

Calculation of Groebner Basis with Parametric Coefficients or Indeterminante Exponents

高橋 正, 長坂 耕作 (神戸大学・発達科学部)

E-mail: takahasi@kobe-u.ac.jp, nagasaka@main.h.kobe-u.ac.jp

Abstract

特異点定義方程式には, 同じ位相型をまとめて表示できるものがある. それらの定義方程式は, 変数及びべきにパラメータをもつ. その定義方程式と, 各変数で偏微分した方程式からなる方程式系のグレブナー基底を計算し, パラメータ変数及びパラメータべきの条件 (その位相型が保たれる条件) を求める方法について示す.

1 はじめに

I_n^* 型特異点は, $\mathbb{C}^4$ における complete intersection と呼ばれる特異点 (複数の方程式で定義される特異点) である. n は, 2 以上の整数であり, かつ, 偶数である. その定義方程式は, 以下のようになる.

$$x(y-z) + w^3 = 0, \quad y(x-z) + ww^{\frac{n+2}{2}} = 0$$

この特異点定義方程式と, 各変数で偏微分した方程式から成るイデアルのグレブナー基底を求めるには, 以下のよう計算する (Mathematica を使用).

```
curve1 := x(y - z) + w^3;
curve2[n_] := y(x - z) + ww^((n+2)/2);
curve-ideal[n_] := {curve1, D_x curve1, D_y curve1, D_z curve1, D_w curve1,
                    curve2[n], D_x curve2[n], D_y curve2[n], D_z curve2[n], D_w curve2[n]};
GB-curve-ideal[n_] := GroebnerBasis[curve-ideal[n], w, x, y, z]
```

GB-curve-ideal[n]

計算の結果は,

$$\{x, y, z, 4w^{\frac{2+n}{2}} + nw^{\frac{2+n}{2}}, w^{\frac{4+n}{2}}, w^2\}$$

となり, n が 2 以上の整数の時, 原点が孤立特異点になることが分かる.

これは簡単な場合であるが, 一般には, complete intersection のグレブナー基底計算は, イデアルを構成する定義方程式の数が増えるため複雑になる. 我々は, 他にもいくつかの complete intersection のグレブナー基底計算を行った.

2 グレブナー基底計算のニュートン境界の構成

超曲面孤立特異点の定義方程式に関しても (イデアルを構成する方程式が少ない場合でも), 変数及びべきにパラメータをもつ場合には, その計算が有限回で終わらない場合がある. 以下にその例を示す (この定

義方程式は、単純 K3 特異点の定義方程式である)。

curve-ideal[k, p, q]

$$\{ qw^{42} + w^{42+k} + x^2 + y^3 + wxyz + pw^6z^6 + z^7, 2x + wyz, 3y^2 + wxz, wxy + 6pw^6z^5 + 7z^6, 42qw^{41} + (42+k)w^{41+k} + xyz + 6pw^5z^6 \}$$

この場合、定義方程式を以下のようにとることで、グレブナー基底計算が有限回で終える。

$$\text{curve}[k, p, q] := x^2 + y^3 + z^7 + xyzw + pz^6w^6 + qw^{41+k}$$

$$\text{curve-ideal}[k, p, q] :=$$

$$\{ \text{curve}[k, p, q], \partial_x \text{curve}[k, p, q], \partial_y \text{curve}[k, p, q], \partial_z \text{curve}[k, p, q], \partial_w \text{curve}[k, p, q] \}$$

$$\text{curve-ideal}[k, p, q]$$

計算結果は以下になる (この計算結果は簡約ではない)。

$$g_1 = x + \frac{wyz}{2}$$

$$g_2 = y^2 - \frac{1}{6}w^2yz^2$$

$$g_3 = -\frac{1}{504}w^6yz^5 + \frac{6}{7}pw^6yz^5 + yz^6$$

$$g_4 = w^4yz^3 - 72pw^6z^5 - 84z^6$$

$$g_5 = \frac{41w^{40+k}y}{41+k} + \frac{kw^{40+k}y}{41+k} - \frac{41w^{42+k}z^2}{6(41+k)} - \frac{kw^{42+k}z^2}{6(41+k)} + \frac{2952pw^{42+k}z^2}{41+k} + \frac{72kpw^{42+k}z^2}{(41+k)} - \frac{pw^7z^8}{(41+k)q} + \frac{432p^2w^7z^8}{(41+k)q}$$

$$g_6 = -\frac{35}{6}qw^{41+k} - \frac{1}{6}kqw^{41+k} + z^7$$

$$g_7 = -\frac{5pw^{48+k}z^4}{72(41+k)} - \frac{kpw^{48+k}z^4}{504(41+k)} + \frac{30p^2w^{48+k}z^4}{41+k} + \frac{6kp^2w^{48+k}z^4}{7(41+k)} - \frac{41w^{42+k}z^5}{504(41+k)} - \frac{kw^{42+k}z^5}{504(41+k)} + \frac{492pw^{42+k}z^5}{7(41+k)} +$$

$$\frac{12kpw^{42+k}z^5}{7(41+k)} + \frac{41w^{36+k}z^6}{41+k} + \frac{kw^{36+k}z^6}{41+k} \\ g_8 = -\frac{1225pw^{52+k}z}{432(41+k)} - \frac{35kpw^{52+k}z}{216(41+k)^2} - \frac{k^2pw^{52+k}z}{432(41+k)^2} + \frac{1225p^2w^{52+k}z}{(41+k)^2} + \frac{70kp^2w^{52+k}z}{(41+k)^2} + \frac{k^2p^2w^{52+k}z}{(41+k)^2} - \frac{1435w^{46+k}z^2}{432(41+k)^2} \\ - \frac{19kw^{46+k}z^2}{108(41+k)^2} - \frac{k^2w^{46+k}z^2}{432(41+k)^2} + \frac{2870pw^{46+k}z^2}{(41+k)^2} + \frac{152kpw^{46+k}z^2}{(41+k)^2} + \frac{2k^2pw^{46+k}z^2}{(41+k)^2} + \frac{1681w^{40+k}z^3}{(41+k)^2} + \\ \frac{82kw^{40+k}z^3}{(41+k)^2} + \frac{k^2w^{40+k}z^3}{(41+k)^2}$$

$$g_9 = w^{41+k}$$

この2つの違いは、定義方程式のニュートン境界の構成による。

我々は、これらの例を基に変数及びべきにパラメータをもつ場合のグレブナー基底を計算するためのプログラムを Mathematica で作成している。