、任意の m に対
 して十分大きな a に対し m -mode の解が存在する。但し、mode
 とは $\alpha = re^{i\theta}$ と書く時の θ 方向の周期である。証明は [20] にあ
 る。

(2) において $f(0) > 0$ の場合には固有値問題

(3) $-\Delta u = \lambda f(u)$, $u > 0$ ($\text{in } A = \{a < |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$), $u = 0$ ($\text{on } \partial A$)
 を考えると、領域を固定しておいて $\lambda \downarrow 0$ で非対称解が現わ
 れるものとする。計算が道められている。 $n=2$ で $f(u) =$
 e^u の時は Nagasaki-Suzuki [14] で証明されている。一方 Lin [11]
 は同じ問題を分岐論で解いた。この場合は回転対称解の微分
 におめられ、群作用を用いて Crandall-Rabinowitz [3] の単純固有
 値の分岐理論に帰着せしめることができる。筆者も同様の
 の方向で研究を進め、線形化方程式が適当な変換で Legendre

方程式になることを知っていた。Lin [11] はその事には気付いていなかったようである。この間の事情は前掲の [20] にある。両者の研究は互に知らぬまま独立に進められていたのである。

この稿の目的は $n > 2$ における固有値問題

$$(4) \quad -\Delta u = \lambda e^u \quad (\text{in } B \equiv \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n), \quad u = 0 \quad (\text{on } \partial B)$$

及び

$$(5) \quad -\Delta u = \lambda e^u \quad (\text{in } A \equiv \{a < |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n), \quad u = 0 \quad (\text{on } \partial A)$$

の対称解の構造とその線形化作用素のスペクトルについて述べることである。(4) については非対称解の存在しないものがあるが、それ自身興味のあることであり、後の議論とも関連するものでここに収録することにする。非線形性が強くて変分法に載せることができないこのような方程式についても、分岐論を使えば非対称解の存在を示すことができる。(5) についての結果から、無限回の非対称性破壊：対称解から非対称解の枝分かれが示唆されるのである。

§2. 球領域の場合 前述のように (4) の解は全て回転対称 $u =$

$u(|x|)$ となるようであるから、(4) は常微分方程式

$$(6) \quad (r^{n-1} u)' + r^{n-1} \lambda e^u = 0 \quad (0 < r < 1), \quad u'(0) = u(1) = 0$$

と同値である。 $n=1, 2$ の時は求積法が有効でそれぞれ下図のような解の分岐図が得られる (図 1)

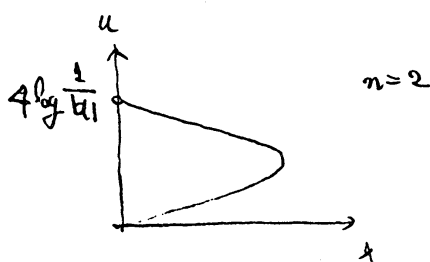
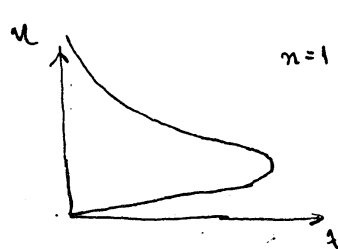


Fig. 1.

ここで $n=1$ と $n=2$ を分けて書いたのは、前者については解は全域爆発 $u(x) \rightarrow +\infty$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) 後者については原点において 1 点爆発し、特異極限 $4 \log \frac{1}{|u|}$ に移行することと示すためである。 $n=3$ は Gelfand [7], $n > 2$ の一般次元は Joseph-Lundgren [9] が示した。答は下図 (図 2) のようになる:

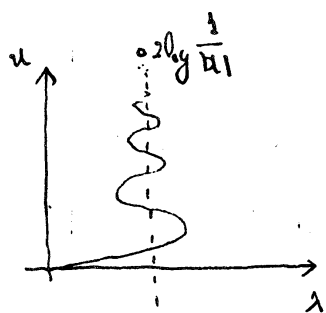
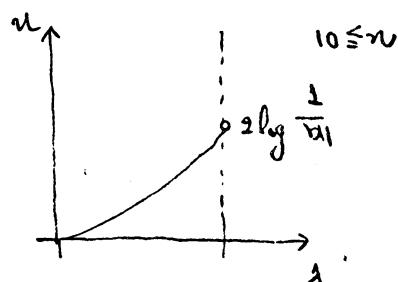

 $2 < n < 10$


Fig. 2.

1 点爆発することと、特異極限は同じであるが分岐図は $n=10$ を境にして異なる。後者の方法によってその理由を簡単に説明しよう。

2 点境界値問題の常法であるが、(6) に対応する初期値問題

$$(7) \quad (r^{n-1}u')' + \lambda r^{n-1}e^u = 0, \quad u(1) = A > 0, \quad u'(0) = 0$$

を考える。(6) は (7) の解 $u(x) = 0$ をみたすような A を探す問題になる。非線形項 λe^u の代数的特性を生かして、Enden による変換: $u(r) = w(t) - 2t + A$, $r = Be^t$, $B = \{2(n-2)/\lambda e^{A/2}\}^{1/2}$

を導入すると、(7) は自励系

$$(8) \quad \begin{cases} w'' + (n-2)w' + 2(n-2)(e^w - 1) = 0. \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \{w(t) - 2t\} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} \{w'(t) - 2\} = 0 \end{cases}$$

に変換される。この系の相平面における軌道 $\Gamma = \{(w(t), w'(t)) \mid -\infty < t < \infty\}$ と上の各点 (w_0, w'_0) と $\lambda = 2(n-2)e^{w_0}$ に対する (6) の解とが 1 対 1 に対応することがわかる。

Γ の状態が $n=10$ を境に変質する様を見よには、特異点 $\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のまわりで線形化してあるとよい。その方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2(n-2) & -(n-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

であり、係数行列の固有値は $\frac{1}{2} \{(2-n) \pm \sqrt{(n-2)(n-10)}\}$ である。

Poincaré-Bendixon の定理から、特異点の近くでは $2 < n < 10$ の時軌道の渦状に巻きつくことがわかる。実際、比較定理によって Γ を原点の近くに追い込むことができる。答えは下図 (図 3) のようになる：

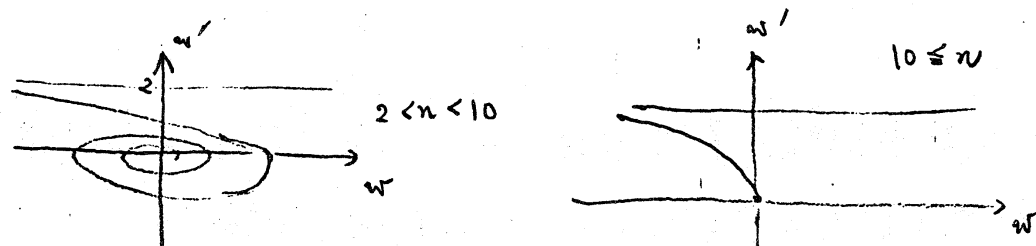


Fig. 3

この図は前回が得られることは見易い。

対称解 $u(x)$ があった時、そのまわりの線形化作用素 $L \equiv -\Delta_D - p(x)$, $p = \lambda e^u$ は極座標による変数分離を受けて

$$\Delta_m = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} - p(r) + \frac{f_m}{r^2}, \quad \frac{d}{dr} \cdot \Big|_{r=0} = \cdot \Big|_{r=1} = 0 \quad (m=0, 1, \dots)$$

に分解する。但し、 $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ は $f_0 = 0 < f_1 < f_2 < \dots < f_m < \dots$

は球面上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ の固有値とその重複度を

$$K_m$$

とすると、 $f_m = m(n-2+m)$, $n \geq 2$ ときは $K_m = (2m+n-2) \cdot$

$$(m+n-3)! / (n-2)! m! \text{ である。 } \Delta, \Delta_m \text{ の固有値全体をそれ}$$

ぞれ $\delta(\Delta), \delta(\Delta_m)$ としよう。 $i \stackrel{\text{def}}{=} \# \{ \delta(\Delta) \cap (-\infty, 0) \}$ は通常の

Morse 指数を表わす。 $i_p \stackrel{\text{def}}{=} \# \{ \delta(\Delta_0) \cap (-\infty, 0) \}$ も同様 Morse 指数

とすることにする。この節の目的は次の 2 つの定理を証明

することである:

定理 2.1. $m \geq 1$ ならば常に $\delta(\Delta_m) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ である。

定理 2.2. i_p は折れ曲がる度に 1 つづ増大し、それ以外では変化しない。特に $2 < n < 10$ では $i_p \rightarrow \infty$ となる。

定理 2.1 の証明の概略: Δ_m の最小固有値を μ_m^0 とすれば、 $f_{m'} > f_m$ ($m' > m$) と比較定理から $\mu_m^0 < \mu_{m'}^0 < \mu_{m'}^1 < \mu_{m'}^2 < \dots < \mu_{m'}^m < \dots$ となる。

$\mu_m^1 > 0$ を示せばよい。 μ_m^1 に対する Δ の固有関数は

$\Phi(r)\chi(\omega)$, 但し $\Phi(r) > 0$ は Δ_1 の μ_m^1 に対する固有関数, $\chi(\omega)$

は Δ の f_1 に対する固有関数で n 個の 1 次独立なものがあり、

半球面 S_+ を領域とするようにとることができる: $\chi > 0$

(in S_+), $\chi = 0$ (on ∂S_+). 従って、 μ_m^1 は半球 $B_+ \cong [0, 1] \times S_+$ にお

ける Δ の最小固有値であり、

$$(9) \quad -\Delta \psi = \mu \psi, \quad \psi > 0 \quad (\text{in } B_+)$$

なる $w \in C^2(\overline{B_+})$ が存在するとは $\mu_0^1 > 0$ となる。実際、Jacobiの等式
 によって $v \in H_0^1(B_+)$ に対して

$$(10) \quad Q(wv) \equiv \int_{B_+} \{|\nabla(wv)|^2 - p(wv)^2\} dx \\
 = \int_{B_+} w^2 \{|\nabla v|^2 - p v^2\} dx - \int_{B_+} (w \Delta w) v^2 dx$$

が成立つ。任意に $g \in C_0^\infty(B)$ をとる時、 $v = g/w$ とおけば

$$Q(g) = \int_{B_+} w^2 |\nabla g|^2 dx > 0 \quad (g \neq 0), \text{ 従って } \mu_0^1 > 0 \text{ となる。}$$

一般性を失なわず $B_+ = B \cap \{x_1 > 0\}$ とする。解 $u = u(x)$ は

$$u_r < 0 \quad (0 < r \leq 1) \text{ をみたすので、 } v = -u_{x_1} \text{ とおけばよい。}$$

定理 2.2 の証明の概略：陰関数定理より、折れ曲がり点で起こる

のは $\angle$ が退化する時に限る。逆に折れ曲がりのない所では $\angle$

は退化しない。実際、前定理より $\angle$ が退化するとすればその

固有空間は 1 次元で固有関数は $\overline{g}(x)$ となる。仮に

$$(11) \quad -\Delta u(s) = \lambda(s) e^{u(s)} \quad (\text{in } B), \quad u(s) = 0 \quad (\text{on } \partial B)$$

$\dot{\lambda}(0) \neq 0$ なる解の 1 次元多様体 $\{(\lambda(s), u(s))\} \quad (|s| < 1)$ が存在

し、 $\lambda(0) = \overline{\lambda}$, $u(0) = \overline{u}$ において $\angle$ が退化したとすると

$$(12) \quad -\Delta \dot{u}(0) - \overline{\lambda} e^{\overline{u}} \dot{u}(0) = \dot{\lambda}(0) e^{\overline{u}} \quad (\text{in } B), \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{on } \partial B)$$

より $\dot{\lambda}(0) (e^{\overline{u}}, \overline{g}) = 0$ となる。一方

$$(13) \quad -\Delta \overline{g} = \overline{\lambda} e^{\overline{u}} \overline{g}, \quad \overline{g} \neq 0 \quad (\text{in } B), \quad \overline{g} = 0 \quad (\text{on } \partial B)$$

より

$$(14) \quad (e^{\overline{u}}, \overline{g}) = \frac{1}{\overline{\lambda}} \int_B (-\Delta \overline{g}) dx = -\frac{1}{\overline{\lambda}} \int_{\partial B} \frac{\partial \overline{g}}{\partial n} d\Delta = -\frac{|\partial B|}{\overline{\lambda}} \left. \frac{\partial \overline{g}}{\partial r} \right|_{r=1} \neq 0$$

従って、 $\lambda(0) = 0$ となり 0 値である。

さて Goudall-Rabinowitz [4] の一般論 (Thm 3.2) より $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に対する固有値問題

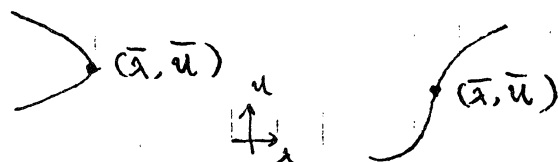
$$(15) \quad -\Delta u = \lambda f(u) \quad (\text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n : \text{有界}), \quad u = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega : \text{滑らか})$$

において $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ が解、 $\lambda = -\Delta_0 - \bar{\lambda} f'(\bar{u})$ が 0 を単純固有値、固有関数 $\bar{g}$ に対して

$$(16) \quad (f(\bar{u}), \bar{g}) \neq 0$$

が成立する時は、 (λ, u) は解の 1 次元多様体 $\{(\lambda(s), u(s))\}_{|s| \ll 1}$ $\lambda(0) = \bar{\lambda}$, $u(0) = \bar{u}$ を張る。 $\lambda(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \bar{g}$ とでき、 $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ の近傍にはそれ以外の解はない。(図 4)

Fig. 4.



(14) は (16) を意味するもので、折れ曲がり点においてこの理論が適用されることになる。特に (11) が成立する。

スペクトル理論による線形化問題も同様の振動を受ける。 $\{(\mu(s), g(s))\}_{|s| \ll 1}$, $\mu(0) = 0$, $g(0) = \bar{g}$.

$$(17) \quad -\Delta g(s) - \lambda(s) e^{u(s)} g(s) = \mu(s) g(s) \quad (\text{in } B), \quad g(s) = 0 \quad (\text{on } \partial B)$$

となる族が存在する。(11) を 2 回微分して

$$-\Delta \ddot{u}(0) - \bar{\lambda} e^{\bar{u}} \ddot{u}(0) = \ddot{\lambda}(0) e^{\bar{u}} + \bar{\lambda} e^{\bar{u}} \bar{g}^2 \quad (\text{in } B), \quad \ddot{u}(0) = 0 \quad (\text{on } \partial B)$$

$$\therefore 0 = \ddot{\lambda}(0) (e^{\bar{u}}, \bar{g}) + \bar{\lambda} (e^{\bar{u}}, \bar{g}^2).$$

(17) を 1 回微分して

$$-\Delta \dot{\varphi}(0) - \bar{\lambda} e^{\bar{u}} \dot{\varphi}(0) = \dot{\mu}(0) \bar{\varphi} + \bar{\lambda} e^{\bar{u}} \bar{\varphi}^2 \quad (\text{in } \beta), \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (\text{on } \partial \beta)$$

$$\therefore 0 = \dot{\mu}(0) \|\bar{\varphi}\|^2 + \bar{\lambda} (e^{\bar{u}}, \bar{\varphi}^3)$$

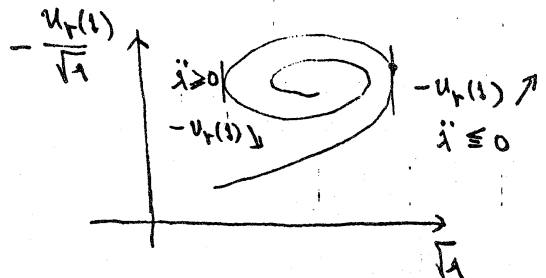
よって

$$(18) \quad \dot{\mu}(0) \|\bar{\varphi}\|^2 = \ddot{\lambda}(0) (e^{\bar{u}}, \bar{\varphi}) = \ddot{\lambda}(0) \frac{|\partial \beta|}{\lambda} \left\{ -\frac{\partial}{\partial s} u_r \right\}_{r=1} \Big|_{s=0}$$

となる。

至数 s は常に $\lambda-u$ 平面の自明解に近い方から特異極限の方向に向かうようにとることにすると (18) の右辺 ≤ 0 となることかある。 $n=3$ の時には Gelfand [7] の p.361 にある図によって容易に示される (図5)

Fig. 5



従って (18) の右辺 $\neq 0$ を示せば λ の折れ曲がる度に 1 つずつ増大していくことがわかる。 $\left\{ -\frac{\partial}{\partial s} u_r \right\}_{r=1} \Big|_{s=0} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \Big|_{r=1} \neq 0$ であるから、 $\ddot{\lambda}(0) \neq 0$ を示せばよい。

図3の軌道 σ 上の各点 $(w_0, w'_0) \leftrightarrow \lambda = 2(n-2)e^{w_0}$ に対する (6) の解 σ 上 $w' = 0$ となる点 $\leftrightarrow$ 図2の解曲線の折れ曲がる点。

従って、その点において $\ddot{\lambda}(0) = 0 \Leftrightarrow w'' = 0$ である。ここで σ を支配する方程式 (8) は自励系であるので、 σ 上 $w' = w'' = 0$

となることはあり得ない。 //

33. 球殻領域の場合 固有値問題 (5) の回転対称解の構造は, Nagasaki-Suzuki [15] によって初めて明らかにされた。回転対称解は λ - u 空間で 1 次元多様体 $\mathcal{S}$ となり, 超平面 $\lambda=0$ に吸収される。 $2 < n < 10$ においては $q > 0$ と共に $\mathcal{S}$ の折れ曲がりの回数はいくつでも大きくなる。

対称解のもう一つの線形化作用素 L の極座標による変数分離を受けて分解することは前節と同様である。 L の境界条件が $\cdot|_{r=a} = \cdot|_{r=1} = 0$ に置き換えられるだけである。 Morse 指数, 対称 Morse 指数も全く同様に定義できる。 $\mathcal{S}$ に沿ってたどる時, 次の事が証明できる:

定理 3.1. i_R はそれまでの折れ曲がりの回数の 2 倍以下。

定理 3.2. $i \rightarrow \infty$

Ni-Nussbaum [17] により球殻が浅い場合: $0 < 1-a \ll 1$, $\mathcal{S}$ の折れ曲がりは唯 1 回である。一般の場合でも $0 < 1-a \ll 1$ とすれば, (5) の対称解は丁度 2 つで, $\mathcal{S}$ の折れ曲がりが有限回でとどまることが予想できる。

意味する所はこうである。 $\mathcal{S}$ は最初が高次元的なふるまいをするが, 究極的には 1 次元的な方向に引き寄せられる。その過程で貯えられた高次元的なものを排出するかのようになり, 非対称な解を生成する。その分岐は無限回である (図 6):

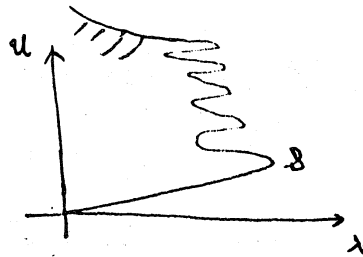


Fig. 6

最初に g の構造の解明の方法を概略的に述べる。打出法と行なうために

$$(19) \quad (r^{n-1}u')' + r^{n-1}\lambda e^u = 0, \quad u(a) = 0$$

について考える。この解は $r < 0$ まで延長可能で、適当な正定数 L, M に対して

$$(20) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ u'(r) - \frac{L}{r^{n-1}} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ u(r) + \frac{L}{(n-2)r^{n-2}} - M \right\} = 0$$

とみたすことができる。そこで Emden 変換を修正して $u(r) = w(t) - 2t + M$, $r = Be^t$, $B = \{2(n-2)/\lambda e^M\}^{1/2}$ とおいてみると、

$$(21) \quad \begin{cases} w'' + (n-2)w' + 2(n-2)(e^w - 1) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \{w(t) - 2t + de^{-(n-2)t}\} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} \{w'(t) - 2 - d(n-2)e^{-(n-2)t}\} = 0 \end{cases}$$

を得る。但し、 $d = LB^{-(n-2)}/(n-2)$ である。 $d = 0$ の時 (8) に他ならない。

自治系 (21) は相平面上に互に交わらない軌道の族、既知葉層 $\{\sigma_d\}_{d \geq 0}$ を作る。 $\bigcup_{d \geq 0} \sigma_d = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ である。 $2 < n < 10$ の時 σ_d は特異点である原点に漸次吸収される。

各軌道 σ_d ($d > 0$) 上に直線 $w' = 2$ をおいて相対する点の対 (p_d^+, p_d^-) が存在して、 p_d^+ の w 座標と $\lambda = 2(n-2)e^w$ に対する (5) の対称解と p_d^- に対しては対応する (図 7)。従って 1 次元多様体

$K_a = \{P_a^+ \mid a > 0\}$ $w(1)$ の対称解を分類することになる。 K_a は $\theta = \theta_0$ と交わることはできない。 $A = \{a \mid 1 < 1\}$ の深い程葉層の奥にはいつか込むことができる。しかし最終的には外に出て、 $w \rightarrow -\infty$ の方向に伸びて行かない。この過程で $\mathcal{J}$ の折れ曲がり点になる (図 8) :

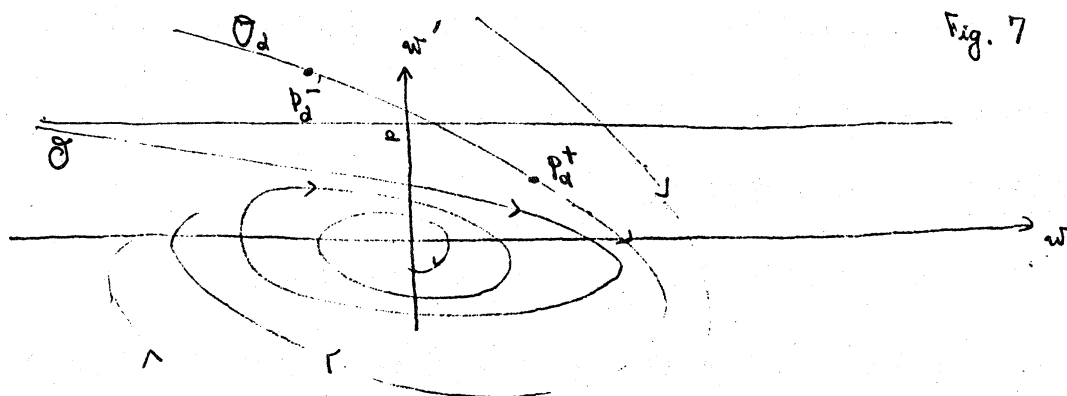


Fig. 7

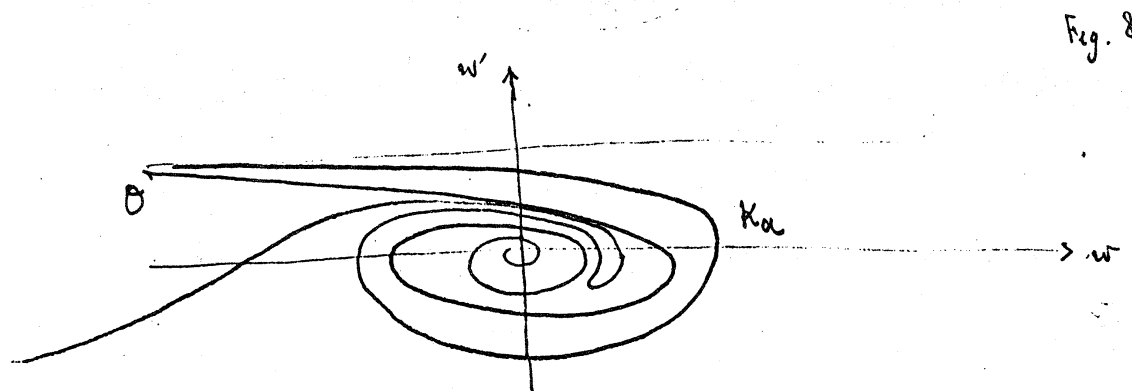


Fig. 8

定理 3.1 の証明の概略 $(\bar{u}, \bar{u}) \in \mathcal{J}$ の折れ曲がり点でない時は、

L_0 の偶数番目の固有値が退化しないことを示せばよい。

L_0 が退化するとすれば単純。固有関数 $\bar{g}(x)$ とすれば (A) と同様にして

$$(22) \quad (e^{\bar{u}}, \bar{g}) = \frac{1}{\lambda} \int_{\partial A} \left(-\frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \right) dA = \frac{1}{\lambda} (-\bar{g}_r(1) + \bar{g}_r(a))$$

となる。

L_0 の偶数番目の固有値においては $\bar{g}_r(1)$ と $\bar{g}_r(a)$ は異符号。
よって $(e^{\bar{u}}, \bar{g}) \neq 0$ となる。この時 $(\bar{x}, \bar{u})$ において δ が折れ
曲がることのできないことは定理 2.2 の証明によってもわかる。

定理 3.2 の証明の概略 δ に沿って進む時, $\|u\|_{L^\infty} \rightarrow +\infty$ とな
る。次の補題は, Kaplan の方法と Gidas-Nirenberg の理論に基
づく de Figueiredo-Lions-Muschaum [6] の論法に Nagasaki-Suzuki [16]
の論法を加えれば証明することのできる:

補題 3.1. 固有値問題

$$(23) \quad -\Delta u = \lambda f(u) \geq 0 \quad \text{in } A = \{a < |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n, \quad u = 0 \quad (\text{on } \partial A)$$

において解の族 $\{(u, \lambda)\}$ が回転対称: $u = u(|x|)$ であり, $\|u\|_{L^\infty} \rightarrow +\infty$, $\lambda \in O(1)$ であるならば 全域爆発: $u(x) \rightarrow +\infty$ ($x \in A$) である。

証明の概略 $\lambda_1 > 0$, $\varphi_1(x) > 0$ は $-\Delta_0$ の第 1 固有値, 固有関数
とする:

$$(24) \quad -\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1, \quad \varphi_1 > 0 \quad (\text{in } A), \quad \varphi_1 = 0 \quad (\text{on } \partial A)$$

この時

$$(25) \quad J_\lambda = \int_A \lambda f(u) \varphi_1 \, dx = \lambda_1 \int_A u \varphi_1 \, dx$$

である。

$-\Delta_0$ の Green 関数を $G(x, y)$ とするならば, Hopf の補題によつて
任意の $x \in A$ に対し定数 $\delta_x > 0$ が存在して

$$(26) \quad G(x, y) \geq \delta_x \varphi_1(y) \quad (y \in \bar{\Omega})$$

となる。よって

$$(27) \quad u(x) = \int_A G(x, y) \lambda f(u(y)) dy \geq r_2 J_1$$

となり, $J_1 \rightarrow +\infty$ の時は $u(x) \rightarrow +\infty$ ($x \in A$) となることはいえる。 u の対称である時は $J_1 \in O(1)$ となり得ないことを示そう。

実際 (25) によつて, $J_1 \in O(1)$ の時は $\|u\|_{L_{loc}^1(A)} \in O(1)$ である。 Gidas-Ni-Nirenberg の一定理によつて, $A_+ \equiv \{\frac{1+a}{2} < |x| < 1\}$ においては $u_r < 0$ となる。 この 2 つの事実より A の $|x|=1$ での境界の近傍 ω の存在して $\|u\|_{L^\infty(\omega)} \in O(1)$ となることを示したのである。

de Figueiredo-Lions-Massbaum の結果である。 このことと方程式 (23), $\lambda \in O(1)$, 及び境界の近傍における楕円型評価を用いると定数 $C_1 > 0$ の存在して

$$(28) \quad -u_r(1) \leq C_1$$

となることはいえる。 (23) より得られる $(r^{n-1}u_r)_r \leq 0$ を積分して

$$u_f(r) \geq r^{n-1}u_r(r) \geq u_r(1) \geq -C_1$$

従つて

$$(29) \quad 0 \leq u(r) = \int_r^1 -u_r(r) dr \leq C_1$$

となり $\|u\|_{L^\infty} \rightarrow +\infty$ に反する。 //

定理 3.2 はより一般の固有値問題 (23) に対して示すことができる。 既に非線形項に対する仮定

$$(30) \quad f(u) > 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{u > t} f(u)/uf'(u) = 0$$

の下で 補題 3.2 の条件を満たす対称解 $u(x)$ の Morse 指数は $+\infty$ に発散する。

証明のために $p = \lambda f(u)$ としよう。 $X_0 = \{v \in H_0^1(A) \mid Q(v) \equiv \int_A \{|\nabla v|^2 - p v^2\} dx < 0\}$ とおくと、 $i = \dim X_0$ である。 Strikartz [19] の補助関数を修正して、 $v = g_i u$ に対して Jacobi の等式 (10) を適用してみよう。但し、 $u(x)$ は考えている解、 $\{g_i\}_{i=1}^{n_m}$ は S_m に対応する n の固有関数とする。 $\int_{\partial B_1} g_i(\omega) g_j(\omega) d\omega = \delta_{ij}$ と正規化しておけば、

$$\begin{aligned} Q(g_i u) &= \int_A g_i^2 \{|\nabla u|^2 - p u^2\} dx - \int_A (g_i \Delta g_i) u^2 dx \\ &= \int_A \{|\nabla u|^2 - p u^2\} dx + S_m \int_A r^{-2} u^2 dx \equiv Q_{S_m}(u) \end{aligned}$$

となる。

よって、 $Q_{S_m}(u) < 0$ となる場合には、 $\dim X_0 \geq \sum_{i=0}^m n_m$ となる。

以下 ω_n を n 次元単位球面の表面積としよう。

$$u(r) = \int_a^r u_r dr$$

より適当な定数 $C_2 > 0$ に対して

$$u(r)^2 \leq \int_a^1 \frac{dr}{r^{n-1}} \int_a^1 u_r^2 r^{n-1} dr = C_2 \|\nabla u\|^2 / \omega_n$$

となる。よって別の定数 $C_3 > 0$ に対して

$$\int_A r^{-2} u^2 dx = \omega_n \int_a^1 u(r)^2 r^{n-3} dr \leq C_3 \|\nabla u\|^2$$

となる。特に

$$(31) \quad Q_S(u) \leq \left\{ (C_3 S + 1) \int_A |\nabla u|^2 dx / \int_A p u^2 dx - 1 \right\} \cdot \int_A p u^2 dx$$

となるので

$$(32) \quad \overline{\lim} \left\{ \int_A |\nabla u|^2 dx / \int_A p u^2 dx \right\} = \overline{\lim} \left\{ \int_A u f(u) dx / \int_A u^2 f'(u) dx \right\} = 0$$

である場合には、 $i \rightarrow \infty$ となることもわかる。最後に補題

3.1を用いて (32) を証明してみよう。

$$(33) \quad m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{u \geq t} f(u) / u f'(u) \rightarrow \infty \quad (as t \rightarrow \infty)$$

と置く。 $\varepsilon > 0$ を固定すると Lebesgue の収束定理によって

$$(34) \quad |\{u \leq \varepsilon^{-1}\}| = \int_A \chi_{\{u \leq \varepsilon^{-1}\}} dx \rightarrow 0$$

又明らかに

$$(35) \quad \delta \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim} \int_A u^2 f'(u) dx \in (0, +\infty].$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{\int_A u f(u) dx}{\int_A u^2 f'(u) dx} &\leq \frac{\int_{\{u \leq \varepsilon^{-1}\}} u f(u) dx}{\int_A u^2 f'(u) dx} + \frac{\int_{\{u \geq \varepsilon^{-1}\}} u f(u) dx}{\int_{\{u \geq \varepsilon^{-1}\}} u^2 f'(u) dx} \\ &\leq \frac{\max_{0 \leq u \leq \varepsilon^{-1}} \{u f(u)\}}{\int_A u^2 f'(u) dx} |\{u \leq \varepsilon^{-1}\}| + m(\varepsilon^{-1}) \\ &\quad (\because u \geq t \Rightarrow u f(u) \leq m(t) u^2 f'(u)) \end{aligned}$$

において極限移行すれば

$$\overline{\lim} \int_A u f(u) dx / \int_A u^2 f'(u) dx \leq m(\varepsilon^{-1})$$

$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば (32) を得る。

こうして証明は終了した。 //

References

- [1] Brezis, H., Nirenberg, L., Positive solutions of nonlinear elliptic equation involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983) 437-477.
- [2] Coffman, C.V., A nonlinear boundary value problem with many positive solutions, *J. Differential Equations* 54 (1984) 429-437
- [3] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H., Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Functional Analysis* 8 (1971) 321-340.
- [4] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H., Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 52 (1973) 161-180.
- [5] Daner, E.N., Global breaking of symmetry of positive solutions on two-dimensional annuli, preprint 1991
- [6] de Figueiredo, D.G., Lions, P.L., Nussbaum, R.D., A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, *J. Math. Pure Appl.* 61 (1982) 41-63
- [7] Gelfand, I.M., Some problems in the theory of quasilinear equations, *Amer. Math. Soc. Transl.* 29 (1963) 295-381.
- [8] Gilkey, B., Ni, W.M., Nirenberg, L., Symmetry and related properties via the maximal principle, *Comm. Math. Phys.* 68 (1979) 209-243
- [9] Joseph, D.D., Lundgren, T.S., Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 49 (1973) 241-269.
- [10] Li, Y.Y., Existence of many positive solutions of semilinear elliptic

- equations on annulus, J. Differential Equations 83 (1990) 348-367.
- [11] Lin, S.S., On non-radially symmetric bifurcation in the annulus, J. Differential Equations 80 (1989) 251-279.
- [12] Lin, S.S., Symmetry breaking for semilinear elliptic equations on sectorial domains in $\mathbb{R}^2$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 118A (1991) 327-353.
- [13] Lin, S.S., Existence of many positive nonradial solutions for nonlinear elliptic equations on annulus, preprint 1990.
- [14] Nagasaki, K., Suzuki, T., Radial and non radial solutions for the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on annulus in $\mathbb{R}^2$, J. Differential Equations 87 (1990) 144-168.
- [15] Nagasaki, K., Suzuki, T., Radial solutions for $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on annulus in higher dimensions, to appear in J. Differential Equations.
- [16] Nagasaki, K., Suzuki, T., Asymptotic analysis for two-dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially dominated nonlinearities, Asymptotic Analysis 3 (1990) 173-188.
- [17] Ni, W.M., Nussbaum, R.D., Uniqueness and non-uniqueness for positive radial solution of $\Delta u + f(u, t) = 0$, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985) 67-108.
- [18] Smoller, J., Wasserman, A., Bifurcation and symmetry breaking, Inv. Math. 100 (1990) 63-95.
- [19] Srikanth, P.N., Symmetry breaking for a class of semilinear

- elliptic problems, Ann. Inst. Henri Poincaré. Analyse non linéaire 7 (1990) 103-112.
- [20] Suzuki, T., Radial and nonradial solutions for semilinear elliptic equations on circular domains, In: Talenti, G. (ed.), IMA Conference on Geometry of Solution of Partial Differential Equations, Cortona 1988, p. 153-174, Symposia Mathematica vol. 30, Academic Press, London et. al. 1989.
- [21] Suzuki, T., Generation of positive nonradial solutions for semilinear equations on annulus: a variational approach, submitted to Proc. Royal Soc. Edinburgh