

ある非適合一次要素による初流拡散問題の
有限要素近似について

富山商船高専 大森克史

0. 序 Stokes 問題を解くのに有効な非適合一次要素を使って、初流拡散問題の有限要素近似を考え、そのスキームが離散最大値原理を満たすことを示す。また、近似解の L^2 -収束性についても論ずる。

1. 連続問題 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を多面体領域とし、 Γ をその境界とする。 Ω 上の Sobolev 空間を $H^m(\Omega)$ とし、norm、semi-norm を各々 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$, $|\cdot|_{m,\Omega}$ で表わす。 $L^2(\Omega)$ の norm を $|\cdot|_{0,\Omega}$ 、内積を $(\cdot, \cdot)$ で表わす。

次の初流拡散方程式

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta u + (b \cdot \nabla) u = f \quad \text{in } \Omega, \\ (1.2) \quad u = u_0 \quad \text{on } \Gamma, \end{array} \right. \end{aligned}$$

を考える。ただし、 $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $b = b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ は十分滑らかであり、 $\nu > 0$ (定数) とする。(§6.7 では簡単のため、 $u_0 = 0$ とする。)

(1.1) - (1.2) の変分定式化は次の通りである。

$$(P) \quad \begin{cases} u - u_0 \in H_0^1(\Omega) & \text{かつ} \\ a(u, v) = (f, v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

なる $u \in H^1(\Omega)$ を見出せ。ただし、

$$(1.3) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \{ \nu \nabla u \cdot \nabla v + (b \cdot \nabla u) v \} dx,$$

$$(1.4) \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v dx$$

である。

補題 1. $\sup_{x \in \Omega} \|b(x)\| < \infty$ ($\|\cdot\|$ は Euclidean norm) ならば、

$a(\cdot, \cdot)$ は $H_0^1(\Omega)$ 上で連続である。(i.e.)

$$(1.5) \quad \exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad \square$$

補題 2. $\operatorname{div} b \leq 0$ ならば、 $a(\cdot, \cdot)$ は $H_0^1(\Omega)$ -elliptic である。

(i.e.)

$$(1.6) \quad a(u, u) \geq \nu \|u\|_{1, \Omega}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad \square$$

従って、Lax-Milgram の定理から、(P) の解の存在と一意性を得る。

定理 1. $\sup_{x \in \Omega} \|b(x)\| < \infty$ かつ $\operatorname{div} b \leq 0$ ならば、(P) は

一意解 u を持つ。 $\square$

また、良く知られた結果として、(P) の解 u に対して、最大値原理が成立つ。

定理 2. (最大値原理) $f \leq 0$ in Ω かつ (P) の解 u が $\bar{\Omega}$ で連続、 Ω で 2 回連続微分可能ならば、

$$(1.7) \quad \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \Gamma} u_0(x)$$

が成立つ。 $\square$

2. 非適合一次要素

T_h を Ω の有限要素分割 ($\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$, $K: n$ -simplex) とする。 $1 \leq i \leq n+1$ に対して、 A_i を K の頂点、 K'_i を A_i を含まない K の $(n-1)$ 次元の面、 B_i を K'_i の重心、 λ_i を $x \in K$ の A_i ($1 \leq i \leq n+1$) に関する重心座標、 μ_i を $x \in K$ の B_i ($1 \leq i \leq n+1$) に関する重心座標とする。

λ_i と μ_i の間には、次の関係があることに注意する。

$$(2.1) \quad \mu_i = 1 - n\lambda_i \quad (1 \leq i \leq n+1).$$

従って、 $\{B_i\}_{i=1}^{n+1}$ は $P_1(K)$ -unisolvant であり、

$$(2.2) \quad u = \sum_{i=1}^{n+1} u(B_i) \mu_i \quad \forall u \in P_1$$

が成立つ。

すべての K'_i の重心 B_i の番号を付けなおして、

B_i ($1 \leq i \leq N$) : Ω の内部にある K'_i の重心

B_i ($N+1 \leq i \leq N+M$) : Γ 上の K'_i の重心

としておく。

有限要素空間を次の様に定義する。

$$(2.3) \quad V_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \mid (i) v_h \text{ は各 } K \in T_h \text{ 上で一次、}$$

(ii) v_h は B_i ($1 \leq i \leq N+M$) で連続. }

$$(2.4) \quad V_{0h} = \{v_h \in V_h \mid v_h = 0 \text{ at } B_i \text{ } (N+1 \leq i \leq N+M)\}.$$

$w_{ih} \in V_h$ を

$$(2.5) \quad w_{ih}(B_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N+M$$

を満たすものとする. $\{w_{ih} \mid 1 \leq i \leq N+M\}$, $\{w_{ih} \mid 1 \leq i \leq N\}$ は

各々 V_h , V_{0h} の基底である. また,

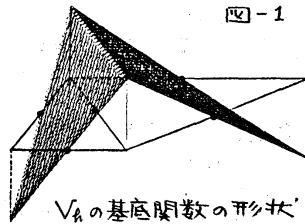
V_h , V_{0h} は各々 $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ の一つ

の近似と考えられるが、隣接要素

の面上で不連続であるから、 $V_h \not\subset H^1(\Omega)$, $V_{0h} \not\subset H_0^1(\Omega)$ である.

従って、或る意味での整合条件が必要になる. 次の補題は、

この要素が Patch Test をパスすることを意味する.



補題 3. (i)

$$(2.6) \quad \int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} (v_h|_{K_1} - v_h|_{K_2}) d\gamma = 0 \quad \forall K_1, K_2 \in T_h, \forall v_h \in V_h.$$

(ii)

$$(2.7) \quad \int_{\partial K \cap \Gamma} v_h|_K d\gamma = 0 \quad \forall K \in T_h, \forall v_h \in V_{0h}. \quad \square$$

(証明) (2.1) から、

$$\int_{K'_i} \mu_j d\gamma = \int_{K'_i} d\gamma - n \int_{K'_i} \lambda_j d\gamma.$$

一方、

$$\int_{K'_i} \lambda_j d\gamma = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ \frac{1}{n} \int_{K'_i} d\gamma & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、

$$(2.8) \quad \int_{K'_i} \mu_j d\gamma = \left(\int_{K'_i} d\gamma \right) \delta_{ij} \quad \text{を得る.}$$

$v_h \in V_h$, $\partial K_1 \cap \partial K_2 \neq \emptyset$ なる $K_1, K_2 \in T_h$ に対して、

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} (v_h|_{K_1} - v_h|_{K_2}) d\gamma \\ &= \int_{\partial K_1 \cap \partial K_2} \left(\sum_{k=1}^{n+1} v_h(B_{k,1}) \mu_{k,1} - \sum_{k=1}^{n+1} v_h(B_{k,2}) \mu_{k,2} \right) d\gamma = (*) \end{aligned}$$

が成立つ。ただし、 $B_{k,1}, B_{k,2}$ ($1 \leq k \leq n+1$) は各々 K_1, K_2 の $(n-1)$ 次元面の重心、 $\mu_{k,1}, \mu_{k,2}$ ($1 \leq k \leq n+1$) は各々 $x \in K_1, x \in K_2$ の $B_{k,1}, B_{k,2}$ ($1 \leq k \leq n+1$) に関する重心座標とする。 $\partial K_1 \cap \partial K_2$ の重心を B_i とすれば、(2.8) から、

$$(*) = v_h(B_i) \text{meas}(\partial K_1 \cap \partial K_2) - v_h(B_i) \text{meas}(\partial K_1 \cap \partial K_2) = 0$$

を得る。(2) は明らか。

3. 有限要素近似 bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ の近似として、

$a_h(\cdot, \cdot)$ を次の様に定義する。

$$(3.1) \quad a_h(u_h, v_h) = a_h'(u_h, v_h) + a_h''(u_h, v_h),$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} a_h'(u_h, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h \, dx, \\ a_h''(u_h, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K (b \cdot \nabla_h u_h) v_h \, dx, \end{cases}$$

$$\nabla_h u_h = \nabla(u_h|_K) \quad \forall K \in T_h.$$

$H_0^1(\Omega)$ 上では、 $\nabla_h \equiv \nabla$ であるから、

$$(3.3) \quad a_h(u, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

であり、 $a_h(\cdot, \cdot)$ は $V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ 上で定義されている。 V_h に次の semi-norm を与える。

$$(3.4) \quad \|v_h\|_h = \left(\sum_{K \in T_h} |v_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2}.$$

補題 4. $\|\cdot\|_h$ は V_{0h} 上の norm である.

(証明) $v_h \in V_{0h}$ を $\|v_h\|_h = 0$ となるものとする. $\|v_h\|_h$ の定義から、各 $K \in T_h$ 上で、

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

である. 従って、 v_h は各 $K \in T_h$ 上で定数である. ところが、

補題 3 (i) から、 v_h は Ω 上定数であり、かつ補題 3 (ii) から

Γ 上で $v_h = 0$ である. よって、 $v_h \equiv 0$ を得る.

また、 $\|v\|_h = |v|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ であるから、 $\|\cdot\|_h$ は $V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ 上で定義されている.

(P) の離散問題は、次の通りである.

$$(P_h) \quad \begin{cases} u_h - u_{0h} \in V_{0h} & \text{かつ} \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) & \forall v_h \in V_{0h} \end{cases}$$

なる $u_h \in V_h$ を見出せ. ところで、 u_{0h} は $u_{0h}(B_i) = u_0(B_i)$ ($N+1 \leq i \leq N+M$) を満たす V_h の要素とする.

(P_h) の解の形は、

$$(3.5) \quad u_h = \sum_{i=1}^N U_i w_{ih} + \sum_{i=N+1}^{N+M} G_i w_{ih},$$

(ところで、 $U_i = u_h(B_i)$ $1 \leq i \leq N$, $G_i = u_0(B_i)$ $N+1 \leq i \leq N+M$)

であるから、 (P_h) は次の連立一次方程式に帰着される.

$$(3.6) \quad \begin{cases} A\mathbb{U} + A_1\mathbb{V} = \mathbb{F} , \\ \mathbb{V} = \mathbb{G} , \end{cases}$$

$$(3.7) \quad \begin{cases} A = (a_{ij}) = (a_h(\omega_{jh}, \omega_{ih})) \quad 1 \leq i, j \leq N, \\ A_1 = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq N, N+1 \leq j \leq N+M, \\ \mathbb{U} = (\mathbb{U}_j) \quad 1 \leq j \leq N, \quad \mathbb{V} = (\mathbb{V}_j) \quad N+1 \leq j \leq N+M \\ \mathbb{G} = (\mathbb{G}_j) \quad N+1 \leq j \leq N+M, \\ \mathbb{F} = (\mathbb{F}_j) = \left(\sum_{k=1}^{N+M} f(B_k)(\omega_{kh}, \omega_{jh}) \right) \quad 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

4. 離散最大値原理 適合一次要素の場合 (Kikuchi [2])

と同様である。各 $K \in \mathcal{T}_h$ に対して、次の量を定義しておく。

$$(4.1) \quad \begin{cases} h_K : K \text{ の直径}, \\ \rho_K : K \text{ の内接球の直径の上限}, \\ \kappa_K : K \text{ の最小垂線長}, \\ \lambda_K : K \text{ の最大垂線長}, \\ \tilde{b}_K = \sup_{x \in K} \|b\|, \quad \tilde{b} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \tilde{b}_K, \\ h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K, \\ \tau_K = \max_{i \neq j} \frac{[\mu_i, \mu_j]}{\|\mu_i\| \|\mu_j\|}, \end{cases}$$

ただし、 $[\mu_i, \mu_j] = \nabla \mu_i \cdot \nabla \mu_j$, $\|\mu_i\| = [\mu_i, \mu_i]^{1/2}$.

定義 1. (Ciarlet-Raviart [3]) 行列 $A_0 = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N+M$

が、non-negative type であるとは、

$$(4.2) \quad a_{ij} \leq 0 \quad i \neq j \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N+M \quad \text{かつ}$$

$$(4.3) \quad \sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq N$$

が成立する時に言う。

定義 2. (Fujii [4]) 有限要素分割の族 $\{T_h\}$ が strictly acute type であるとは、

$$(4.4) \quad \tau_K \leq -\tau_0 \quad \forall K \in T_h$$

となる T_h に独立な定数 $\tau_0 > 0$ が存在する時に言う。

補題 5. $\sigma_K = \max_{i \neq j} \frac{[\lambda_i, \lambda_j]}{\|\lambda_i\| \|\lambda_j\|}$ とする時、各 $K \in T_h$ に対し $\tau_K = \sigma_K$ である。 $\square$

補題 6. $\sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} = 0 \quad 1 \leq i \leq N. \quad \square$

(2.1) および $\forall \mu_i \|\mu_i\| = n \|\lambda_i\| \quad 1 \leq i \leq n+1$ に注意すれば、[2] の Lemma 2 から、次の補題を得る。

補題 7. (i) $\frac{n}{\lambda_K} \leq \|\mu_i\| \leq \frac{n}{\kappa_K} \quad 1 \leq i \leq n+1, K \in T_h,$
 (ii) $\int_K |\mu_i| dx \leq \frac{(2n+1) \text{meas}(K)}{n+1} \quad 1 \leq i \leq n+1, K \in T_h. \quad \square$

各 $K \in T_h, 1 \leq i, j \leq n+1$ に対して、

$$(4.5) \quad \begin{cases} \alpha_{ij}(K) = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \kappa_k} \int_K \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} dx \\ \beta_{ij}(K) = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \kappa_k} \int_K b_k \frac{\partial \mu_j}{\partial x_k} \mu_i dx \\ A(K) = (\alpha_{ij}(K) + \beta_{ij}(K)) \end{cases} \quad \text{と置く.}$$

補題 8. $\{T_k\}$ が strictly acute type ならば、

$$(i) \quad \alpha_{ij}(K) \leq \frac{n^2 \tau_K \text{meas}(K)}{\lambda_K^2} \quad i \neq j$$

$$(ii) \quad |\beta_{ij}(K)| \leq \frac{n(2n+1) \tilde{b}_K \text{meas}(K)}{(n+1) \kappa_K} \quad \text{が成立つ. } \square$$

(証明) (i) $\alpha_{ij}(K) = \text{meas}(K) [\mu_j, \mu_i] \leq \text{meas}(K) \tau_K \|\mu_j\| \|\mu_i\|$

であるから、補題 7 (i) より従う。

(ii) Schwarz の不等式 を使えば、

$$|\beta_{ij}(K)| \leq \int_K \|\mu_j\| \|\mu_i\| dx \leq \tilde{b}_K \|\mu_j\| \int_K \|\mu_i\| dx$$

を得る。従って、補題 7 (ii) から従う。

$$\text{補題 9.} \quad \frac{\lambda_K^2}{\kappa_K} \leq - \frac{n(n+1) \vee \tau_K}{(2n+1) \tilde{b}_K} \quad K \in T_h \quad \text{ならば、行列 } A_0 \text{ は}$$

non-negative type である。 $\square$

また、 $\{T_h\}$ が regular とすると、

$$(4.6) \quad \min_{K \in T_h} \frac{\kappa_K}{h_K} \geq \gamma_2$$

なる定数 $\gamma_2 > 0$ が取れるから、

$$h_K \leq - \frac{n(n+1) \vee \tau_K \gamma_2}{(2n+1) \tilde{b}_K} \quad \text{ならば、} \quad \frac{\lambda_K^2}{\kappa_K} \leq - \frac{n(n+1) \vee \tau_K}{(2n+1) \tilde{b}_K}$$

であることを注意しておく。

定理 3. (離散最大値原理) $\{T_h\}$ が regular, strictly acute

type, 行列 A が正則、 $h \leq \frac{n(n+1) \vee \tau_0 \gamma_2}{(2n+1) \tilde{b}}$ かつ $\max_{1 \leq i \leq N} F_i \leq 0$

ならば、(3.6) の解 U は次式を満たす。

$$(4.7) \quad \max_{1 \leq i \leq N} U_i \leq \max(0, \max_{1 \leq i \leq M} G_{N+i}). \quad \square$$

(証明) (i) $\max_{1 \leq i \leq N} F_i < 0$ の時を考える. $U_i = \max_{1 \leq j \leq N} U_j$ とする.

$U_i \leq 0$ の時は明らか. そこで, $U_i > 0$ とする.

$U_i > \max_{1 \leq i \leq M} G_{N+i} (= \max_{1 \leq i \leq M} U_{N+i})$ と仮定する.

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j + \sum_{j=1}^M a_{i, N+j} U_{N+j} = F_i \quad 1 \leq i \leq N,$$

これから, 行列 A_0 が non-negative type であることを使えば,

$$\begin{aligned} a_{ii} U_i &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (-a_{ij}) U_j + \sum_{j=1}^M (-a_{i, N+j}) U_{N+j} + F_i \\ &\leq -U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+M} a_{ij} + F_i \end{aligned}$$

が成立つ. 従って,

$$0 > F_i \geq U_i \sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} = U_i > 0$$

となり, 矛盾である.

(ii) $\max_{1 \leq i \leq N} F_i \leq 0$ の時は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$F_\varepsilon = (F_{\varepsilon i}) = (F_i - \varepsilon, \dots, F_N - \varepsilon)^t$$

とすると, $\max_{1 \leq i \leq N} F_{\varepsilon i} < 0$ となり (i) のケースに帰着される.

$U_\varepsilon = (U_{\varepsilon i}) \quad 1 \leq i \leq N$ を次の連立一次方程式の解とする.

$$\begin{cases} AU + A_1 V = F_\varepsilon \\ V = G \end{cases}$$

A が正則であるから,

$$U_\varepsilon = A^{-1}(F_\varepsilon - A_1 V)$$

であり, (i) の結果から

$$\max_{1 \leq i \leq N} U_{\varepsilon i} \leq \max(0, \max_{1 \leq i \leq M} G_{N+i})$$

が成立つ。さらに、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の時 $U_{\varepsilon} \rightarrow U$ であるから

$$\max_{1 \leq i \leq N} U_i \leq \max(0, \max_{1 \leq i \leq M} G_{N+i})$$

を得る。

5. 行列 A の正則性

定理3では、 A の正則性を仮定したが、これは離散問題 (P_h) の可解性に関連している。今節では (P_h) の可解性を調べよう。

定義3. K' を $K \in T_h$ の $(n-1)$ 次元の面とし、 φ_k を n 変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する k 次以下の多項式全体とする時、 $M_{K'}^0: L^2(K') \rightarrow \varphi_{0,K}$ を

$$(5.1) \quad M_{K'}^0 v = \frac{1}{\text{meas}(K')} \int_{K'} v \, d\gamma$$

で定義する。□

次に、以下の議論でよく使う技巧的補題を述べる。

補題10. (Crouzeix-Raviart [1]) $\forall \phi, v \in H^1(K)$ に対して

$$(5.2) \quad \left| \int_{K'} \phi(v - M_{K'}^0 v) \, d\gamma \right| \leq C \sigma(K) h_K |\phi|_{1,K} |v|_{1,K}$$

なる K に独立な定数 $C > 0$ が存在する。ただし、 $\sigma(K) = h_K / \rho_K$ 。□

$a_h(\cdot, \cdot)$ は、補題1と同一の仮定のもとで、 V_{0h} 上連続であり、また $V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ 上で連続であることが容易に示せる。即ち、

$$(5.3) \quad \exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |a_h(u_h, v_h)| \leq M \|u_h\|_h \|v_h\|_h \quad \forall u_h, v_h \in V_{0h}.$$

$$(5.4) \quad \exists \tilde{M} > 0 \quad \text{s.t.} \quad |a_h(u, v)| \leq \tilde{M} \|u\|_h \|v\|_h \quad \forall u, v \in V_{0h} + H_0^1(\Omega).$$

補題 11. $\operatorname{div} b \leq 0$ か $> h$ か + あるいは $\leq h$ か. $a_h(\cdot, \cdot)$ は V_{0h} -elliptic である. (i.e.)

$$(5.5) \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{s.t.} \quad a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_h^2 \quad \forall v_h \in V_{0h}. \quad \square$$

(証明) $\forall v_h \in V_{0h}$ に対し τ , 各 $K \in \mathcal{T}_h$ 上で Green の公式を使うと,

$$(5.6) \quad a_h(v_h, v_h) = \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{1,K}^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_h^2 (b \cdot m) d\gamma - \int_K (\operatorname{div} b) v_h^2 dx.$$

$\operatorname{div} b \leq 0$ であるから,

$$(5.7) \quad a_h(v_h, v_h) \geq \nu \|v_h\|_h^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_h^2 (b \cdot m) d\gamma$$

が成立する.

$$(5.8) \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v_h^2 (b \cdot m) d\gamma = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} v_h^2 (b - b(B)) \cdot m d\gamma + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} v_h^2 b(B) \cdot m d\gamma$$

であるから, これを使って (5.7) の第 2 項を評価しよう. $\Gamma = \Gamma'$

と, B は $K' \subset \partial K$ の重心である.

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} v_h^2 b(B) \cdot m d\gamma = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} v_h (v_h - v_h(B)) b(B) \cdot m d\gamma$$

であるから, 補題 10 によって次の評価を得る.

$$(5.9) \quad \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} v_h^2 b(B) \cdot m d\gamma \right| \leq C_1 h \|v_h\|_h^2.$$

一方,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} v_h(B)^2 (b - b(B)) \cdot m d\gamma = 0$$

に注意すれば, (5.8) の第 1 項は次の様に書ける.

$$\begin{aligned}
(5.10) \quad & \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} v_h^2 (b - b(B)) \cdot m \, d\gamma \\
&= \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} (v_h - v_h(B))^2 (b - b(B)) \cdot m \, d\gamma \\
&\quad + \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} 2(v_h - v_h(B)) v_h(B) (b - b(B)) \cdot m \, d\gamma.
\end{aligned}$$

次の事実注意到すれば、

$$|v_h - v_h(B)| \leq h_K \|\nabla v_h\| \quad \text{on } K,$$

$$\|b - b(B)\| \leq C_2 h_K \quad \text{on } K,$$

$$\text{meas}(K') \leq n \cdot \text{meas}(K) / 2\rho_K$$

$$\sqrt{\text{meas}(K)} \sum_{i=1}^{n+1} |v_h(B_i)| \leq C_3 |v_h|_{0,K}$$

($T = \mathcal{T}_h$, B_i ($1 \leq i \leq n+1$) は ∂K の $n+1$ 個の面 K' の重心)、次の不等式を得る。

$$\sum_{K' \subset \partial K} \left| \int_{K'} (v_h - v_h(B)) v_h(B) (b - b(B)) \cdot m \, d\gamma \right| \leq C_4 h_K^2 |v_h|_{0,K} |v_h|_{1,K},$$

$$\sum_{K' \subset \partial K} \left| \int_{K'} (v_h - v_h(B))^2 (b - b(B)) \cdot m \, d\gamma \right| \leq C_5 h_K^3 |v_h|_{1,K}^2.$$

従って、これらの式をすべての $K \in T_h$ について加えると、

$$(5.11) \quad \left| \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} (v_h - v_h(B)) v_h(B) (b - b(B)) \cdot m \, d\gamma \right| \leq C_6 h^2 \|v_h\|_h^2,$$

$$(5.12) \quad \left| \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} (v_h - v_h(B))^2 (b - b(B)) \cdot m \, d\gamma \right| \leq C_7 h^3 \|v_h\|_h^2,$$

を得る。 $T = \mathcal{T}_h$, (5.11) については discrete Poincaré inequality を用

いた。(5.10), (5.11), (5.12) より、 h を十分小さくすれば

$$(5.13) \quad \left| \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \subset \partial K} \int_{K'} v_h^2 (b - b(B)) \cdot m \, d\gamma \right| \leq C_8 h^2 \|v_h\|_h^2$$

を得る。従って、(5.7) と (5.13) により、 h を十分小さくすれば、

$$(5.14) \quad a_h(v_h, v_h) \geq (\nu - C_9 h) \|v_h\|_h^2 \quad \forall v_h \in V_{0h},$$

$$(5.15) \quad \nu - C_9 h > 0$$

となる定数 $C_9 > 0$ が存在することになる。

定理 4. $\sup_{x \in \Omega} \|b(x)\| < \infty$, $\operatorname{div} b \leq 0$ かつ h が十分小ならば、離散問題 (P_h) は一意解 u_h をもつ. $\square$

近似解の誤差評価を得るには、 $a_h(\cdot, \cdot)$ の uniformly $V_{0h} + H_0'(\Omega)$ -ellipticity が必要である。以下では、 $a_h(\cdot, \cdot)$ の uniformly $V_{0h} + H_0'(\Omega)$ -ellipticity を示す。先ず、次の直交分解を考える。

$$(5.16) \quad V_{0h} = (V_{0h} \cap H_0'(\Omega)) \oplus (V_{0h} \cap H_0'(\Omega))^\perp.$$

従って、

$$(5.17) \quad V_{0h} + H_0'(\Omega) = H_0'(\Omega) \oplus (V_{0h} \cap H_0'(\Omega))^\perp$$

である。(5.17) から、 $v \in V_{0h} + H_0'(\Omega)$ は次の様に一意分解される。

$$(5.18) \quad v = v_h + v_0, \quad v_h \in V_{0h}, \quad v_0 \in H_0'(\Omega).$$

$\|\cdot\|_h$ に付随した内積を

$$(u, v)_{1,h} = \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h u \cdot \nabla_h v \, dx$$

で表わせば、

$$(v_h, v_0)_{1,h} = 0 \quad v_h \in V_{0h}, \quad v_0 \in H_0'(\Omega)$$

であるから、 $\forall v \in V_{0h} + H_0'(\Omega)$ に対し

$$(5.19) \quad a_h(v, v) = a_h(v_h, v_h) + a_h(v_0, v_0) + a_h^2(v_h, v_0) + a_h^2(v_0, v_h)$$

である。

補題 12. ある定数 $C > 0$ に対し、次の評価が成立つ。

$$(5.20) \quad |a_h^2(v_h, v_0) + a_h^2(v_0, v_h)| \leq C(h + \max_{x \in \Omega} |\operatorname{div} b|) (\|v_0\|_{1,\Omega}^2 + \|v_h\|_h^2). \quad \square$$

(証明) $a_h^2(v_h, v_0) + a_h^2(v_0, v_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K b \cdot \nabla_h(v_0 v_h) dx$ に注意し

て、各 $K \in T_h$ 上 Green の公式を使えば、

$$\begin{aligned} & a_h^2(v_h, v_0) + a_h^2(v_0, v_h) \\ &= \sum_{K \in T_h} \int_K (v_0 v_h) b_n dy - \sum_{K \in T_h} \int_K (\operatorname{div} b) v_0 v_h dx, \end{aligned}$$

とあり、 $b_n = b \cdot n$.

$$\sum_{K \in T_h} \int_K (v_0 v_h) b_n dy = \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \subset K} \int_{K'} (b_n v_0 - M_{K'}^0(b_n v_0)) v_h dy$$

とあり、ある定数 $\beta_0, \beta_1 > 0$ に対し、

$$|b_n v_0|_{1,K} \leq \beta_0 |v_0|_{0,K} + \beta_1 |v_0|_{1,K}$$

が容易に示せるから、補題 10 より

$$(5.21) \quad \left| \sum_{K \in T_h} \int_K (v_0 v_h) b_n dy \right| \leq C_{10} h |v_0|_{1,\Omega} \|v_h\|_h.$$

一方、Schwarz の不等式から、

$$\left| \sum_{K \in T_h} \int_K (\operatorname{div} b) v_0 v_h dx \right| \leq \max_{x \in \Omega} |\operatorname{div} b| \cdot |v_0|_{0,\Omega} |v_h|_{0,\Omega}$$

を得る。従って、Poincaré inequality および discrete Poincaré inequality から

$$(5.22) \quad \left| \sum_{K \in T_h} \int_K (\operatorname{div} b) v_0 v_h dx \right| \leq C_{11} \max_{x \in \Omega} |\operatorname{div} b| |v_0|_{1,\Omega} \|v_h\|_h$$

を得る。よって、(5.21) と (5.22) から (5.20) が従う。

定理 5. $\operatorname{div} b \leq 0$, $|\operatorname{div} b|$ が十分小さいであり、かつ h が十分小さいであれば、 $a_h(\cdot, \cdot)$ は uniformly $V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ -elliptic である。□

(証明) (5.19), 補題 2, 11.12 から

$$a_h(v, v) \geq \mu |v_0|_{1,\Omega}^2 + \alpha \|v_h\|_h^2 - C(h + \max_{x \in \Omega} |\operatorname{div} b|) (|v_0|_{1,\Omega}^2 + \|v_h\|_h^2)$$

$$\geq \frac{\nu}{2} |v_0|_{1,\Omega}^2 + \frac{\alpha}{2} \|v_h\|_h^2 + \left\{ \frac{\nu}{2} - C(h + \max_{x \in \Omega} |\operatorname{div} b|) \right\} |v_0|_{1,\Omega}^2 \\ + \left\{ \frac{\alpha}{2} - C(h + \max_{x \in \Omega} |\operatorname{div} b|) \right\} \|v_h\|_h^2$$

と評価できる。従って、 $\frac{\nu}{2} - C(h + \max_{x \in \Omega} |\operatorname{div} b|) > 0$ かつ

$\frac{\alpha}{2} - C(h + \max_{x \in \Omega} |\operatorname{div} b|) > 0$ とする様に $h, |\operatorname{div} b|$ を十分小

さく取れば、

$$a_h(v, v) \geq \alpha' (|v_0|_{1,\Omega}^2 + \|v_h\|_h^2)$$

となる定数 $\alpha' > 0$ が存在する。

$\forall v_0 \in H_0^1(\Omega)$ に対して、 $|v_0|_{1,\Omega} = \|v_0\|_h$ であるから、 $\forall v \in V_{0h} + H_0^1(\Omega)$

に対して、

$$a_h(v, v) \geq \alpha' (\|v_0\|_h^2 + \|v_h\|_h^2) \geq \frac{\alpha'}{2} \|v_0 + v_h\|_h^2 = \tilde{\alpha} \|v\|_h^2$$

が成立つ。

6. エネルギー - 評価

今節および次節では、簡単のため $u_0 = 0$

とする。即ち、解くべき問題は次の (P_0) である。

$$(P_0) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

なる $u \in H_0^1(\Omega)$ を見出せ。

$\pi_K \in \mathcal{L}(H^1(K), \mathcal{P}_1)$ を次式で定義する。

$$(6.1) \quad \int_{K'} \pi_K v \, d\gamma = \int_{K'} v \, d\gamma \quad K' \subset \partial K.$$

$$\pi_K v(B_i) \quad 1 \leq i \leq n+1 \quad \text{は}$$

$$\pi_K v(B_i) = \int_{K'} v \, d\gamma / \operatorname{meas}(K'),$$

(ただし、 B_i は $K' \subset \partial K$ の重心) で決まるから、 π_K は一意である。

$v \in P_1$ に対して、 $\pi_K v = v$ であるから、標準的な議論から

$$(6.2) \quad |v - \pi_K v|_{1,K} \leq C(\kappa) h_K |v|_{2,K} \quad \forall v \in H^2(K)$$

が示せる。ただし $\sigma(\kappa) = h_K / \rho_K$ 。

$$(6.3) \quad \pi_h v|_K = \pi_K v|_K \quad \forall K \in T_h, \forall v \in H^1(\Omega)$$

によって、 π_h を定義すると、 $\pi_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); V_h) \cap \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); V_{0h})$

である。従って、 $u \in H^2(\Omega)$ に対して

$$(6.4) \quad \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_h \leq \|u - \pi_h u\|_h = \left(\sum_{K \in T_h} |u - \pi_K u|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \leq C_1 h |u|_{2,\Omega}$$

が成立つ。一方、定理5から Strang の補題が成立つ。即ち、

$$(6.5) \quad \|u - u_h\|_h \leq C \left(\inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_{0h}} \frac{|a_h(u, w_h) - (f, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right)$$

補題13. $D_h(u, w_h) = a_h(u, w_h) - (f, w_h)$ とする。このとき、

$u \in H^2(\Omega)$ ならば、ある定数 $C > 0$ に対して、

$$(6.6) \quad |D_h(u, w_h)| \leq C h |u|_{2,\Omega} \|w_h\|_h$$

が成立つ。

$$(証明) \quad D_h(u, w_h) = \sum_{K \in T_h} \int_K (\nu \nabla_h u \cdot \nabla_h w_h + (b \cdot \nabla_h u) w_h) dx \\ - \sum_{K \in T_h} \int_K (-\nu \Delta u + (b \cdot \nabla u)) w_h dx$$

であるから、各 $K \in T_h$ 上で Green の公式を使えば、

$$(6.7) \quad D_h(u, w_h) = \nu \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} w_h df$$

である。

$K' = \partial K_1 \cap \partial K_2 \neq \emptyset$ ($K_1, K_2 \in T_h$) に対して、 $D_h(u, w_h)$ の K' 上の影響は、

$$\int_{K'} \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} w_h|_{K_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} w_h|_{K_2} \right) d\gamma = \int_{K'} \frac{\partial u}{\partial n_1} (w_h|_{K_1} - w_h|_{K_2}) d\gamma$$

である。ただし n_i は ∂K_i 上の外向き単位法線ベクトルである。

($i=1,2$)。補題 3 (i) から、

$$\int_{K'} M_{K'}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) (w_h|_{K_1} - w_h|_{K_2}) d\gamma = 0$$

が成立つから、

$$\begin{aligned} & \int_{K'} \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} w_h|_{K_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} w_h|_{K_2} \right) d\gamma \\ &= \int_{K'} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} - M_{K'}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) \right) w_h|_{K_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial n_2} - M_{K'}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial n_2} \right) \right) w_h|_{K_2} \right\} d\gamma \end{aligned}$$

と書ける。また、補題 3 (ii) から

$$\int_{K' \cap \Gamma} M_{K'}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) w_h d\gamma = 0$$

であるから、

$$(6.8) \quad \int_{K'} \frac{\partial u}{\partial n} w_h d\gamma = \int_{K'} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - M_{K'}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \right) w_h d\gamma$$

を得る。従って、(6.8) と補題 10 から、(6.6) を得る。

定理 6. $\{T_h\}$ が regular, $\sup_{x \in \Omega} \|b(x)\| < \infty$, $\operatorname{div} b \leq 0$, $|\operatorname{div} b|$

が十分小さかつ h が十分小とする。この時、 $u \in H^2(\Omega)$ ならば、

$$(6.9) \quad \|u - u_h\|_h \leq C h \|u\|_{2,\Omega}$$

なる h に依存しない定数 $C > 0$ が存在する。 $\square$

7. L^2 -評価 今節では、Aubin-Nitsche の補題を使って、

$\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ を評価する。

最初に、 (P_0) の Adjoint 問題

$$(7.1) \begin{cases} \text{与えられた } g \in L^2(\Omega) \text{ に対して,} \\ a(v, \psi) = (g, v) \quad \forall v \in H_0'(\Omega) \\ \text{なる } \psi \in H_0'(\Omega) \text{ を見出せ,} \end{cases}$$

を考えよ.

定義 4. adjoint 問題 (7.1) が regular であるとは、次の二条件が成立つ時に言う。

$$(7.2) \begin{cases} (i) \quad \psi \in H_0'(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ (ii) \quad \|\psi\|_{2,\Omega} \leq C^* \|g\|_{0,\Omega} \end{cases} \quad \square$$

$A \in \mathcal{L}(H_0'(\Omega) \cap H^2(\Omega); L^2(\Omega))$ を

$$(7.3) \quad Av = -\nu \Delta v + (b \cdot \nabla)v$$

で定義する。A の adjoint operator A^* は

$$(7.4) \quad (Av, \psi) = (v, A^*\psi)$$

(ただし、 $v \in D(A) = H_0'(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\psi \in D(A^*)$) で定義される

から、簡単な計算により

$$(7.5) \quad g = A^*\psi = -\nu \Delta \psi - (b \cdot \nabla)\psi - \psi \operatorname{div} b$$

である。

定理 7. adjoint 問題 (7.1) が regular, $\{T_h\}$ が regular,

$\sup_{x \in \Omega} \|b(x)\| < \infty$, $\operatorname{div} b \leq 0$, $|\operatorname{div} b|$ が十分小 $h \rightarrow 0$ が十分小

とする。この時 $u \in H^2(\Omega)$ ならば、

$$(7.6) \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|u\|_{2,\Omega}$$

となる h に依存しない定数 $C > 0$ が存在する。 $\square$

(証明) $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ は次式で性格付けられる.

$$(7.7) \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} = \sup_{q \in L^2(\Omega)} \frac{|(u - u_h, q)|}{\|q\|_{0,\Omega}}.$$

$\forall \psi_h \in V_{0h}$ に対し

$$(7.8) \quad (u - u_h, q) = a_h(u - u_h, \psi - \psi_h) + a_h(u - u_h, \psi_h) \\ + a_h(u_h, \psi) - (u_h, -\nu \Delta \psi - \operatorname{div}(\psi b))$$

が成立つ。(1.1) および ψ の発散定理から

$$(7.9) \quad a_h(u - u_h, \psi_h) = \nu \sum_{K \in T_h} \int_K (\nabla_h u \cdot \nabla_h \psi_h + \psi_h \Delta u) dx \\ = \nu \sum_{K \in T_h} \int_K \operatorname{div}(\psi_h \nabla u) dx \\ = \nu \sum_{K \in T_h} \int_K \psi_h \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma$$

を得る。また、 $\sum_{K \in T_h} \int_K \psi_h \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = 0$ および ψ の補題3から

$$a_h(u - u_h, \psi_h) = \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \in \partial K} \int_{K'} (\psi_h - \psi) \left(\frac{\partial u}{\partial n} - M_K^0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \right) d\gamma$$

となり、補題10から次の評価を得る。

$$(7.10) \quad |a_h(u - u_h, \psi_h)| \leq C_0 h \|u\|_{2,\Omega} \|\psi - \psi_h\|_h.$$

一方、

$$(7.11) \quad a_h(u_h, \psi) - (u_h, -\nu \Delta \psi - \operatorname{div}(\psi b)) \\ = \sum_{K \in T_h} \int_K \operatorname{div}(\nu u_h \nabla_h \psi + u_h \psi b) dx \\ = \nu \sum_{K \in T_h} \int_K u_h \frac{\partial \psi}{\partial n} d\gamma + \sum_{K \in T_h} \int_K u_h \psi (b \cdot n) d\gamma$$

と変形できる。(7.11)の第一項は(7.10)と同様に評価できる。

$$(7.12) \quad \left| \sum_{K \in T_h} \int_K u_h \frac{\partial \psi}{\partial n} d\gamma \right| \leq C_1 h \|u_h - u\|_h \|\psi\|_{2,\Omega}.$$

また、(7.11)の第二項は、

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} u_h \psi(b \cdot n) d\gamma \\ &= \sum_{K \in T_h} \sum_{K' \in \partial K} \int_{K'} (u_h - u) \{ \psi(b \cdot n) - \mathcal{M}_{K'}^0(\psi(b \cdot n)) \} d\gamma \end{aligned}$$

と変形できるから、再び補題10から

$$(7.13) \quad \left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} u_h \psi(b \cdot n) d\gamma \right| \leq C_2 h \|u_h - u\|_h |\psi|_{2,\Omega}$$

を得る。従って、 $a_h(\cdot, \cdot)$ の $V_{0h} + H_0^1(\Omega)$ 上の連続性および (7.10)

(7.12), (7.13) から、次式を得る。

$$\begin{aligned} (7.14) \quad |u - u_h| &\leq \tilde{M} \|u - u_h\|_h \|\psi - \psi_h\|_h \\ &\quad + C_0 h |u|_{2,\Omega} \|\psi - \psi_h\|_h + C_3 h \|u_h - u\|_h |\psi|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

また、adjoint 問題の近似解のエネルギー評価として、

$$(7.15) \quad \|\psi - \psi_h\|_h \leq C_4 h |\psi|_{2,\Omega}$$

を得ることができ、adjoint 問題の regularity から

$$(7.16) \quad |\psi|_{2,\Omega} < \|\psi\|_{2,\Omega} \leq C^* |g|_{0,\Omega}$$

が成立つ。従って、(7.14), (7.15), (7.16) および定理6から、

(7.6)を得る。

謝辞 この研究を進めるにあたって、御指導、御教示をいただいた電気通信大学 情報数理工学科 牛島照夫先生に深く感謝いたします。

REFERENCES

- [1] M. Crouzeix and P.A. Raviart, Conforming and nonconforming finite element

- methods for solving the stationary Stokes equations I, R.A.I.R.O. Numer. Anal., 7(1973), 33 - 76.
- [2] F. Kikuchi, Discrete maximum principle and artificial viscosity in finite element approximations to convective diffusion equations, ISAS REPORT, 550 (1977).
- [3] P.G. Ciarlet and P.A. Raviart, Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 2(1973), 17 - 31.
- [4] H. Fujii, Some remarks on finite element analysis of time-dependent field problems, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, edited by Y. Yamada and R.H. Gallagher, University of Tokyo Press (1973), 91 - 106.