

KAM torus 付近の相空間の構造

早大理工 原山卓久、相沢洋二

近可積分Hamilton系の相空間はtorusとchaosで覆われている。torusに非常に近いchaos領域では軌道は淀み、待ち時間分布がlong tailを示すことが知られている。¹⁾これを淀み運動という。淀み運動の起こる領域を淀み層という。その構造を明らかにすることで淀み運動を説明できるだろうと考えられる。また、近可積分系では必ずtorusとchaosが共存しているので、universalityも期待できる。

以上のことを、Henon mapという二次元の保測写像

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = x_{n+1} \end{cases}$$

を用いて調べた。その結果、自己相似的なisland群が以下のようなscaling則に従って存在していることを発見した。

n 番目のisland群の各islandの縦の長さ、横の長さ、現れる位置、周期を、 d_n 、 b_n 、 a_n 、 T_n とすると、

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 \alpha^{n-1}, & \alpha &= 3.89 \times 10^{-3} \\ b_n &= b_1 \beta^{n-1}, & \beta &= 2.01 \times 10^{-2} \\ a_n &= a_1 \gamma^{n-1}, & \gamma &= 3.91 \times 10^{-3} \\ T_n &= T_1 \delta^{n-1}, & \delta &= 1.98 \times 10^1 \end{aligned}$$

である。

この自己相似性はMackayの発見したlast KAM近傍に於けるものとは異なる。²⁾その理由は、自己相似なislandの回転数の系列がnoble numberではないことである。nobleであり、かつ、そのような系列で順に現れる場合にしかMackayの理論は適用できない(ただし、nobleでなくても2次の無理数ならよいがそのようにもなっていない)。しかしながら、淀み運動の原因が、island群の中にislandが非常に密集して軌道が通り抜けることを妨げるようなところが存在していることである点は大変似ているといえる。もし、そのようなところにcantorusが存在するならば、Hanson、Cary、Meissの理論を用いてlong tailを説明できるが、それはまだ³⁾検証できていない。

1) Y. Aizawa et al., Prog. Theor. Phys. Supplement 98(1989), 36

2) R. S. Mackay, Thesis, Princeton 1982

3) J. D. Hanson, J. R. Cary and J. D. Meiss, J. Stat. Phys. 39(1985), 327