

15. 界面の運動とフラクタル

名大・工 折原 宏, 石橋善弘

§ 1. はじめに

非保存系の界面の運動は Allen・と Cahn により理論的に研究され¹⁾ 単位体積当りの界面の面積 A の時間依存性が, $A(t) \propto t^{-1/2}$ で与えられることが示されている。しかし, 最近, 豊木と本田は, この $t^{-1/2}$ 則を初期界面がフラクタルの場合に拡張した²⁾ この理論は

$$A(t) \propto t^{-(D+1-d)/2} \quad (1)$$

を予言している。但し, d は空間次元, D はフラクタル次元である。 $t^{-1/2}$ 則は空間が界面でうめつくされた時, つまり $D=d$ の時にのみ成立する。豊木・本田の理論では, 1) 初期界面が非ランダムフラクタル (コッホ, ペアノ曲線など) であるとし, 2) はじめからその時間発展が自己相似的であると仮定している。これに対し, 我々は一つの界面に着目し, その運動方程式を近似的に解くことにより, 2) の仮定なしに, 初期界面がランダムフラクタル (海岸線など) である場合について同様な結論を得, さらに接線ベクトルの相関関数も導出した³⁾ 非ランダムフラクタルの場合についても, この方法により議論できるが, 本小論では, より直観的な方法によりいくつかの結論を導く。そして, コッホ曲線を初期界面とした時のシミュレーション結果を示し, 理論と比較する。

§ 2. 時間発展と粗視化

非保存系の界面の運動方程式は

$$v = \Gamma K \quad (2)$$

で与えられる。但し, v は着目した界面上の点の法線速度, Γ は運動係数, K は曲率である。界面が入り組んで存在する時には, u -場 (その零点が界面の位置を与える関数) を導入することによって, 上式を近似的に解くことができる⁴⁾ u -場は拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Gamma \frac{d-1}{d} \nabla^2 u \quad (3)$$

に従う。解は界面の初期分布を $u(\mathbf{r}, 0)$ とした時,

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/2\xi^2} u(\mathbf{r}', 0) d\mathbf{r}' \quad (4)$$

で与えられる。但し， $\xi^2 = 2\Gamma t(d-1)/d$ である。上式は時刻 t での界面の分布は，初期分布を距離 $\xi(t)$ にわたって粗視化すれば得られることを示している。この様な幾何学的解釈により，初期界面がランダムフラクタルおよび非ランダムフラクタルの場合を議論する。

簡単のために，二次元系の一次元界面を考え，初期界面はフラクタルであるとする。この様な系を特徴づけるフラクタル次元は一つだけではない。系は閉じた界面（ループ）の集合体と考えられるので，たとえば，一つの界面のフラクタル次元と界面の集合体のフラクタル次元の二種類の異なるフラクタル次元が存在する。前者を D ，後者を D_w と表すことにする。したがって，一つの界面を考えるか，全系を考えるかによって結果が異なってくる。

まず，初期界面がランダムフラクタルである場合に一つの界面に着目し，その長さ l がどのように時間変化するかを調べる。ランダムフラクタル界面を一辺の長さ ϵ の正方形で完全に覆うのに必要な正方形の数を $N(\epsilon)$ とすると， $N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$ となる⁵⁾。但し，この関係が成立するためには， ϵ が界面で囲まれた領域のサイズより小さくなくてはならない。時刻 t ではこの界面が $\xi(t)$ で粗視化されるが，この時の界面の長さは $\xi N(\xi) \propto \xi^{-(D-1)}$ で与えられる。特徴的長さ ξ は $t^{1/2}$ に比例するから，結局

$$l(t) \propto t^{-(D-1)/2} \quad (5)$$

を得る。この式は(1)で $d=2$ とおいたものと一致している。ここで注目すべき点は，特徴的長さ ξ は $t^{1/2}$ に比例するが（非保存系であることの特徴がこの事実表れている），長さの時間依存性の指標は着目した対象のフラクタル次元に依存するということである。

次に，コッホ曲線の様な非ランダムフラクタルの場合を考える。ここでは，ジェネレーターとして，コッホ曲線を変形した図1を例にとる。各辺の長さは1で，左端から右端までの長さが L であり，フラクタル次元は $D = \log 4 / \log L$ で与えられる。通常のコッホ曲線は $L=3$ の場合にあたる。非ランダムフラクタルの特徴として，曲線を L^n 倍（ n は整数）した時，もとの

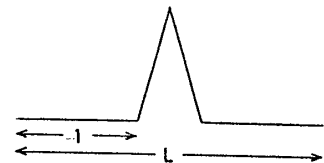


図1 コッホ曲線のジェネレーター。

曲線に重なる。これに対して，ランダムフラクタルでは，任意の実数倍しても，統計的にはあるが，もとの曲線と同じである。このスケール変換に対する対称性の違いにより，時間発展

にも差ができる。 L 倍して元の曲線と重なることから、 ξ で粗視化したものと $L\xi$ で粗視化したものとは相似であることがわかる。つまり時間が経過するとともに、周期的に相似な図形が現れる。時刻 t_n (n は整数)において、各時刻の界面が相似であるとする、 $\xi(t_n) = L\xi(t_{n-1})$ が成り立つ(図2)。つまり、 $t_n = L^2 t_{n-1} = \dots = L^{2n} t_0$ 。また、時刻 t_n の界面の長さは時刻 t_{n-1} の界面の長さの $L/4$ 倍、一般には $L/L^D = L^{-(D-1)}$ 倍になっている。従って、長さ l に対して、 $l(t_n) = L^{-(D-1)} l(t_{n-1}) = \dots = L^{-n(D-1)} l(t_0)$ が成り立つ。この式と $t_n = L^{2n} t_0$ から L を消去すれば

$$l(t_n) = t_n^{-(D-1)/2} \cdot t_0^{(D-1)/2} l(t_0) \quad (6)$$

が得られる。上式は、非ランダムフラクタルの場合の(5)式に対応するものであるが、離散的な時刻 $t_n = L^{2n} t_0$ に対してのみ成立するという点で(5)式とは異なる。

この節の最後に初期界面がランダムフラクタルの場合の全界面の長さを求めてみる。Mandelbrotによると⁵⁾ある閉じた界面の平均サイズを λ とし、サイズが $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ の間にあるループの数を $n(\lambda) d\lambda$ とした時

$$n(\lambda) \propto \lambda^{-D_w-1} \quad (7)$$

が成立する。ここで、一つの界面を考えた時と同じ様に、界面が ξ で粗視化されるとする。サイズ λ のループを ξ で粗視化した時の周長を $l_s(\lambda, \xi)$ とすると、以下のスケーリング関係

$$l_s(\lambda, \xi) = \xi f(\lambda/\xi) \quad (8)$$

が成立するであろう。(7), (8)式より、時刻 t における単位面積当りの界面の長さ $A(t)$ は

$$\begin{aligned} A(t) &\propto \int_0^\infty l_s(\lambda, \xi) n(\lambda) d\lambda \\ &\propto \xi^{-(D_w-1)} \\ &\propto t^{-(D_w-1)/2} \end{aligned} \quad (9)$$

与えられる。この式は、(5)式とまったく同じ形をしている。空間が界面で完全に覆われたと

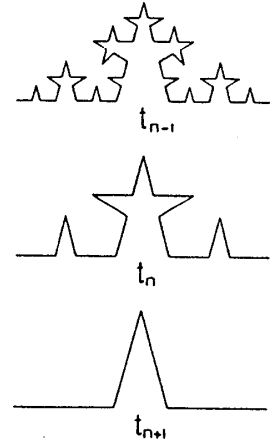


図2 コッホ曲線の時間発展 (模式図)。

き、つまり $D_w = 2$ の時に Allen と Cahn の結果を与える。

§ 3. 初期界面がコッホ曲線である場合のシミュレーション

初期界面がジェネレーター図1からつくられるコッホ曲線である場合をシミュレートする。但し、ここでは $D = 1.8$ にとる。内挿を6回行い、 4^6 本の線分からなる折れ線の各頂点の位置を指定する位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ とする。 $\mathbf{r}_i$ の運動は曲率を決めれば定まるから、曲率を図3の様な幾何学的関係より求める。微小時間

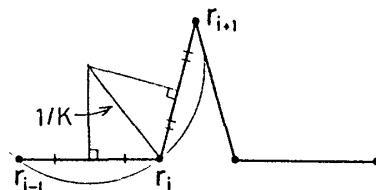


図3 $\mathbf{r}_i$ での曲率。

Δt ずつ時間を進め、各時刻での $\mathbf{r}_i$ を計算する。但し、計算時間を節約するために、一周期が終ったところで位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ の数を $1/4$ にしている。図4に計算結果を示す。同じギリシャ数字のついた図は相似である。つまり、各時刻の比は $L^2 \doteq 4.7$ にとってある。一周期の間に界面はその形を変えつつ時間発展しているのがわかる。

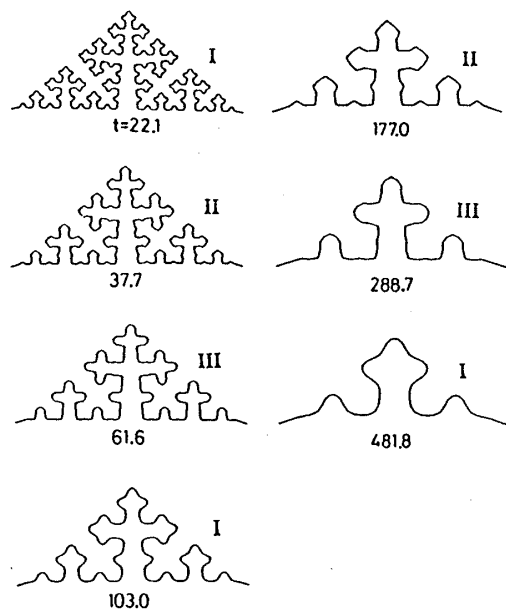


図4 コッホ曲線 ($D = 1.8$) のシミュレーション。

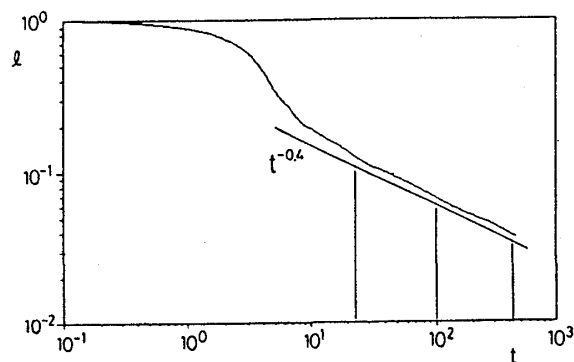


図5 界面の長さの時間依存性。図中の縦線は一周期を示す。

界面の長さの時間依存性を図5に示す。時間が経つにつれ、 $t^{-0.4}$ の直線に近づいて行く。しかし、直線には乗らず、予想されたように、周期的な振動がみられる。初期段階で直線から大きくはずれているのは、界面がまだ折れ線的で十分に滑らかになっていないからである。

§ 4. おわりに

本論文では、非保存系の界面が $t = 0$ でフラクタルになっていると仮定した時の界面の時間発展を問題とし、界面の長さの時間依存性とそのフラクタル次元により決定されることを述べた。しかし、無秩序相から秩序相へ系を急冷したときに、界面が実際にフラクタルになっているかどうかについては、液晶での実験³⁾を除き、はっきりしたことはわかっていない。さらに、理論においてもガウス場でのクラスターのサイズ分布などは求められていない。したがって、これらの点を明らかにするために、界面の幾何学的特徴の研究が望まれる。

文 献

- 1) S. M. Allen and J. W. Cahn: Acta. Metall. 27 (1979) 1085.
- 2) H. Toyoki and K. Honda: Phys. Lett. 111 (1985) 367.
- 3) H. Orihara and Y. Ishibashi: J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 2338.
- 4) T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki: Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1223.
- 5) B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman San Francisco, 1982).

16. ペンローズ格子上のイジングスピン系

中部大・工 宮 島 佐 介
ブランドイス大 小田垣 孝

準結晶とは結晶の特徴である周期性が欠けている結晶群で、D. Schechtman et al. (Phys. Rev. Letter 53 (1984) 1951) により発見された。準結晶には非周期性の他に局所的な 5 回対称性とグローバルな 10 回対称性が見られる。即ち、X 線回折像には、美しい 10 回対称のスポットが得られている。このような対称性をもつ 2 次元版の格子として、上記の発見以前に 2 種類の基本格子（太い菱形と細い菱形）の組み合わせにより、非周期格子の得られることが、ペンローズにより示されていた。最近このペンローズ格子の 3 次元への拡張が小川、その他の人達により調べられている。

扱て、この準結晶の特異性がいろいろな新しい現象をもたらすのではないかの期待のもとに、物性測定がなされているが、大体において Amorphous と類似の結果が得られているに過