

非適合有限要素法による抗力・揚力の誤差評価

九州大学 大学院数理学研究科 田端正久 (Masahisa Tabata)

1 はじめに

流れ場に置かれた物体に働く抗力・揚力を非適合有限要素法で求める．空間次元は $d(=2,3)$ 次元とし，水路を考える． x_1 方向は水路の方向と一致し， x_2 方向は鉛直方向とする．水路中に置かれた物体の境界を Γ_b とする．流体の存在する領域 Ω の境界 Γ は Γ_b と Γ_c とから成り立っており， Γ_c は，流入境界 Γ_i ，流出境界 Γ_o ，側壁 Γ_w とから成り立っているものとする． Γ で，流速境界条件

$$u = g$$

が課されている． Γ_b, Γ_w 上では，粘着境界条件を仮定するので，そこでは， $g = 0$ である． u, p を流速，圧力とする． u, p はナビエ・ストークス方程式

$$\begin{aligned} \rho(u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + \nabla p &= f, \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

を満たしている．ただし， f は外力， μ, ρ はそれぞれ，粘性係数，密度である．関数空間

$$V(g) = \{v \in (H^1(\Omega))^d; v|_{\Gamma} = g\}, \quad V = V(0),$$

$$Q = \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q \, dx = 0\}$$

を用意する． (u, p) は次の変分問題： $(u, p) \in V(g) \times Q$ で

$$a(u, v) + a_1(u, u, v) + b(v, p) + b(u, q) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in V \times Q \quad (1)$$

を求めよ，の解である．ここに，

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d D_{ij}(u) D_{ij}(v) \, dx, \quad D_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

$$a_1(w, u, v) = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \left(w_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j - w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_j \right) \, dx,$$

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} v \, dx,$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx$$

である。このとき、境界 Γ_b に囲まれた物体に働く抗力 D 、揚力 L は

$$D = - \int_{\Gamma_b} \sum_{j=1}^d \sigma_{1j}(u, p) n_j \, d\gamma, \quad L = - \int_{\Gamma_b} \sum_{j=1}^d \sigma_{2j}(u, p) n_j \, d\gamma \quad (3)$$

で定義される。ここに、 n は境界への外向き(流体からみて)単位法線ベクトルであり、 σ は応力テンソル

$$\sigma_{ij}(u, p) = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(u)$$

である。これらを、Gauss-Greenの定理を使って、領域積分表示に変換し[1]、誤差評価を行う。

Crouzeix-Raviart[2]の非適合一次要素を念頭に置き、次の問題を解決する。

1. (2)で定義される双一次形式 a は、非適合一次要素空間(粘着境界条件を仮定)では強圧的ではない。流れ場の計算は、 a を双一次形式

$$a^*(u, v) = \mu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \text{grad} u_i \cdot \text{grad} v_i \, dx$$

に取り替えて行われる。そのとき、適切な D, L の計算を行うこと。

2. a_1 を風上型近似で置き換えたとき、 D, L の誤差評価を行うこと。
3. 最近、開発された双対問題技法(Larson, M. G. [3])を使って、高精度の誤差評価を行うこと。

これらの結果の詳細は、論文John-Tabata-Tobiska [4]に発表予定である。

2 抗力・揚力の領域積分表示

抗力 D 、揚力 L は領域積分を使って次のように表示することができる。

補題1. $w^D, w^L \in H^1(\Omega)^d$ を

$$w_i^D(x) = \begin{cases} \delta_{i1} & (x \in \Gamma_b) \\ 0 & (x \in \Gamma_c) \end{cases}, \quad w_i^L(x) = \begin{cases} \delta_{i2} & (x \in \Gamma_b) \\ 0 & (x \in \Gamma_c) \end{cases} \quad (4)$$

を満たす任意の関数とする。 (u, p) を(1)の解とする。このとき、(3)式の D, L は

$$D = -\{a(u, w^D) + a_1(u, u, w^D) + b(w^D, p) - (f, w^D)\}, \quad (5)$$

$$L = -\{a(u, w^L) + a_1(u, u, w^L) + b(w^L, p) - (f, w^L)\} \quad (6)$$

と表現できる。さらに、 a を a^* で、 a_1 を

$$a_1^*(w, u, v) = \rho((w \cdot \nabla)u, v)$$

で置き換えても、(5), (6)は成立する。

3 抗力・揚力の誤差評価

領域 Ω の正則な単体分割列を考える, h は各分割に現れる要素の最大直径とする. $V_h(g)$, V_h, Q_h を, それぞれ, $V(g), V, Q$ の非適合一次有限要素近似とする. 問題(1)の有限要素近似は, $(u_h, p_h) \in V_h(g) \times Q_h$ で

$$a_h^*(u_h, v_h) + a_{1h}(u_h, u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) + b_h(u_h, q_h) = (f, v_h), \quad \forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h \quad (7)$$

を求めることである. ここに, a_h^*, a_{1h}, b_h についている添字 h は非適合要素を使うので, 積分を要素ごとで行いその和をとることを示している.

近似抗力 D_h , 近似揚力 L_h を

$$D_h = -\{a_h^*(u_h, w_h^D) + a_{1h}(u_h, u_h, w_h^D) + b_h(w_h^D, p_h) - (f, w_h^D)\}, \quad (8)$$

$$L_h = -\{a_h^*(u_h, w_h^L) + a_{1h}(u_h, u_h, w_h^L) + b_h(w_h^L, p_h) - (f, w_h^L)\} \quad (9)$$

で定義する. ここに, (u_h, p_h) は(7)の解であり, w_h^D, w_h^L は各成分が非適合一次要素空間に入り

$$w_{hi}^D(P) = \begin{cases} \delta_{i1} & (P \in \Gamma_b) \\ 0 & (P \in \Gamma_c) \end{cases}, \quad w_{hi}^L(P) = \begin{cases} \delta_{i2} & (P \in \Gamma_b) \\ 0 & (P \in \Gamma_c) \end{cases}$$

を満たす関数である. P は節点である. 次の定理が成立する.

定理1. h に依存しない正定数 M が存在し,

$$|D_h - D|, |L_h - L| \leq Mh$$

が成立する.

定理1は移流項の近似を風上型近似 a_{1h}^{upw} [5]に取り替えても成立する.

4 高精度評価

領域 Ω でStokes問題が正則であると仮定する. たとえば, 滑らかな境界を持つ領域は正則である[6]. このとき, 高精度の収束結果を得ることができる.

定理2. ある正定数 μ_0

$$\mu_0 = \mu_0(\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)^d}, \|f\|_{L^2(\Omega)^d})$$

が存在し, $\mu \geq \mu_0$ なる μ にたいして, h に依存しない正定数 M が存在し,

$$|D_h - D|, |L_h - L| \leq Mh^2$$

が成立する.

証明は、領域積分で表現された抗力、揚力の式(5),(6)に現れる関数 w^D, w^L の選択に、任意性があることを利用する。その関数を、 (ϕ, r) を未知関数とする双対問題[3]

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\phi_i - \rho(u \cdot \nabla)\phi_i + \frac{\rho}{2} \left(\theta^{(i)} \cdot \phi - u_h \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial r}{\partial x_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, d), \\ \nabla \cdot \phi &= 0 \end{aligned}$$

の解の第一成分 ϕ にとる。ただし、 ϕ の境界条件は(4)であり、

$$\theta^{(i)} = \sum_K \frac{\partial u_h}{\partial x_i}(K) \chi_K.$$

である。 χ_K は要素 K の特性関数である。双対問題は有限要素解 u_h に依存するが、 ϕ の $H^2(\Omega)^d$ ノルムは h に依存しないことを示すことができる。

参考文献

- [1] M. Tabata and K. Itakura. Precise computation of drag coefficients of a sphere. *Intern. J. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. to appear, , 1997.
- [2] M. Crouzeix and P.A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *RAIRO Numer. Anal.*, Vol. 3, pp. 33–76, 1973.
- [3] M.G. Larson. *Analysis of Adaptive Finite Element Methods*. PhD thesis, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1996.
- [4] V. John, M. Tabata, and L. Tobiska. Error estimates for drag and lift coefficients by nonconforming finite element method, to appear.
- [5] F. Schieweck and L. Tobiska. An optimal order error estimate for an upwind discretization of the Navier–Stokes equations. *Numer. Methods Partial Different. Equations*, Vol. 12, pp. 407–421, 1996.
- [6] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Vol. 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.