

chern類のある refinement とその L 函数への応用

東大 理 斎藤 毅 (Takeshi Saito)

$\mathcal{E}$ を scheme X 上の階数 n の局所自由 $\mathcal{O}_X$ -加群とする. $\mathcal{E}$ の chern 類 $c_i(\mathcal{E})$ が X の Chow 群 $CH^i(X)$ の元として定義されることはよく知られている. ここではその refinement として次のようなものを考える. D を X の閉部分 scheme とし, 全射 $\nu: \mathcal{E}|_D \rightarrow \mathcal{O}_D$ が与えられているとする. すると最高次の chern 類 $c_n(\mathcal{E})$ は D に制限すると 0 になるから, 完全系列 $CH^n(X, D) \rightarrow CH^n(X) \rightarrow CH^n(D)$ を成り立たせる相対 Chow 群 $CH^n(X, D)$ の元に, $c_n(\mathcal{E})$ が自然にもとめられることが期待される. このことに関与したのは G. Anderson である. 以下で実際にその定義を与える. さらにその応用として, X が有限体上の多様体の場合に, X 上の r 進層の L 函数の函数等式の定数項の公式について述べる. この公式は層が不分岐の場合には斎藤秀司氏によるものでその場合には通常の chern 類が現われる. これを tame な分岐を許す場合に拡張すると上のような refinement が必要となる.

1. 相対chern類

X を正則 k -scheme n を自然数とし, $k_{n,X}$ を X 上の n 次 k 群のなす Zariski 層とする. X が Gersten 予想をみたすと仮定すると, X の Chow 群は Bloch-Quillen の公式により $CH^n(X) = H^n(X, k_{n,X})$ と表わされる. Gersten 予想は完全体上 smooth な scheme についてなりたつことが知られており以下で現われる正則 scheme は Gersten 予想をみたすと仮定する. $D = (D_i)_{i \in I}$ を X の正則な閉部分 scheme の有限族で, それらの交わり, つまり任意の $J \subset I$ に対し $D_J = \bigcap_{i \in J} D_i$ は再び正則であるようなものとする. 例えば D が X の単純正規交叉因子のとき, D の既約成分の族 $(D_i)_{i \in I}$ はこれを満たしている. このとき X 上の Zariski 層の複体 $k_{n,X,D}$ を

$$k_{n,X} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} k_{n,D_i} \rightarrow \bigoplus_{i,j \in I} k_{n,D_i D_j} \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{\substack{J \subset I \\ |J|=j}} k_{n,D_J} \rightarrow \cdots$$

と定義し, 相対 Chow 群を hyper cohomology により,

$$CH^n(X, D) = H^n(X, k_{n,X,D}) \text{ で定義する.}$$

$\mathcal{E}$ を階数 n の局所自由 $\mathcal{O}_X$ -加群とする. $r = (r_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_{D_i}$ -加群の準同型 $r_i: \mathcal{E}|_{D_i} \rightarrow \mathcal{O}_{D_i}$ の族で, 任意の $J \subset I$ に対し,

$$r_J = \sum_{i \in J} r_i: \mathcal{E}|_{D_J} \rightarrow \mathcal{O}_{D_J}^J \text{ が全射になるようなものとする. この}$$

とき $CH^n(X, D)$ の refinement 相対 chern 類 $c_n(\mathcal{E}, r) \in$

$CH^n(X, D)$ を次のように定義する. $V \in \mathcal{E}$ にとりなう (共変)

ベクトル束とし、 $\Delta = (\Delta_i)_{i \in I}$ と $\Delta_i = r_i^{-1}(1) \subset V_{D_i}$ で定義される V の閉部分 scheme の族とする。すると r についての仮定から各 $J \subset I$ に対し $\Delta_J = \bigcap_{i \in J} \Delta_i$ が正則となることは容易に確かめられる。 $Z \in V$ の O 切断とすると k 群の性質より、 $H_Z^*(V, k_{V, \Delta}) \cong H^0(X, \mathbb{Z})$ であり、右辺の元 1 の $H^*(V, k_{V, \Delta})$ への像として Z の類 $[Z] \in CH^*(V, \Delta)$ が定義される。さらに k 群の性質より標準写像 $CH^*(X, D) \rightarrow CH^*(V, \Delta)$ が同型であるので、相対 Chern 類 $C_n(\mathcal{E}, r) \in CH^*(X, D)$ と $[Z]$ の逆像と定義する。標準写像 $CH^*(X, D) \rightarrow CH^*(X)$ による $C_n(\mathcal{E}, r)$ の像が通常の Chern 類 $C_n(\mathcal{E})$ と一致することは明らかである。

例. $\dim X = n = 1$ の場合、 X は 1 次元正則 k -scheme、 D はその被約な因子とする。このとき相対 Chow 群 $CH^1(X, D)$ は法 0 の因子類群 $(\bigoplus_{x \in D} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{x \in D} k^x / (1 + m_x)) / k^x$ である。ここで k は X の分身体、 m_x は x の極大イデアルとした。 $\mathcal{L}$ は可逆 $\mathcal{O}_X$ -加群、 r は同型 $\mathcal{L}|_D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_D$ とし、 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ の 0 でない有理切断とする。このとき $C_1(\mathcal{L}, r)$ は、 $x \in D$ に対し、 $a_x \in k^x$ と $\text{ord}_x(a_x) = \text{ord}_x(\mathcal{L})$ かつ $r_x(a_x^{-1} \mathcal{L}) = 1$ となるようにとって $C_1(\mathcal{L}, r) = \sum_{x \in D} \text{ord}_x(\mathcal{L}) + \sum_{x \in D} a_x$ で与えられる。

上では相対 Chern 類を Chow 群に定義した。cohomology に定義することもできる。その場合には $j: U = X - \bigcup_{i \in I} D_i \hookrightarrow X$ を開埋め込みとして、 $C_n(\mathcal{E}, r) \in H^{2n}(X, j_! \mathbb{Z}(n)_U)$ が定

義される。これは Chow 群に定義したものの cycle 射による像と一致するか。Gersten予想が知られていなくて Chow 群には定義できない時などこちらの方が有効なこともある。

以下の応用では X が完全体 F 上 smooth な n 次元 scheme で、 D が X の単純正規交叉因子である場合に、 D に対する極と $\pm$ の微分 1 形式の層 $\Omega_{X/F}^1(\log D)$ と留数 $\text{res}_D: \Omega_{X/F}^1(\log D)|_D \rightarrow \mathcal{O}_D$ の族の相対 Chern 類を扱う。 $U = X - D$ とし、 $\#(X, U)$ の相対標準類 $C_{X,U/F} \in (H^n(X, D)) \cong (-1)^n C_n(\Omega_{X/F}^1(\log D), \text{res})$ と定義する。 X が proper の場合には $C_{X,U/F}$ の次数は U の Euler 数と等しい。

2. L 函数の函数等式の定数項.

F を有限体、 X を F 上 proper, smooth な n 次元 scheme とし、 U を X の開部分 scheme とする。 ℓ を F の標数とは異なる素数とし、 $\mathcal{F}$ を U 上の smooth な ℓ 進層とする。 ρ を $\mathcal{F}$ に対応する U の基本群 $\pi_1(U, \bar{x})$ の ℓ 進表現とする。 $\mathcal{F}$ の L 函数は

$$L(U/F, \mathcal{F}, t) = \prod_{x: X \text{ の点}} \det(1 - \varphi_x \cdot t^{\deg x}; \mathcal{F}_{\bar{x}})^{-1}$$

と無限積で定義される。ここで φ_x は X の幾何的 Frobenius である。これは étale cohomology を用いて、

$$L(U/F, \mathcal{F}, t) = \prod_{i=0}^{2n} \det(1 - \varphi_F \cdot t; H_c^i(U_{\bar{F}}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$$

と書かれる。(たか、この函数等式の定数項を

$$\Sigma_0(U/F, \mathbb{Z}) = \prod_{i=0}^{2n} \det(-\varphi_F; H_c^i(U_{\overline{F}}, \mathbb{Z}))^{(-1)^{i+1}}$$

と定義すれば L 函数は函数等式

$$L(U/F, \mathbb{Z}, t) = \Sigma_0(U/F, \mathbb{Z}) \cdot t^{-\chi_c(U_{\overline{F}}, \mathbb{Z})} \cdot L(X/F, R_{\mathbb{Z}}^* \mathbb{Z}, (\delta^*(t))^{-1})$$

をみたす。ここで $\chi_c(U_{\overline{F}}, \mathbb{Z})$ は Euler 数、 $\delta: U \rightarrow X$ は
 上の $\mathbb{Z}$ 。 $\mathbb{Z}^*$ は $\mathbb{Z}$ の双対層である。以下では、 $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ を $X-U$
 上の $\mathbb{Z}$ の分岐が tame な場合に、 $\Sigma_0(U, \mathbb{Z})$ を前節で定義
 した相対標準類 $C_{X, U/F}$ を使って表わす公式について説明する。

まず $\mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ 上で不分岐な場合、いいかえれば $X=U$ の場合
 には次のことから知られている。

定理(斎藤秀司) X を射影的とし、 $\mathbb{Z}$ を X 上の smooth な入
 進層とすると、

$$\Sigma_0(X/F, \mathbb{Z}) = \det P(-C_{X/F}) \cdot \Sigma_0(X/F)^{\chi_k \mathbb{Z}}$$

がなりたつ。

ここで $\Sigma_0(X/F) = \Sigma_0(X/F, \mathbb{Q}_\ell)$ であり、さらに具体的に
 $(-1)^{P_X} \cdot q^{\frac{1}{2} \chi_X}$ に等しい。ここで q は F の位数、 χ_X は $X_{\overline{F}}$ の
 Euler 数でこれは n が奇数なら偶数となるので $\frac{1}{2} \chi_X$ は常に

整数となる. また p_X は n が奇数なら 0 で n が偶数なら $\frac{n}{2}$ の
 $H^n(X_{\overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Q}_\ell})$ への作用 α の固有値 $q^{\frac{n}{2}}$ の重複度である. もし Tate
 予想が正しければこれは cycle 射 $CH^{\frac{n}{2}}(X) \rightarrow H^n(X_{\overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Q}_\ell})$ の像
 の階数と等しい. $\det \rho$ は π に対応する $\pi_*(X, \bar{\alpha})$ の ℓ -進表現 ρ
 の行列式が定める $\pi_*^{ab}(X)$ の指標である. ここで π をそれと不
 合分群体論の相互写像 $(H^n(X) \rightarrow \pi_*^{ab}(X))$ と合成することによ
 り $CH^n(X)$ の指標とみている. 類体論の相互写像は閉点 x の
 類 $\mathbb{Z}$ -幾何的 Frobenius φ_x にうつすように正規化しておく. X
 の標準類 $c_{X/\mathbb{F}} = (-1)^n c_n(\mathcal{D}_{X/\mathbb{F}}^1)$ は $CH^n(X)$ の元であるから右辺
 が定義される.

以下 $D = X - U$ が単純正規交叉因子であるとし, π を D に
 したがって π が tame であるような U 上の smooth ℓ -進層とす
 る. $\pi_*(U, \bar{\alpha})^{tame}$ を U の D に π が tame な基本群. す
 なわ D に π が tamely ramified な U の étale 被覆を統制す
 る $\pi_*(U, \bar{\alpha})$ の商とし, ρ を π に対応する $\pi_*(U, \bar{\alpha})^{tame}$ の ℓ -進表
 現とし, $\det \rho$ をその行列式が定める $\pi_*(U)^{ab, tame}$ の指標とする.
 このとき類体論の相互写像は Poitou 双対性と cycle 射に
 より $CH^n(X, D) \rightarrow \pi_*(U)^{ab, tame}$ へ拡張されるので, $\det \rho(-c_{X/\mathbb{F}})$
 が上と同様に定義される. ここで次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} CH^n(X, D) & \longrightarrow & \pi_*(U)^{ab, tame} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X) & \longrightarrow & \pi_*(X)^{ab} \end{array}$$

$\Sigma_0(U, F)$ の公式には Gauss 和の積も現われるのでそれを次のように定義する. 有限体 F の自明でない 2 値加法的指標 ψ_0 を一つ固定する. F の有限次拡大 E と $E^\times$ の指標 χ に対し, Gauss 和を $\tau_{E/F}(\chi, \psi_0) = -\sum_{a \in F^\times} \chi^{-1}(a) \psi_0(\text{Tr}_{E/F}(a))$ と定義する. $\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E \subseteq 1$ の中核の群の逆極限 $\varprojlim \mu_n(\bar{E})$ とする. V を $\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$ の 2 値表現で次の条件を満たすものとする.

- $\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$ のある開部分群 Γ があり, Γ 作用の Γ の制限が単となる.

- $g \in E$ の位数とし, g^*V を $\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$ の自己同型 g 倍によるひきもどしとすると g^*V は $\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$ の表現として V と同型.

このような V に対し次の 1, 2 で特徴づけられる Gauss 和の積 $\tau_{E/F}(V, \psi_0)$ が一意的に定まる.

1. 完全系列 $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow V_2 \rightarrow 0$ に対し.

$$\tau_{E/F}(V, \psi_0) = \tau_{E/F}(V_1, \psi_0) \times \tau_{E/F}(V_2, \psi_0).$$

2. $\chi \in \hat{\mathbb{Z}}'(1)_E$ の位数 m の 1 次指標. $f \in (\mathbb{Z}/m)^\times$ で g の位数, $E_f \subseteq E$ の f 次拡大とすると $V = \bigoplus_{i=0}^{f-1} g^{i*}\chi$ に対し

$$\tau_{E/F}(V, \psi_0) = \tau_{E_f/F}(\chi, \psi_0).$$

ここで全射 $\hat{\mathbb{Z}}'(1)_E \rightarrow E_f^\times = \mu_{g \in E_f}(\bar{E})$ により $\chi \in E_f^\times$ の指標と同一視した.

上の幾何的状況にもどり, $E_i \in D$ の既約成分 D_i の定数体とする. すると分岐理論により, $\alpha_i: \hat{\mathbb{Z}}'(1)_{E_i} \rightarrow \pi_1(U, \bar{x})^{\text{tame}}$ が

其役を除いて定まる。与子と ρ の α_i による v をもと $\alpha_i^* \rho$ は上の条件を満たすので、 $\tau_{E_i/F}(\alpha_i^*(\rho), \psi_0)$ が定義される。

D_c^* を $D_c = \bigcup_{i=1}^r D_i$ とし、 $C_i = \deg C_{D_i, D_c^*/F_i}$ とおいて、Gauss 和の積を $\tau_{D/F}(\rho, \psi_0) = \prod_i \tau_{E_i/F}(\alpha_i^*(\rho), \psi_0)^{C_i}$ と定義する。

定理. X が射影的とすると上の記号の下で、

$$\Sigma_0(U/F, \zeta) = \det \rho(-C_{X, U/F}) \cdot \tau_{D/F}(\rho, \psi_0) \times \Sigma_0(U/F)^{rk \zeta}$$

が成り立つ。

例. $\dim X = 1$ の場合。 $X \subseteq F$ 上の proper smooth な曲線とする。 $\omega \in X$ の有理微分で、 $x \in D$ ならば $\text{ord}_x(\omega) = -1$ かつ $\text{res}_x(\omega) = 1$ とするものとする。一般に Lannan の積公式により

$$\frac{\Sigma_0(U/F, \zeta)}{\Sigma_0(U/F)^{rk \zeta}} = \prod_{x \notin D} \frac{\Sigma(k_x, \zeta, \omega)}{\Sigma(k_x, \mathbb{Q}_x, \omega)^{rk \zeta}} \prod_{x \in D} \frac{\Sigma_0(k_x, \zeta, \omega)}{\Sigma_0(k_x, \mathbb{Q}_x, \omega)^{rk \zeta}}$$

が成り立つ。ここで k_x は X の函数体 k の x での完備化であり、右辺の Σ , Σ_0 は局所 Σ 因子である。局所 Σ 因子の公式により $x \notin D$ ならば、 $\frac{\Sigma(k_x, \zeta, \omega)}{\Sigma(k_x, \mathbb{Q}_x, \omega)^{rk \zeta}} = \det \rho(\varphi_x^{\text{ord}_x \omega})$ であり、

$x \in D$ なら $\frac{\Sigma_0(k_x, \mathcal{F}, \omega)}{\Sigma_0(k_x, \mathbb{Q}_x, \omega)^{rk \mathcal{F}}} = \tau_{k(x)/\mathbb{F}}(1, \psi_0)$ となる. 前節

の相対 chern 類の計算例より. この場合の定理が従う.

証明の概略. 証明は Lefschetz pencil を用いて X の次元に関する帰納法による. その際局所体上の多様体についての定理の類似である局所因子についての公式 (以下局所公式と呼ぶ) を使うが. ここではその公式の説明などは略させていたたく. 代わりに文献表にあげたプリントを見ていただきたい. 局所公式の証明は vanishing cycle の具体的な計算によってなされるが. これについては. 多分教理研短期共同研究 "代数幾何学と Hodge 理論" の報告集に書くと思うのでこちらを見て下さい.

簡単のため標数は 2 でないとする. すると Lefschetz pencil をとることにより. 帰納法の仮定を使って次の場合に帰着される. すなわち. X から proper smooth な曲線 Y への平坦な射 f で以下を満たすものが存在する. $V = f^{-1}(U)$. $T = Y - V$ とおくと. $X_U = X \times_Y V$ は V 上 smooth で $D_U = D \times_Y V$ は X_U の f に関して相対的に正則交叉因子であり. 各 $y \in T$ については fiber X_y の各既約因子の重複度は標数と素 (実際には 1 または 2) となる. ここで上の例のような Y の有理微分 ω を

より Leray のスペクトル系列と Lannan の積公式を使うと:

$$\frac{\Sigma_0(U/F, \mathbb{Z})}{\Sigma_0(U/F)^{rk \mathbb{Z}}} = \prod_{y \in V} \frac{\Sigma(k_y, Rf_! \mathbb{Z}, \omega)}{\Sigma(k_y, Rf_! \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{rk \mathbb{Z}}} \times \prod_{y \in T} \frac{\Sigma_0(k_y, Rf_! \mathbb{Z}, \omega)}{\Sigma_0(k_y, Rf_! \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{rk \mathbb{Z}}}$$

がえられる. ここで局所因子の公式を使うと. $y \in V$ ならば

$$\frac{\Sigma(k_y, Rf_! \mathbb{Z}, \omega)}{\Sigma(k_y, Rf_! \mathbb{Q}_\ell, \omega)^{rk \mathbb{Z}}} = \left(\frac{\Sigma_0(U_y/\kappa(y), \mathbb{Z})}{\Sigma_0(U_y/\kappa(y))^{rk \mathbb{Z}}} \right)^{\text{ord}_y \omega}$$

となり. これは帰納法の仮定により計算できる. 一方右辺の
2項は局所公式を適用して計算ができる. そこで完全系列

$$0 \rightarrow f^* \Omega_{X/F}^1(\log T) \rightarrow \Omega_{X/F}^1(\log D) \rightarrow \Omega_{X/Y}^1(\log D/\log T) \rightarrow 0$$

からえられる相対 chern 類の関係式

$$c_n(\Omega_{X/F}^1(\log D), \text{res}) = f^* c_1(\Omega_{X/F}^1(\log T)) \cdot c_{n-1}(\Omega_{X/Y}^1(\log D/\log T)) \\ + \text{補正項}$$

を使, て右辺を整理すると定理の公式がえられる. 上の完全
系列で $\Omega_{X/Y}^1(\log D/\log T)$ は階数 $n-1$ の局所自由加群であるが
補正項は, $\Omega_{X/F}^1(\log D)$ と $\Omega_{X/F}^1(\log T)$ の留数か. $y \in T$ の fiber
において重複度倍だけ異なることによる寄与の分である.

文献

斎藤秀司. "Functional equations of L-functions of
varieties over finite fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sec. IA Math 31 (1984) 287-296.

G. Laumon. "Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles. et conjecture de Weil"

Publ. Math. IHES. 65 (1987) 131-210.

斎藤 毅 " Σ -factor of a tamely ramified sheaf on a variety" 東大 $\mathcal{O}_L \mathcal{O}_H = \mathcal{O} \cong \mathcal{O} - \mathcal{O}$.