

回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題の 安定性と分岐構造

Stability and Bifurcation Diagram of Boussinesq Thermal Convection in a Moderately Rotating Spherical Shell

木村恵二*, 竹広真一, 山田道夫

京都大学 数理解析研究所

Keiji KIMURA, Shin-ichi TAKEHIRO and Michio YAMADA

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

概要

回転の速さが中間的な球殻内の Boussinesq 熱対流問題について、時間積分ではなく Newton 法を用いて有限振幅解を求め、その安定性と分岐構造を調べた。内殻と外殻の半径比を 0.4, Prandtl 数を 1 とし, Taylor 数を 52^2 から 500^2 まで, Rayleigh 数をおよそ 1500 から 10000 の間で変化させた。この Taylor 数の領域では, 経度 (方位角) 方向に波数 4 の整数倍にのみエネルギーを持つ安定な有限振幅定常進行波が臨界点から超臨界分岐し, Taylor 数に依存して, 臨界 Rayleigh 数からそのおよそ 1.2 倍から 2 倍の範囲で安定である。Taylor 数が 340^2 よりも大きい場合, 臨界点から Rayleigh 数を増加させていくと有限振幅定常進行波解の伝播方向が prograde から retrograde に連続的に変化した。この伝播方向の連続的な変化に伴い, 対流構造も連続的に変化しており, 分岐などに伴う不連続な変化は起こらない。

1 はじめに

回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題は, 恒星や巨大惑星の内部, 地球型惑星の流体核などといった天体規模の熱対流現象のモデルとして, 1961 年の Chandrasekhar [4] に続き, Roberts [7], Busse [2], [3] などの先駆的な研究を始めとして, 50 年にも渡って盛んに研究がなされてきた。

しかしこの熱対流問題は, 境界が動径方向の対称性を持っているのに対して回転による回転軸に対する対称性も存在するため, 支配方程式において方位角 (経度) 方向は波数ごとに分離できるものの動径方向と天頂角 (余緯度) 方向の分離ができず, 静止状態 (熱伝導状態) の線形安定性すら直接解析的に行うことが困難である。従って研究の当初は, 回転が非常に遅い場合と非常に速い場合に, 摂動計算を用いて臨界点の状況が調べられた [2], [3]。近年計算機が発達するにつれて, 臨界モードが数値的に調べられるようになり, 広いパラメータ領域で臨界モードの振る舞いが分かってきた。例えば回転が遅い場合は, 臨界モードの水平 (緯度経度) 方向が球面調和関数 Y_l^l で表される構造をし, それが retrograde (回転と逆方向) に伝播することが示された [2]。ただし Prandtl 数が大きく球殻が厚い場合には, 水平方向が Y_l^0 で表される軸対称な対流パターンが発現するこ

*E-mail: kimura@kurims.kyoto-u.ac.jp

とが示された [5]. これに対して回転が非常に速い場合の臨界モードとして, Prandtl 数が $O(1)$ 以上の場合は回転軸方向に伸びた構造をした対流パターン (columnar mode) [3] が prograde (回転と同じ方向) に伝播することが示された. Prandtl 数を小さくすると, 内殻から外殻まで広がったスパイラル構造をした対流パターン (spiralling columnar mode) [12] や, 対流が赤道外殻付近に集中した対流パターン (wall-attached mode) が出現することも示された.

有限振幅解についても, 計算機の発達により, 支配方程式を直接数値積分することで熱対流パターンの研究がされてきた. 例えば Ardes *et al.* [1] は低 Prandtl 数で, multicellular mode や色々な対流パターンが出現することを示し, Tilgner and Busse [10] は有限振幅解の対流構造の Prandtl 数依存性を調べた. また Simitev and Busse [8] は, 臨界モードが不安定化して発現する spiralling columnar mode が, Rayleigh 数を増大させると不安定化し, その振幅が振動する amplitude vacillation や, spiral 構造の外側が引きちぎれていく shape vacillation, そしてさらに Rayleigh 数を増大させると chaotic な振る舞いをする熱対流解が発現することを示した.

しかし, 時間積分では広いパラメータ領域での熱対流パターンを系統的に調べるのが難しいため, 多くの研究がなされているにもかかわらず, パラメータ空間での大域的な解の振る舞いが理解できているとは言えない. 特に臨界点からの分岐解やその安定性といった基本的な問題すら, 計算機資源が非常に多く必要となるために調べられていない. そこで我々は, 空間解像度が比較的少なくても解像できる回転の速さが中間的な領域において, 時間積分ではなく Newton 法を用いて有限振幅解を求め, その線形安定性を数値的に調べることで, 安定性と分岐構造を調べることにする.

2 節では系の設定と支配方程式並びに数値計算方法を述べる. 3 節では臨界点から分岐する有限振幅非線形定常進行波の分岐構造並びに伝播方向, 対流構造とその線形安定性を調べる. 結論及び伝播方向の遷移メカニズムについての議論は 4 節で行う. 詳しい計算方法並びに非線形定常進行波の構造の詳細については Kimura *et al.* [6] を参照されたい.

2 系の設定と数値計算方法

図 1 のように, 内殻の半径が r_{in} , 外殻の半径が r_{out} であるような回転球殻領域内の Boussinesq 流体を考える. 球殻は単位ベクトル $\mathbf{k}$ の方向を軸として角速度 Ω で回転している. 球殻領域内には一様に内部熱源 H (単位質量あたり) が分布しているとする. この場合, 球殻とともに回転する系での静止状態における温度場 $T_s(r)$ は

$$T_s(r) = -\frac{1}{2}\beta r^2 + T_0, \quad (1)$$

となる. ここで $\beta \equiv \frac{H}{3\kappa C_p}$, κ は熱拡散係数, C_p は定圧比熱を表し, T_0 は定数である. さらに一様な密度からなる物体の自己重力場

$$\mathbf{g} = -\gamma \mathbf{r}, \quad (2)$$

が流体に作用しているとする. ここで γ は定数であり, $\mathbf{r}$ は球の中心からの位置ベクトルである.

球殻の厚さ $d \equiv r_{\text{out}} - r_{\text{in}}$ を長さスケール, 粘性拡散時間 d^2/ν を時間スケール, 温度スケールを $\nu^2/(\gamma\alpha d^4)$ とする. ここで ν は動粘性係数, α は熱膨張率である. これらのスケールで無次元

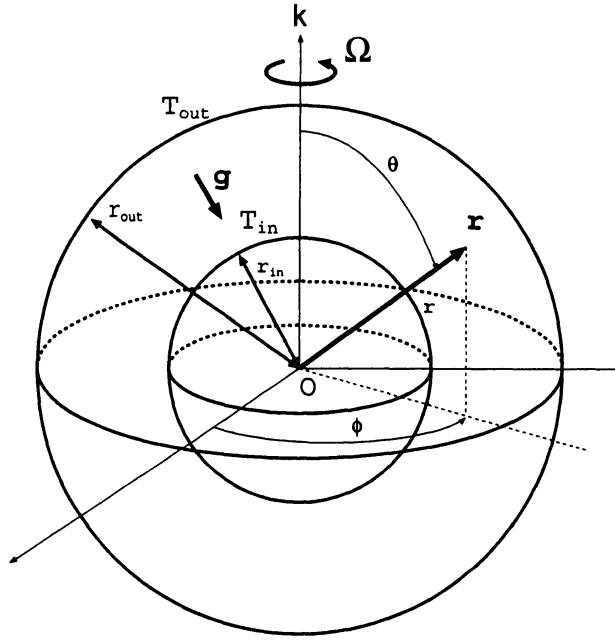


図 1: 考える系の模式図

化した Boussinesq 方程式系は次のようになる.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla \pi + \Theta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$P \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta \right) = R \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} + \Delta \Theta. \quad (5)$$

ただし $\mathbf{u}$ は無次元化された速度場, Θ は静止状態の温度場 $T_s(r)$ からの変動である. この系の無次元パラメータは

$$\eta = \frac{r_{in}}{r_{out}}, \quad \tau = \sqrt{T} = \frac{2\Omega d^2}{\nu}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R = \frac{\alpha \beta \gamma d^6}{\nu \kappa}, \quad (6)$$

である. η は半径比, T は Taylor 数, P は Prandtl 数, R は Rayleigh 数である.

速度場は非発散であることから, トロイダルポテンシャル w とポロイダルポテンシャル v を用いて

$$\mathbf{u} \equiv \nabla \times \{ \nabla \times (\mathbf{r}v) \} + \nabla \times (\mathbf{r}w), \quad (7)$$

と表すことができる. これを用いて方程式を書き直すと,

$$\left[\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{L}_2 + \tau (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \right] w - \tau \hat{Q}v = \mathbf{r} \cdot [\nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})], \quad (8)$$

$$\left[\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{L}_2 + \tau (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \right] \Delta v + \tau \hat{Q}w - \hat{L}_2 \Theta = -\mathbf{r} \cdot [\nabla \times \nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})], \quad (9)$$

$$P \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta \right) = R \hat{L}_2 v + \Delta \Theta, \quad (10)$$

となる．ここで $\hat{L}_2$, $\hat{Q}$ は天頂角 (余緯度) θ と方位角 (経度) ϕ を用いて

$$\hat{L}_2 = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (11)$$

$$\hat{Q} \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} \left[\hat{L}_2 (\mathbf{k} \cdot \nabla) + (\mathbf{k} \cdot \nabla) \hat{L}_2 \right], \quad (12)$$

と表される演算子である．この定式化 (8), (9), (10) は Simitev and Busse [8] の定式化において $R_e = 0$ としたものである．

本研究では境界条件として両殻で粘着境界条件および温度固定境界条件，すなわち

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = w = \Theta = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}, \quad (13)$$

を考える．ただし $\eta = r_{\text{in}}/r_{\text{out}}$ は内殻と外殻の半径比を表す．また，無次元パラメータは $\eta = 0.4$, $P = 1$ と固定し， τ と R はおよそ $52 \leq \tau \leq 500$, $1500 \leq R \leq 10000$ の範囲で変化させることにする．

式 (8), (9), (10) および (13) を数値的に解くために Galerkin スペクトル法を用いた．動径方向には Chebyshev 多項式を境界条件を満たすように組み合わせた関数系で展開し，立体角方向には球面調和関数で展開する．以下で示す数値計算結果は，Chebyshev 多項式の最高次数 N ，球面調和関数の切断波数 L がそれぞれ $(N, L) = (16, 16)$ の場合である．ただしいくつかの場合に $(N, L) = (16, 21)$, $(21, 16)$ の解像度で計算を行い，数値計算の妥当性を確認している．また，非線形項の評価は変換法を用いる．ただし aliasing error を除去するため，実空間での格子点数を $(N_r, N_\theta, N_\phi) = (64, 32, 64)$ として計算を行った．ここで N_r は動径方向， N_θ は天頂角 (余緯度) 方向， N_ϕ は方位角 (経度) 方向の格子点数を表す．

本研究では，臨界点から超臨界分岐する経度方向に伝播する非線形定常進行波解を Newton 法によって求める．その際，非線形定常進行波解の経度方向への伝播速度 v_p と同じ角速度で運動する系から見ると非線形定常進行波は静止解となる．したがって，経度を $\phi \rightarrow \phi - v_p t \equiv \Phi$ と変換して支配方程式 (8), (9), (10) を書き直し，その方程式に対して (v_p も変数の一つとして) Newton 法を適用して静止解を求める．ただし，この動く座標系での経度 Φ には原点の任意性があるため，Newton 法の初期値をスペクトル展開した係数の中で絶対値最大成分の偏角を常に $0[\text{rad}]$ と固定した．

3 数値計算結果

3.1 臨界点

図 2 は，回転が遅い領域から中間的な領域 ($0 \leq \tau \leq 1000$) における臨界モードの経度方向への伝播速度 $[v_p]_c$ を表している．この図から， τ が小さい (回転が遅い) 領域では臨界モードは retrograde に伝播しているが， τ の増加とともに連続的に伝播方向が prograde に遷移していることが分かる．特に図の拡大図から， $\tau = 330$ と 340 の間で遷移が起こっていることが分かる．この臨界モードの伝播速度の回転の速さに対する変化は，回転が遅い場合には臨界モードが retrograde に伝播し (例えば [2],[5])，回転が速い場合には prograde に伝播する (例えば [3]) という過去の研究と整合的である．また，境界条件が stress-free である場合には Zhang and Busse [11] によって，Prandtl 数が 1 よりも大きい場合には臨界モードの伝播方向が連続的に変化することが示されている．

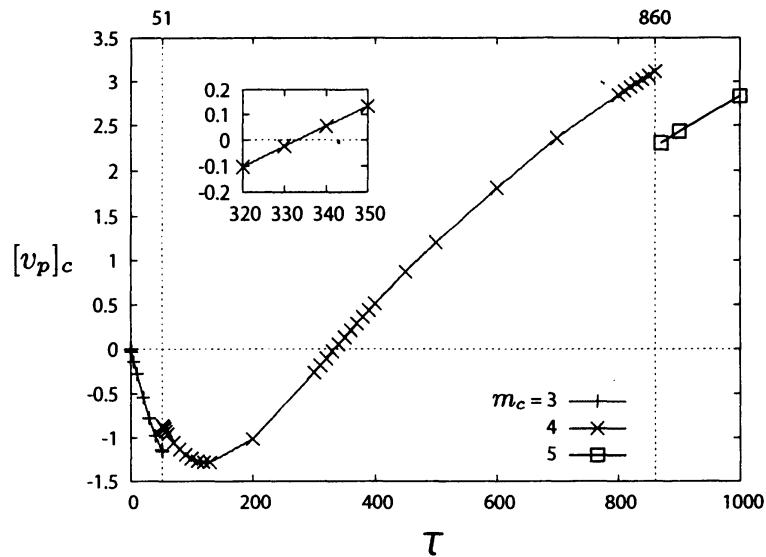


図 2: 回転が遅い領域から中間的な領域 ($0 \leq \tau \leq 1000$) における臨界モードの経度方向への伝播速度 $[v_p]_c$. 正(負)の値が prograde (retrograde) に伝播することを表す. m_c は臨界モードの経度(方位角方向の)波数を表す. $[v_p]_c$ が負から正に遷移するところを拡大して示している.

τ	R_c	$[v_p]_c$	R	v_p
(a) 52	1612.5026	-0.86263623	1636.2	-0.857
(b) 100	2070.3920	-1.24019489	2100.8	-1.26
(c) 200	3224.8090	-1.01287038	3262.3	-1.05
(d) 300	4324.7513	-0.26302633	4373.3	-0.307
(e) 400	5355.1777	+0.51217057	5413.6	+0.469
(f) 500	6386.6056	+1.20405306	6453.9	+1.16

表 1: 図 3 に示す臨界モードと, 図 5 に示す臨界点近傍の有限振幅解のパラメータ表. (a) から (f) は図 3, 5 のラベルに対応する. R_c と $[v_p]_c$ は表に示した τ におけるそれぞれ臨界 Rayleigh 数と臨界モードの位相速度を表しており, v_p は表に示した R , τ での安定な有限振幅定常進行波 TW4 の経度方向への伝播速度を表している. 臨界モード, TW4 とともに (a) から (d) は retrograde に伝播し, (e) と (f) は prograde に伝播している.

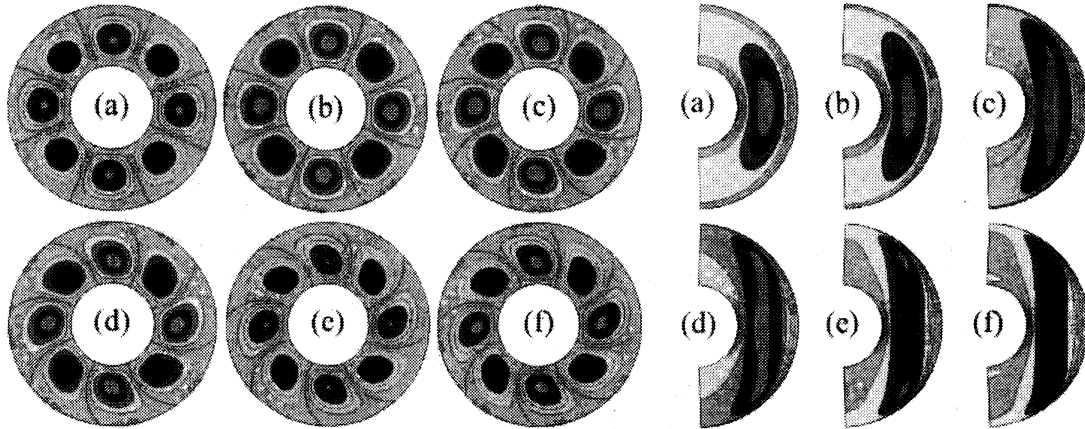


図 3: 臨界モード ($R = R_c$) の, 赤道面 ($\theta = 90^\circ$) における速度場の動径成分 u_r と子午面 ($\Phi = 22.5^\circ$) における渦度場の回転軸方向成分 $\omega_z = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ を示した図. (a) から (f) について回転速度が増加しており, (a) から (d) は対流パターンが retrograde に伝播しており, (e) と (f) は prograde に伝播している. 詳しいパラメータは表 1 を参照のこと.

臨界モードの対流構造を図 3 に示す (パラメータの詳細については表 1 を参照). この図から赤道断面の u_r について, 回転が遅い場合には circular な構造をしているが, 回転を速くしていくと外殻に近い外側が prograde 方向に曲がり始め, 最終的には spiral な構造をすることが分かる. これと同時に, ω_z の子午断面から, 回転が遅い場合には対流渦が球殻に沿って曲がっているが, 回転を速くするに連れて徐々に対流渦が回転軸方向に伸び始めることが分かる. 以上から回転が速くなると, 臨界モードは伝播方向が連続的に変化することに伴って対流構造も連続的に変化し, 不連続な変化はこのパラメータ領域では起こらないことが見出された.

これ以後回転の速さを, 臨界モードの伝播方向が遷移する点を含む $52 \leq \tau \leq 500$ の領域で考えることにする. この領域では臨界モードの経度波数が $m_c = 4$ であることから, 次節で示すようにこの領域で臨界点から分岐する有限振幅定常進行波は, 経度方向に m が 4 の整数倍のみにエネルギーを持つ. よってこの解を TW4 (Traveling Wave 4) と呼ぶことにする.

3.2 有限振幅解の分岐ダイアグラムと対流パターン

臨界点から分岐する非線形定常進行波 TW4 の安定領域とその伝播方向を $\tau - R$ パラメータ空間で示した分岐ダイアグラムが図 4 である. 下側の実線は静止解 (熱伝導解) の中立曲線を表しており, τ を増加させると臨界 Rayleigh 数 R_c が連続的に増加することが分かる. これは m_c が 3 から 4 に遷移する $\tau \simeq 52$ でも見られる. 特に伝播方向が retrograde から prograde に遷移する点を含む $52 \leq \tau \leq 500$ の領域では R_c がほぼ直線的に増加することが分かる. また上側の実線は TW4 の中立曲線を表しており, $52 \leq \tau \lesssim 100$ の範囲では TW4 の安定領域が増大しているが, $100 \gtrsim \tau \lesssim 250$ では安定領域が減少し, $\tau \gtrsim 250$ で TW4 の安定領域が再び増加していることが分かる. ここから, 回転を速くすると静止解は安定化するが, 有限振幅定常進行波解については安定化する領域と不安定化する領域 ($100 \lesssim \tau \lesssim 250$) が存在することが分かる.

次に TW4 の伝播方向に注目すると, $\tau \leq 330$ では TW4 は安定領域内ですべて retrograde に伝播することが分かる. 一方 $\tau \geq 340$ の領域では, 臨界モードは prograde に伝播するが, Rayleigh 数を増加させると TW4 の伝播方向が prograde から retrograde へと連続的に変化する. また

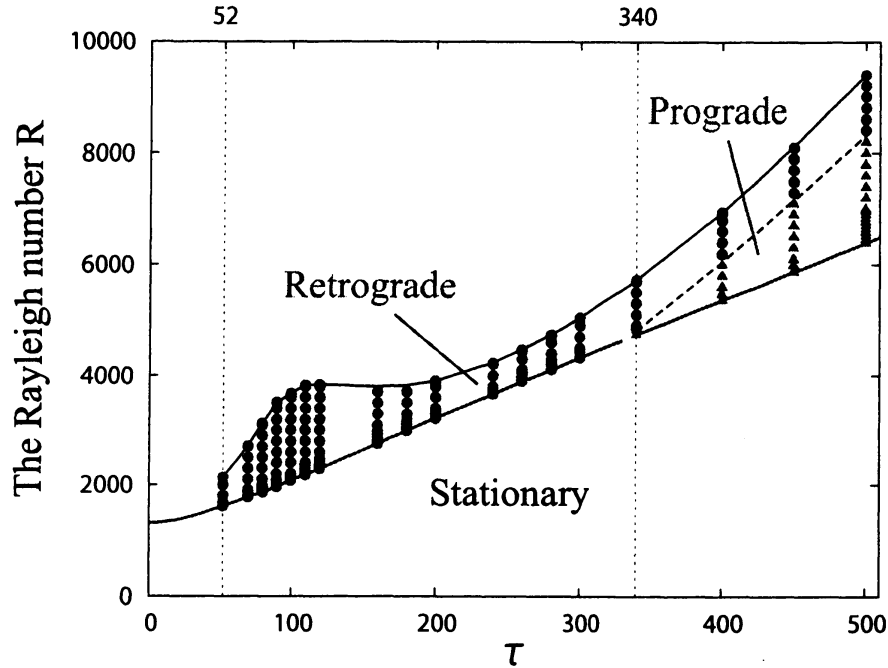


図 4: 経度波数が 4 の整数倍のみにエネルギーを持つ有限振幅定常進行波 TW4 が安定に存在するパラメータとその伝播方向を $\tau-R$ 面内で示した図. 青丸 (赤三角) は retrograde (prograde) に伝播する安定な TW4 が存在するパラメータを表す. 下側の実線は静止解 (熱伝導解) の中立曲線を表しており, 青線は臨界モードが retrograde に伝播し, 赤線は臨界モードが prograde に伝播することを示している. 上側の実線は TW4 の中立曲線を示し, この実線よりも上の領域で TW4 は不安定化する. また伝播速度 v_p がゼロとなる部分を点線で示している.

TW4 が prograde に伝播する領域は τ の増加と共に増加するが, retrograde に伝播する領域はほとんど幅が変化しない.

図 5 は, 臨界曲線近傍 ($R \simeq 1.01R_c$) における安定な非線形定常進行波 TW4 の対流構造を示したものである. この Rayleigh 数の領域では TW4 の対流構造が, 図 3 に示した臨界モードの構造とほとんど変わらないことがわかる. これは, 今注目している領域が臨界点近傍であり各波数の非線形相互作用が小さいため, 臨界モードの対流構造が支配的となっていると考えられる. 実際, 赤道断面をみれば速度場の動径成分 u_r の正の振幅と負の振幅が同程度の大きさであることがわかる (非線形相互作用が大きくなると振幅の大きさが対称でなくなる, 詳しくは Kimura *et al.* [6] 参照). ここで注目すべきは, 臨界点近傍において安定な定常進行波 TW4 の熱対流構造と伝播方向の関係として, 回転が遅いときは球殻に沿って曲がった対流渦が retrograde に伝播するが, 回転が速くなると回転軸方向に伸びた対流渦が prograde に伝播する, という関係が成立していることである.

図 6 は, 各 τ における安定な非線形定常進行波 TW4 の伝播速度 v_p を示している. $\tau \leq 300$ の領域では伝播方向が常に retrograde である. また $\tau = 52$ では v_p は Rayleigh 数の増加とともに増加するが, $\tau = 70$ では v_p は -1 程度でほぼ一定となる. $\tau \gtrsim 70$ では Rayleigh 数の増加と共に v_p が減少し, $\tau \geq 200$ では v_p の減少率が一定となる. $\tau = 400, 500$ では臨界モードの伝播速度が正であるが, Rayleigh 数の増加とともに伝播速度はほぼ直線的に減少し, 伝播方向が連続的に prograde から retrograde に変化する.

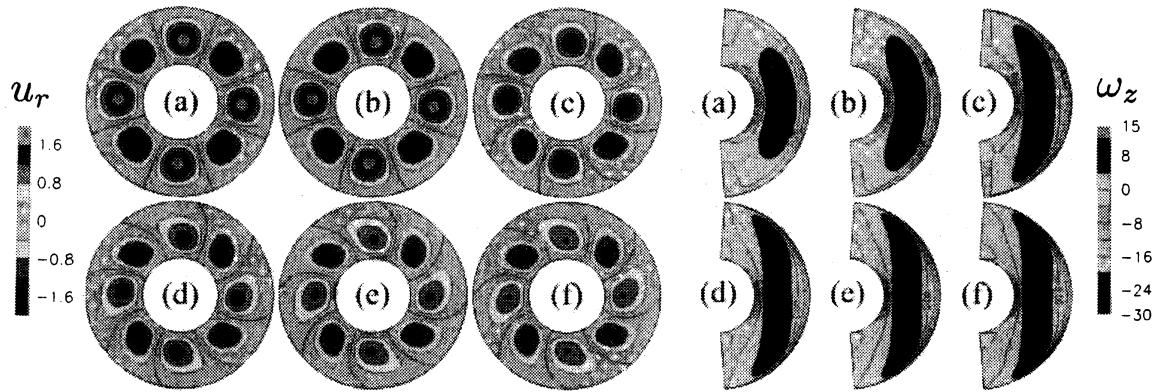


図 5: 臨界曲線近傍 ($R \simeq 1.01R_c$) における安定な非線形定常進行波 TW4 の赤道面 ($\theta = 90^\circ$) における速度場の動径成分 u_r と子午面 ($\Phi = 22.5^\circ$) における渦度場の回転軸方向成分 $\omega_z = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ を示した図. (a) から (f) につれて回転速度が増加しており, (a) から (d) は対流パターンが retrograde に伝播し, (e) と (f) は prograde に伝播する. 詳しいパラメータは表 1 を参照.

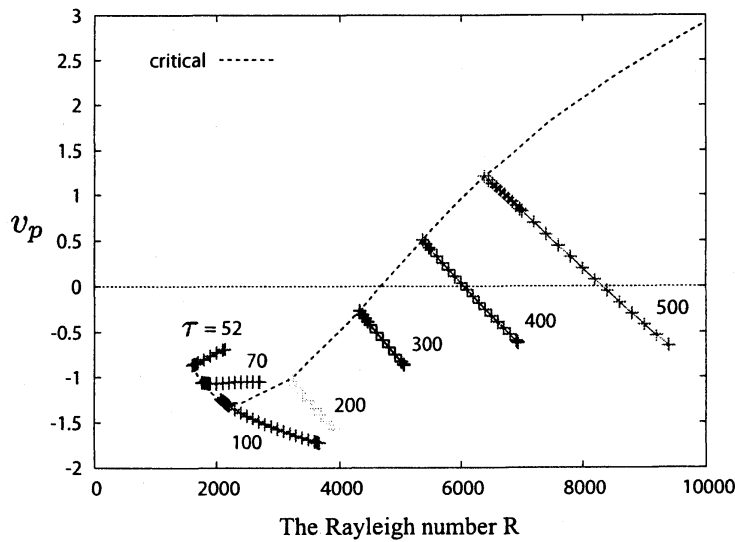


図 6: 各 τ における安定な非線形定常進行波 TW4 の伝播速度 v_p . 臨界モードの伝播速度は点線で示している.

$\tau = 400$	R	v_p
(i)	5413.6	+0.469
(ii)	6000.0	+0.0373
(iii)	6100.0	-0.0349
(iv)	6900.0	-0.596

表 2: $\tau = 400$ における安定な TW4 の Rayleigh 数と伝播速度. (i) から (iv) は図 7 と図 10 に対応する. (i) と (ii) は prograde に伝播し, (iii), (iv) は retrograde に伝播する.

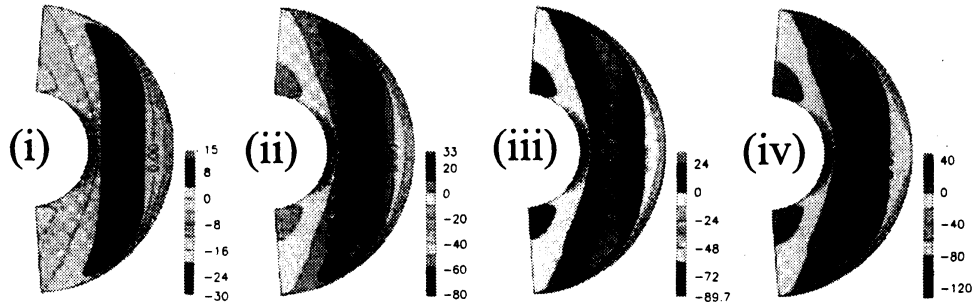


図 7: $\tau = 400$ における, 安定な非線形定常進行波 TW4 の子午面 ($\Phi = 22.5^\circ$) における渦度場の回転軸方向成分 ω_z を示した図. (i) から (iv) にかけて Rayleigh 数が増大しており, (i) と (ii) は TW4 の伝播方向が prograde であるが, (iii) と (iv) は伝播方向が retrograde に伝播している. 詳しいパラメータは表 2 を参照.

図 7 は $\tau = 400$ における, 安定な非線形定常進行波 TW4 の子午面 ($\Phi = 22.5^\circ$) での渦度場の回転軸方向成分 ω_z を示したものである. この図において, (i) と (ii) は TW4 の伝播方向が prograde であるが, (iii) と (iv) は伝播方向が retrograde に伝播している. 注目すべきは, (i) から (iv) にかけて伝播方向が変化しているにもかかわらず, ω_z は振幅のみが増大し, パターン自体はほとんど変化していないことである. この傾向は $\tau = 450, 500$ でも見られることが分かったが, この伝播方向と対流渦の関係は, 臨界点近傍において伝播方向の変化とともに対流渦の子午面構造が変化する (図 5 参照) こととは振る舞いが異なる.

4 結論及び議論

両殻の境界条件が粘着, 温度固定境界条件の下で, 球殻の内外殻半径比が $\eta = 0.4$, Prandtl 数が $P = 1$ の場合について, 臨界点から分岐する有限振幅非線形定常進行波 TW4 の安定性と分岐構造を調べた (図 4). TW4 は静止解 (熱伝導解) より臨界点から超臨界分岐し, 回転の速さに依存して, 臨界 Rayleigh 数 R_c からこの 1.2 ~ 2 倍の領域で安定であった. 臨界 Rayleigh 数は回転が速くなるとともに増大し, また TW4 が不安定化する Rayleigh 数も, 回転が遅い領域を除いては単調に増大することから, 回転はおおむね解を安定化させる効果があると考えられる.

安定な TW4 の伝播方向について, 臨界曲線近傍では回転が速くなると retrograde から prograde に連続的に変化するが, 一方 Rayleigh 数の増加とともに, 回転の速さが中間的な領域では伝播方向が prograde から retrograde に連続的に変化した. どちらの伝播方向の遷移においても対流構造は連続的に変化する, 多重解などに伴う不連続な変化は起こっていないことが示された.

しかし, この臨界曲線近傍での伝播方向の遷移領域では子午面の対流渦のパターンが徐々に変化していたが, 回転が中間的な領域で Rayleigh 数を増加させたときの伝播方向の遷移領域では子午面の対流渦は振幅のみが変化し, パターンはほとんど変化していないことが確かめられた. これは, 伝播方向の遷移メカニズムが, 臨界曲線近傍と Rayleigh 数が大きい領域では異なっていることを示唆していると考えられる.

まず臨界曲線近傍での伝播方向の遷移メカニズムについて考える. 臨界曲線近傍において, 回転が遅いときは子午面内で球殻に沿った対流渦構造をしたパターンが retrograde に伝播するが, 回転を速くしていくにつれて対流渦は回転軸方向に伸び始め, 伝播方向も retrograde から prograde へと連続的に変化する (図 5). この伝播方向と子午面内の対流構造の対応関係は, Takehiro [9] による臨界モードの伝播メカニズムの物理的解釈と整合的である. 図 8 は, 臨界モードが経度方向

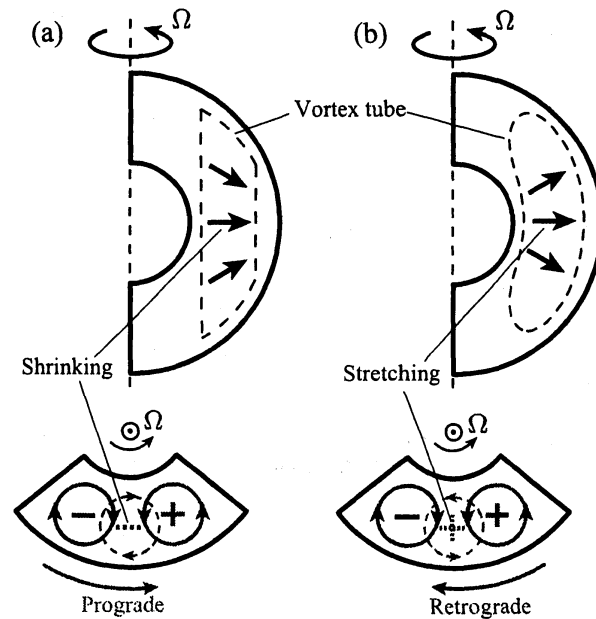


図 8: 渦の伝播メカニズムを表した図 (Takehiro [9] 図 8 を改変).

に伝播するメカニズムを表しており、特に渦管の伸縮を強調して描いている。高速回転する場合は渦管が回転軸方向に伸びるが、外殻境界が存在するために渦と渦の間で外殻に向かう速度場は渦管を回転軸方向に縮める構造になる (図 8 の左上図において矢印で示した)。ポテンシャル渦度が保存するため、渦管が縮んだときにはその渦管の回転速度は球殻のそれよりも遅くなり、負の相対渦度を誘起する。従って先程の回転軸方向に縮む速度場は渦と渦の間に負の渦度を誘起する (図 8 の左下図において青点線で示した)。この結果、渦管は prograde 方向に伝播する。一方、回転が遅い場合には渦管が球殻に沿う構造をするため、渦と渦の間で外殻に向かう速度場は渦管を回転軸方向に引き伸ばす (図 8 の右上図において矢印で示した)。この速度場はポテンシャル渦度保存のために正の渦を誘起し (図 8 の右下図において赤点線で示した)、結果として渦管が retrograde に伝播する。以上から、臨界曲線近傍で TW4 の伝播方向が遷移する現象は、対流構造が変化することに伴って渦管の伸縮が変化するために起こると解釈できる。

しかし回転の速さが中間的な領域において、Rayleigh 数を増加させたときに TW4 の伝播方向は変化するにも関わらず回転軸方向に伸びた構造は変化しない (図 5)。ここからこの領域での Rayleigh 数の増大に伴う伝播方向の変化は Takehiro [9] の伝播メカニズムでは解釈できないことがわかる。そこで我々は、熱対流の非線形相互作用によって生成される平均帯状流に注目し、この平均帯状流によって渦管が移流されることで伝播方向が変化している、というメカニズムを提唱する。図 9 は $\tau = 400$ において安定な TW4 の伝播速度と平均帯状流の最大値、最小値を示したものである。ただし平均帯状流とは、速度場の経度方向成分を経度方向に平均したものである。この図から、Rayleigh 数の増大とともに伝播速度は平均帯状流の最小値と平行に減少することが分かる。この傾向は $\tau \geq 200$ の領域で見られる。 $\tau = 400$ において安定な TW4 における平均帯状流と渦度の回転軸方向成分の等値線を描いたのが図 10 である。この図から、強い retrograde な平均帯状流が、回転軸方向に伸びた対流セルの赤道付近中央に生成されていることが分かる。これと先述の伝播速度と平均帯状流の最小値が平行に減少することを考慮すれば、強い retrograde な平均帯状流によって対流セルが移流されることによって伝播速度が減少していると考えられる。

実際、この Rayleigh 数の増加に伴って伝播速度、平均帯状流の最小値が平行に減少し、また回

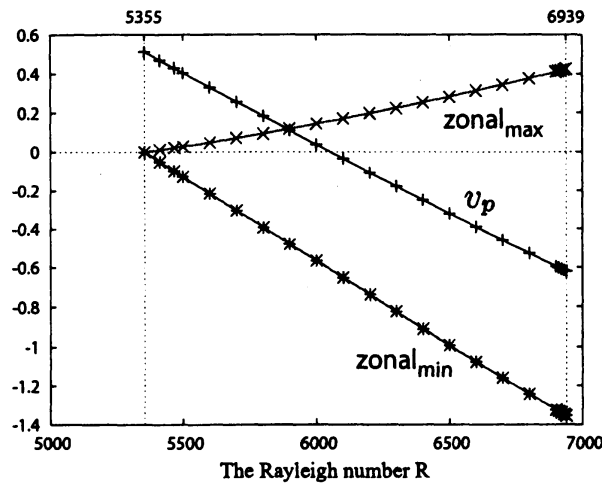


図 9: $\tau = 400$ の安定な TW4 における, 伝播速度 v_p , 平均帯状流の最大値 ($\text{zonal}_{\max}$) と最小値 ($\text{zonal}_{\min}$) を示した図.

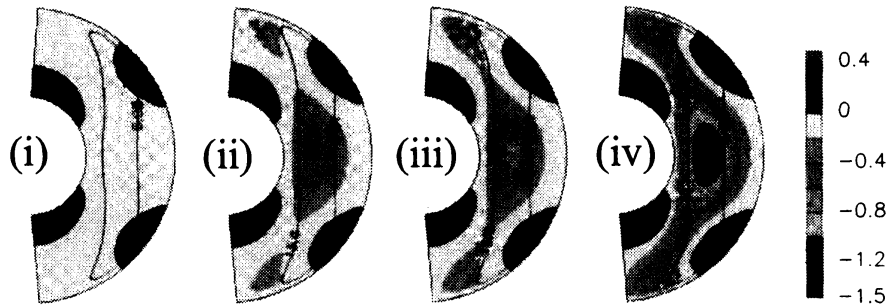


図 10: $\tau = 400$ における安定な TW4 における平均帯状流の構造 (tone) と ω_z の $\Phi = 22.5^\circ$ における等値線 (実線) を描いたもの. 詳細なパラメータは表 2 を参照 (図 7 と同じ).

転軸方向に伸びた対流セルの赤道付近中央に強い retrograde な平均帯状流が生成されている, という傾向は $\tau = 400$ だけでなく $\tau \geq 200$ の範囲で確認できた. しかし特に $\tau = 52$ の場合には, 強い prograde, retrograde な平均帯状流がともに対流セルの外側に生成されていることが確認できたため (詳しくは Kimura *et al.* [6] 参照), この結果として $\tau = 52$ の場合には Rayleigh 数が増大しても伝播速度が大きく変化しなかったと解釈できる.

伝播速度と平均帯状流の関係について以上をまとめれば, 回転が遅い場合には平均帯状流の強い成分が対流セルの外側に生成されるため平均帯状流が伝播速度に及ぼす影響は小さく, 結果として Rayleigh 数を増大させても伝播速度は大きく変化しないが, 回転が速い場合には平均帯状流の強い retrograde な成分が対流セルの赤道付近中央に生成されるため, この retrograde な強い平均帯状流によって対流セルが移流されることで, Rayleigh 数の増大とともに伝播速度がほぼ直線的に減少する, と解釈できる.

ここでは臨界点から分岐する非線形定常進行波 TW4 に焦点を当てたが, さらなる TW4 からの分岐が今後の課題である. また, より回転が速い場合の分岐構造を調べることで, 例えば Simitev and Busse [8] などの最近の計算で示されている有限振幅の熱対流パターンの複雑な振る舞いの理解が進むと考えている.

謝辞

本論文で示した数値計算結果は京都大学学術情報メディアセンター (IIMC) のスーパーコンピュータシステムで行った。臨界モード及び非線形定常進行波の計算の際に、スペクトル変換ライブラリ ISPACK (<http://www.gfd-dennou.org/library/ispack/>) とその Fortran90 ラッパーライブラリである SPMODEL ライブラリ (<http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>) を用いた。また解の線形安定性を調べる際の固有値計算は、Fujitsu SSL II のサブルーチンを用いて行った。図の描画には Dennou Ruby project (<http://www.gfd-dennou.org/library/ruby/>) の製品を用いた。

参考文献

- [1] M. Ardes, F.H. Busse, and J. Wicht, "Thermal convection in rotating spherical shells," *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **99**, 55 (1997).
- [2] F.H. Busse, "Differential rotation in stellar convection zones," *Astrophys. J.*, **159**, 629 (1970).
- [3] F.H. Busse, "Thermal instabilities in rapidly rotating systems," *J. Fluid Mech.*, **44**, part3, 441 (1970).
- [4] S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic stability," Oxford Univ. Press, pp654 (1961).
- [5] G. Geiger and F.H. Busse, "On the onset of thermal convection in slowly rotating fluid shells," *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **18**, 147 (1981).
- [6] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, "Stability and Bifurcation Diagram of Boussinesq Thermal Convection in a Moderately Rotating Spherical Shell," *Phys. Fluids*. (2010, submitted).
- [7] P.H. Roberts, "On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources" *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **263**, 93 (1968).
- [8] R. Simitev, and F.H. Busse, "Patterns of convection in rotating spherical shells," *New Journal of Physics*, **5**, 97.1 (2003).
- [9] S. Takehiro, "On the retrograde propagation of critical thermal convection in a slowly rotating spherical shell," *J. Fluid Mech.*, **659**, 505 (2010).
- [10] A. Tilgner and F.H. Busse, "Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells," *J. Fluid Mech.*, **332**, 359 (1997).
- [11] K. Zhang, and F.H. Busse, "On the onset of convection in rotating spherical shells," *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **39**, 119 (1987).
- [12] K. Zhang, "Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells," *J. Fluid Mech.*, **236**, 535 (1992).