

Tropical R : 例と応用

東大総合文化 国場敦夫 (Atsuo Kuniba)

Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo

阪大基礎工 尾角正人 (Masato Okado)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

防衛大応物 高木太一郎 (Taichiro Takagi)

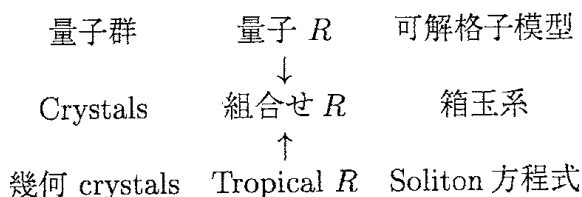
Department of Applied Physics, National Defense Academy

神戸大理 山田泰彦 (Yasuhiko Yamada)

Department of Mathematics, Kobe University

1 はじめに

高橋・薩摩 [TS] により与えられた箱玉系は, 組合せ論的な時間発展をもつ離散力学系であり, soliton 方程式の離散類似と見なされる. 実際, 箱玉系を連続 soliton 方程式 (Lotka-Volterra 方程式等) の極限として与える超離散化の処方箋 $a \times b \rightarrow a + b$, $a + b \rightarrow \max(a, b)$ が知られている [TTMS]. 一方で, 可解格子模型の crystal 極限という観点から [HHIKTT][FOY], 結晶基底の理論 [K] に基づく箱玉系の種々の拡張が考えられた [HKT1][HKT2][HKOTY]. このように, 箱玉系は, soliton 方程式 (古典系) と可解格子模型 (量子系) の接点に位置する興味深い対象である. 箱玉系そのものへの興味と共に, こうした関連を通して格子模型/soliton 方程式の理解を深めることも, 箱玉系研究の動機のひとつである.



可解格子模型/箱玉系においては, その対称性を記述する量子群/crystal が基本的であるが, これらの tropical¹ な対応物である幾何 crystal[BK] や tropical R [Y][KOTY1] には, まだ未開拓の点が多い. その具体例を考察することが本稿の目的である. 組合せ R および tropical R は, “Yang-Baxter 方程式の集合論的解” (Yang-Baxter map) の例でもある ([ABS][V] およびその文献を参照).

¹Tropical という用語は, ここでは “引き算なしで書ける双有理変換” の意味で用いる [Ki].

2 最も簡単な例: $A_{n-1}^{(1)}$, $B^{1,l}$

2.1 Crystal $B^{1,l}$

$A_{n-1}^{(1)}$ -crystal $B^{1,l}$ は, 集合としては

$$B^{1,l} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid \ell(x) = \sum_{i=1}^n x_i = l \right\}, \quad (1)$$

で与えられる. 各元 $x \in B^{1,l}$ は $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow (1^{x_1} 2^{x_2} \dots n^{x_n})$ の対応で shape $\lambda = (l)$ (横一列 Young 図), 文字 $\in \{1, 2, \dots, n\}$ の準標準盤に対応する. $B^{1,l}$ (の tensor 積 = 集合としては単に直積) には Kashiwara 作用素が定義され $A_{n-1}^{(1)}$ 型 affine crystal の構造をもつ. その intertwiner である組合せ R

$$\begin{aligned} R: B^{1,l_1} \otimes B^{1,l_2} &\rightarrow B^{1,l_2} \otimes B^{1,l_1}, \\ (x, y) &\mapsto (x', y'), \end{aligned} \quad (2)$$

は, 関係式 ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} x_i + y_i &= x'_i + y'_i, \\ \min(x_i, y_{i+1}) &= \min(x'_i, y'_{i+1}), \end{aligned} \quad (3)$$

および付帯条件 $\ell(x') = \ell(y)$, $\ell(y') = \ell(x)$ により特徴づけられ, 区分線形な公式 [HHIKTT]

$$\begin{aligned} x'_i &= y_i + P_i - P_{i-1}, \quad y'_i = x_i + P_{i-1} - P_i, \\ P_i &= \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{j=k}^n x_{i+j} + \sum_{j=1}^k y_{i+j} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる. この公式は, l_1, l_2 に関係なく適用可能である. そこで, $\ell(x) = l$ の条件を忘れて $B^1 = \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ とおき R を $B^1 \otimes B^1 \rightarrow B^1 \otimes B^1$ と考えてもよい. 以下では (幾何) crystal をこの流儀で扱う.

2.2 幾何 crystal B^1

B^1 の tropical な類似として

$$B^1 = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \right\}, \quad \ell(x) = \prod_{i=1}^n x_i. \quad (5)$$

とおき, tropical R

$$\begin{aligned} R: B^1 \otimes B^1 &\rightarrow B^1 \otimes B^1, \\ (x, y) &\mapsto (x', y'), \end{aligned} \quad (6)$$

を考える. この R は, Toda-like な関係式

$$\begin{aligned} x_i y_i &= x'_i y'_i, \\ \frac{1}{x_i} + \frac{1}{y_{i+1}} &= \frac{1}{x'_i} + \frac{1}{y'_{i+1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

および, 付帯条件 $\ell(x') = \ell(y)$, $\ell(y') = \ell(x)$ により決まる tropical な (=引き算なし) 双有理変換であって, 具体的に

$$\begin{aligned} x'_i &= y_i \frac{P_i}{P_{i-1}}, \quad y'_i = x_i \frac{P_{i-1}}{P_i}, \\ P_i &= \sum_{k=1}^n \prod_{j=k}^n x_{i+j} \prod_{j=1}^k y_{i+j}, \end{aligned} \quad (8)$$

と与えられる [HHIKTT][Y]. この式は tableau への対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用との関連で Kirillov によっても知られていた ([Ki] §4.3).

Tropical $R : \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1 \rightarrow \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1$ は以下の基本的性質を満たす.

- $R^2 = 1$
- $R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$ on $\mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1$
- $\text{pr}R = R\text{pr}$, ここに $\text{pr}(x_i) = x_{i-1}$, $\text{pr}(y_i) = y_{i-1}$ は promotion 作用
- $e_i^c R = R e_i^c$, ここに e_i^c は幾何 crystal の作用

これらの性質は, R が affine 幾何 crystal の同型であることを表すもので, $\mathcal{B}^1$ の行列による実現を用いることにより簡明に示すことができる. 次節でそれを紹介する.

2.3 $\mathcal{B}^1$ の行列による実現

$\mathcal{B}^1$ の元 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対して, 次の行列 $M_1(x, z)$ を対応させる.

$$x \in \mathcal{B}^1 \leftrightarrow M_1(x, z) = \begin{bmatrix} x_1^{-1} & & & & -z \\ -1 & x_2^{-1} & & & \\ & -1 & x_3^{-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & x_n^{-1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (9)$$

この行列 $M_1(x, z)$ を用いると, (1) tensor 積, (2) promotion pr , (3) 幾何 crystal 作用 e_i^c , (4) tropical R などを以下のように行列の言葉で表すことができる.

(1) Tensor 積 $\leftrightarrow$ 行列の積:

$$x \otimes y \leftrightarrow M_1(x, z)M_1(y, z). \quad (10)$$

(2) Promotion $\leftrightarrow$ 巡回行列による共役変換:

$$M_1(\text{pr}(x), z) = CM_1(x, z)C^{-1}, \quad C = \begin{bmatrix} & & z \\ & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

(3) e_i^c 作用 $\leftrightarrow$ 行列 G_i の作用:

$$\begin{array}{ccc} x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(L)} & \leftrightarrow & M = M_1(x^{(1)}, z) \cdots M_1(x^{(L)}, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ e_i^c(x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(L)}) & \leftrightarrow & G_i(u)MG_i(v) \end{array} \quad (12)$$

ここで $1 \leq i \leq n-1$ (かつ $z=0$) の場合, 上記は [BK] における有限 A_{n-1} 幾何 crystal の実現

$$u = (c-1) \left[\frac{M_{ii}}{M_{i+1i}} \right]_{z=0}, \quad v = (c^{-1}-1) \left[\frac{M_{i+1i+1}}{M_{i+1i}} \right]_{z=0}, \quad G_i(a) = 1 + aE_{i,i+1}, \quad (13)$$

である. $i=0$ の場合は, その affine 化として

$$u = (c-1) \left[\frac{zM_{nn}}{M_{1n}} \right]_{z=0}, \quad v = (c^{-1}-1) \left[\frac{zM_{11}}{M_{1n}} \right]_{z=0}, \quad G_0(a) = 1 + \frac{a}{z}E_{n,1}, \quad (14)$$

とする. 式(12)は, それが共役変換となる場合 (つまり $u = -v$ となるように変数 c を特殊化した場合) は Weyl 群の作用を与える.

(4) Tropical $R \leftrightarrow$ 行列の交換関係:

$$M_1(x, z)M_1(y, z) = M_1(x', z)M_1(y', z). \quad (15)$$

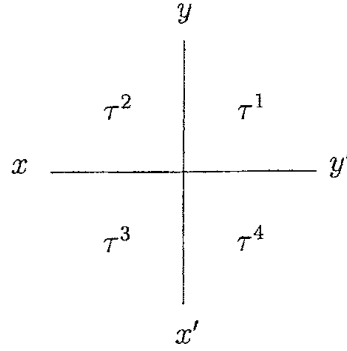
2.4 τ functions

Soliton 方程式との関係では, τ 関数が重要である. Tropical R に付随する τ 関数 τ_i^a を, 次式で導入する,²

$$x_i = \frac{\tau_i^2 \tau_{i-1}^3}{\tau_i^3 \tau_{i-1}^2}, \quad y_i = \frac{\tau_i^1 \tau_{i-1}^2}{\tau_i^2 \tau_{i-1}^1}, \quad (x', y') = (x, y)|_{\tau^2 \rightarrow \tau^4}. \quad (16)$$

量子 R 行列の図式表示にならって, 次のような図で表すと見やすい.

²このままでは, $x_1 \cdots x_n = 1$ となってしまう. これは (a) $x_i = \alpha_i \tau \tau / (\tau \tau)$ のように定数因子をつける, または, (b) τ_i は添字 $i \simeq i+n$ について準周期的とする, などにより解消できるが, ここでは簡単のため立ち入らない.



τ による表示では, tropical R を特徴づける条件 (7) のうち, weight 保存を表す条件 $x_i y_i = x'_i y'_i$ は自動的に満たされる. もうひとつの条件は

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{y_{i+1}} = \frac{1}{x'_i} + \frac{1}{y'_{i+1}} \Leftrightarrow \tau_i^4 \tau_{i-1}^2 - \tau_i^2 \tau_{i-1}^4 = \tau_i^1 \tau_{i-1}^3, \quad (17)$$

となって, Hirota-Miwa 型の双線形関係式 [H][M] になる.

3 $A_{n-1}^{(1)}$ の高階表現 $\mathcal{B}^k$

前節の例は $A_{n-1}^{(1)}$ 幾何 crystal $\mathcal{B}^1$ であった. 同様の結果は $D_n^{(1)}$ (および $A_{2n-1}^{(2)}$, $C_n^{(1)}$) 型幾何 crystal $\mathcal{B}^1$ についても得られている [KOTY1][KOTY2]. $D_n^{(1)}$ 型 $\mathcal{B}^1$ 幾何 crystal に対する M 行列は $2n$ 次正方行列で, spectral parameter z に対して 2 次式となる. [KOTY1] では行列 M と tropical R について, [KOTY2] では τ 関数および, DKP 方程式との関連が示された. 詳細はそれぞれの論文を参照されたい.

より一般の組合せ R [HKOT] にも同様に tropical R が対応すると期待される. ここでは, $A_{n-1}^{(1)}$ の高階の表現 $\mathcal{B}^k$ について述べよう.

3.1 $A_{n-1}^{(1)}$ 幾何 crystal $\mathcal{B}^k$

$1 \leq k \leq n-1$ に対して, $A_{n-1}^{(1)}$ の幾何 crystal $\mathcal{B}^k$ を考える. その元 $x \in \mathcal{B}^k$ を $k(n-k+1)$ 個の複素数の組

$$x = (x_{ij}), \quad (1 \leq i \leq k, i \leq j \leq n-k+i) \quad (18)$$

で表す. これらは, 条件

$$\prod_{j=i}^{n-k+i} x_{ij} = \ell(x), \quad (1 \leq i \leq k) \quad (19)$$

に従うとし, $\ell(x)$ を x の level とよぶ. 幾何 crystal の構造 (e_i^c 作用) は, 以下で述べる行列実現を用いて $\mathcal{B}^1$ の場合と同様に与えられる.

$\mathcal{B}^k$ は shape $\lambda = (l^k)$ の tableau(長方形) の tropical な類似であり, x_{ij} は tableau の第 i -列に含まれる文字 j の個数に対応する. 例えば, $k = 2, n = 5$ の場合, 対応する tableau を

$$\begin{array}{cccc} 1^{x_{11}} & 2^{x_{12}} & 3^{x_{13}} & 4^{x_{14}} \\ 2^{x_{22}} & 3^{x_{23}} & 4^{x_{24}} & 5^{x_{25}} \end{array} \quad (20)$$

と表すと, この x_{ij} は $\mathcal{B}^k$ の座標 x_{ij} の超離散極限として得られる.

3.2 行列 $M_k(x, z)$ の定義

$\mathcal{B}^1$ の場合と同様, 基本となるのは行列 $M_k(x, z)$ である. これについて以下の性質を要求する.

- $M_k(x, z)$ は $x = (x_{ij})$ と z に依存する $n \times n$ 行列.
- $M_k(x, z) = A(x) + B(x)z$ と分解され, $A(x)$ は A_{n-1} の有限幾何 crystal $\mathcal{B}^k$ に対応する既知の下三角行列, $B(x)$ は適当な上三角行列.
- 双有理変換 $\text{pr} : \mathcal{B}^k \rightarrow \mathcal{B}^k$ であって $M_k(\text{pr}(x), z) = CM_k(x, z)C^{-1}$ となるものが存在する (C は (11) の巡回行列).

これらの条件から pr , $M_k(x, z)$ が以下に見るように一意的に決められる.³

行列 $M_k(x, z) = A(x) + zB(x)$ の具体形は次のように与えられる. まず, 行列 $A(x)$ の (i, j) 成分 ($i \geq j$) は

$$A(x)_{ij} = \sum_p \prod_{(a,b) \in p} x_{ab}, \quad (21)$$

である [BK][NY]. 和は, 以下の格子 ($k = 3, n = 6$ の場合を示した) 上で, $(1, i)$ を始点 (k, j) を終点として, 矢印に沿って移動する経路 p 全てにわたる.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{11} & \leftarrow & x_{12} & \leftarrow & x_{13} & \leftarrow & x_{14} & & 1 & & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & x_{22} & \leftarrow & x_{23} & \leftarrow & x_{24} & \leftarrow & x_{25} & & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & x_{33} & \leftarrow & x_{34} & \leftarrow & x_{35} & \leftarrow & x_{36} \end{array} \quad (22)$$

一方, 行列 $B(x)$ の (i, j) 成分 ($i < j$) は

$$B(x)_{ij} = \ell(x)^{1-k} \sum_P \prod_{(a,b) \in P} x_{ab}, \quad (23)$$

で与えられる. 和は, 上と同じ格子上で $(1, \alpha)$, $\alpha \in [1, i] \cup [j - k + 1, n]$ を始点, (k, β) , $\beta \in [1, i + k - 1] \cup [j, n]$ を終点とする, $n + k + i - j$ 本の非交差経路族 P 全てにわたる.

³こうして決まる pr は Schützenberger の promotion operator の tropical 類似を与える. 後者は, $\mathcal{B}^{k,l}$ の affine crystal の記述 $\tilde{e}_0 = \text{pr}^{-1} \circ \tilde{e}_1 \circ \text{pr}$, $\tilde{f}_0 = \text{pr}^{-1} \circ \tilde{f}_1 \circ \text{pr}$ で用いられた [S].

3.3 例: $k = 2, n = 5$

(1) Tropical pr:

$$\begin{aligned}
 \text{pr}(x_{11}) &= x_{25}, \quad \text{pr}(x_{12}) = \frac{x_{22}(x_{12}x_{13} + x_{13}x_{23} + x_{23}x_{24})}{x_{12}x_{13}}, \\
 \text{pr}(x_{13}) &= \frac{x_{12}x_{23}(x_{13} + x_{24})}{x_{12}x_{13} + x_{13}x_{23} + x_{23}x_{24}}, \quad \text{pr}(x_{14}) = \frac{x_{13}x_{24}}{x_{13} + x_{24}}, \\
 \text{pr}(x_{22}) &= \frac{x_{11}x_{12}x_{13}}{x_{22}(x_{12}x_{13} + x_{13}x_{23} + x_{23}x_{24})}, \\
 \text{pr}(x_{23}) &= \frac{x_{22}(x_{12}x_{13} + x_{13}x_{23} + x_{23}x_{24})}{x_{23}(x_{13} + x_{24})}, \\
 \text{pr}(x_{24}) &= \frac{x_{23}(x_{13} + x_{24})}{x_{24}}, \quad \text{pr}(x_{25}) = x_{14}x_{24}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

この超離散極限は次図の jeu-de-taquin に対する区分線形公式を与える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1^{x_{11}} & \rightarrow & 2^{x_{12}} & \rightarrow & 3^{x_{13}} & \rightarrow & 4^{x_{14}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 2^{x_{22}} & \rightarrow & 3^{x_{23}} & \rightarrow & 4^{x_{24}} & \rightarrow & \square \quad (\rightarrow 5^{x_{25}})
 \end{array} \tag{25}$$

(2) 行列 $A(x)$:

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12} & x_{12}x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{11}x_{12}x_{13} & a_{32} & x_{13}x_{23} & 0 & 0 \\ \ell & a_{42} & a_{43} & x_{14}x_{24} & 0 \\ 0 & \ell & x_{23}x_{24}x_{25} & x_{24}x_{25} & x_{25} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 a_{32} &= x_{13}x_{22}(x_{12} + x_{23}), \\
 a_{42} &= x_{14}x_{22}(x_{12}x_{13} + x_{13}x_{23} + x_{23}x_{24}), \\
 a_{43} &= x_{14}x_{23}(x_{13} + x_{24}), \\
 \ell &= x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} = x_{22}x_{23}x_{24}x_{25}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

(3) 行列 $B(x)$:

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ell & b_{14} & b_{15} \\ 0 & 0 & 0 & \ell & b_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

ここに

$$\begin{aligned} b_{14} &= \frac{\ell}{x_{12}} + \frac{\ell}{x_{23}}, \\ b_{15} &= \frac{\ell}{x_{12}x_{13}} + \frac{\ell}{x_{12}x_{24}} + \frac{\ell}{x_{23}x_{24}}, \\ b_{25} &= \frac{\ell}{x_{13}} + \frac{\ell}{x_{24}}. \end{aligned} \quad (29)$$

3.4 x_{ij} の行列式公式

$M_k(x, z)$ を用いて tropical R および tropical promotion pr を計算しよう. その準備として変数 x_{ij} を $M_k(x, z)$ の小行列式で表す公式を求めておく. まず, 行列 $B(x)$ の非自明な要素 b_{ij} ($j > i + k$) が, $A(x)^{-1}$ の小行列式により,

$$b_{ij} = \ell(x)(-1)^{(k-1)(i+j)} \det_{[i+k, j-1], [i+1, j-k]}(A(x)^{-1}), \quad (30)$$

と書けることを用いて,

$$A(x)^{-1} M_k(x, z) = \begin{bmatrix} E_k & * \\ 0 & (1 + (-1)^k \frac{z}{\ell(x)}) E_{n-k} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

を得る. これより, $z_0 = (-1)^{k-1}/\ell(x)$ に対して $\text{rank} M_k(x, z_0) = k$ となる. 従って, 任意の $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$, $J = \{j_1 < \dots < j_k\}$ を添字集合とする $X = M_k(x, z_0)$ の k 次小行列式は,

$$\det_{IJ}(X) = (J \text{ independent})(I \text{ independent}) \quad (32)$$

のように因子化される. この k 次小行列式を用いて, 変数 x_{ij} は次のように表される.

$$x_{ij} = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}}{\tau_{i-1,j}}, & (j = i) \\ \frac{\tau_{ij}\tau_{i-1,j-1}}{\tau_{i,j-1}\tau_{i-1,j}}, & (i < j < i + n - k) \\ \ell(x) \frac{\tau_{i-1,j-1}}{\tau_{i,j-1}}, & (j = i + n - k) \end{cases} \quad (33)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(X) = \det_{*, J_{ij}}(X), \quad J_{ij} = [1, i] \cup [j + 1, k - i + j].$$

実際, 上記の因子化の性質より, 式 (33) の右辺の比は, 行の添字集合 $*$ の選び方によらない. そこで $* = [n - k + 1, n]$ の場合を考えると, $B_{ij} = 0$ ($i > n - k$) より, $\det_{*, J_{ij}}(M(x, z)) = \det_{*, J_{ij}}(A(x))$ となり, A の行列式に対する非交差路和の公式 [GV][BFZ] が適用できて

$$\tau_{ij} = \left(\prod_{a=1}^i \prod_{b=a}^{a+n-k} x_{a,b} \right) \left(\prod_{a=i+1}^k \prod_{b=\max(a, j+1)}^{a+n-k} x_{a,b} \right), \quad (34)$$

となる. 比をとって式 (33) が得られる.

同様に, 次の表示も得られる

$$x_{ij} = \begin{cases} \ell(x) \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{i-1,j}}, & (j = i) \\ \frac{\sigma_{ij}\sigma_{i-1,j-1}}{\sigma_{i,j-1}\sigma_{i-1,j}}, & (i < j < i+n-k) \\ \frac{\sigma_{i-1,j-1}}{\sigma_{i,j-1}}, & (j = i+n-k) \end{cases} \quad (35)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(X) = \det_{I_{ij},*}(X), \quad I_{ij} = [j-i+1, j] \cup [n-k+i+1, n].$$

ここでも列の添字*は(σ の比の意味で)任意にとってよい. さらに, 同じく因子化の性質より, 小行列式の比 $\tau_I(X)/\tau_J(X)$ (resp. $\sigma_I(X)/\sigma_J(X)$) は左 (resp. 右) からの積 $X \mapsto gX$ (resp. $X \mapsto Xg$) に対して不変であることに注意する (τ_I, σ_I は相対不変式). この性質は, 次に述べる tropical R , tropical pr の計算で有効に働く.

3.5 R と pr の行列式公式

Tropical $R: (x, y) \mapsto (x', y')$ の定義関係式は

$$M_{k_1}(x, z)M_{k_2}(y, z) = Z = M_{k_2}(x', z)M_{k_1}(y', z), \quad (36)$$

であった. ここで, 公式 (33), (35) において X を Z に置き換え, 積不変性を用いれば, 次が得られる

$$\begin{aligned} x'_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}(Z)\sigma_{i-1,j-1}(Z)}{\sigma_{i,j-1}(Z)\sigma_{i-1,j}(Z)} \Big|_{z=(-1)^{k_2-1}/\ell(y)}, \\ y'_{ij} &= \frac{\tau_{ij}(Z)\tau_{i-1,j-1}(Z)}{\tau_{i,j-1}(Z)\tau_{i-1,j}(Z)} \Big|_{z=(-1)^{k_1-1}/\ell(x)}. \end{aligned} \quad (37)$$

(これは $i < j < i+n-k$ の場合の式. $j=1$ や $j=i+n-k$ の場合は (33), (35) と同様). 3 個以上の tensor 積に関しても, その両端の成分については同様の公式が成り立つ. ただし, これらの小行列式の有理式としての具体的な一般公式は得られておらず⁴, それが正值有理変換であることは現在のところ予想である.

一方, tropical pr は, その定義関係式

$$M_k(\text{pr}(x), z) = CZC^{-1}, \quad Z = M_k(x, z), \quad (38)$$

⁴ k_1 または k_2 の少なくとも一方が 1 の場合には経路和公式の予想がある.

より, 次の行列式で表される,

$$\begin{aligned} \text{pr}(x_{ij}) &= \frac{\tau_{ij}(ZC^{-1})\tau_{i-1,j-1}(ZC^{-1})}{\tau_{i,j-1}(ZC^{-1})\tau_{i-1,j}(ZC^{-1})} \Big|_{z=(-1)^{k-1}/\ell(x)}, \\ &= \frac{\sigma_{ij}(CZ)\sigma_{i-1,j-1}(CZ)}{\sigma_{i,j-1}(CZ)\sigma_{i-1,j}(CZ)} \Big|_{z=(-1)^{k-1}/\ell(x)}. \end{aligned} \quad (39)$$

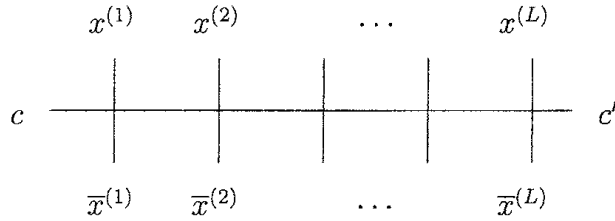
4 可積分系への応用

4.1 Tropical vertex models

Tropical R から自然に構成される”可積分な”力学系として tropical vertex model が考えられる. これは,

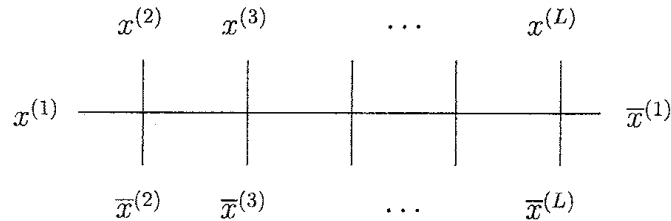
$$x = x^{(1)} \otimes \dots \otimes x^{(L)} \in \mathcal{B}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^{k_L} \quad (40)$$

を従属変数とし, その時間発展 $x \mapsto \bar{x} = T_c(x)$ を次で定義するものである.



この構成は箱玉系における”運搬車 algorithm”に対応し, 超離散極限で箱玉系 (の一般化) を与える [KOTY2].

Tropical vertex model を周期的に変形したものとして, 次の図式で表される力学系 $x \mapsto \bar{x} = T_1(x)$, $x = x^{(1)} \otimes \dots \otimes x^{(L)} \in \mathcal{B}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^{k_L}$ も考えられる.



同様にして $T_1, T_2, \dots, T_L$ が定義され, 互いに可換となる. この系 (の非自励的変形) は q -Painlevé 方程式 (の一般化) とも見なせ, $\mathcal{B}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}^{k_L}$ への affine Weyl 群 $W(A_{n-1}^{(1)})$ の作用は, その Bäcklund 変換を与える. これも箱玉系と古典 soliton 系の関係の一側面である. 例として, q - P_{IV} ($A_2^{(1)}$, $\mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1$) の場合を示しておこう [KNY]. q -Painlevé 方程式

$q\text{-}P_{\text{IV}} : (x_i, y_i) \mapsto (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ は,

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 \frac{qx_2x_3 + x_2y_1 + y_1y_3}{x_1x_2 + x_1y_3 + y_2y_3}, \\ \bar{x}_2 &= x_2 \frac{q(x_1x_3 + x_3y_2) + y_1y_2}{qx_2x_3 + x_2y_1 + y_1y_3}, \\ \bar{x}_3 &= x_3 \frac{q(x_1x_2 + x_1y_3 + y_2y_3)}{q(x_1x_3 + x_3y_2) + y_1y_2},\end{aligned}\tag{41}$$

および $\bar{x}_i\bar{y}_i = x_iy_i$ と書ける. これと可換な Affine Weyl 群 $W(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$ の作用は

$$\begin{aligned}\pi(x_i) &= x_{i+1}, \quad \pi(y_i) = y_{i+1}, \\ s_i(x_i) &= x_{i+1} \frac{x_i + y_{i+1}}{x_{i+1} + y_i}, \quad s_i(x_{i+1}) = x_i \frac{x_{i+1} + y_i}{x_i + y_{i+1}}, \quad s_i(x_{i-1}) = x_{i-1}, \\ s_i(y_i) &= y_{i+1} \frac{x_{i+1} + y_i}{x_i + y_{i+1}}, \quad s_i(y_{i+1}) = y_i \frac{x_i + y_{i+1}}{x_{i+1} + y_i}, \quad s_i(y_{i-1}) = y_{i-1},\end{aligned}\tag{42}$$

で与えられる. ただし x_i, y_i は添字 i について準周期的で $x_{i+3} = x_i/q$, $y_{i+3} = y_i/q$ とする.

方程式 (41) は, $A_2^{(1)}$ の $M_1(x, z)$ 行列 (逆行列にして符号を変えた) を用い, 行列等式

$$\begin{bmatrix} x_1 & & z \\ 1 & x_2 & \\ & 1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & & qz \\ 1 & y_2 & \\ & 1 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & & z \\ 1 & \bar{x}_2 & \\ & 1 & \bar{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & & qz \\ 1 & \bar{y}_2 & \\ & 1 & \bar{y}_3 \end{bmatrix},\tag{43}$$

にまとめられる. 従って, $q\text{-}P_{\text{IV}}$ は本質的には $\mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1$ への tropical R の作用である. また, Weyl 群作用 (42) は, §2.3 (3) で述べたものである.

References

- [ABS] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach*, Comm. Math. Phys. **233** (2003) 513–543.
- [BFZ] A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky, *Parameterizations of canonical bases and totally positive matrices*, Adv. in Math. **122** (1996) 49–149.
- [BK] A. Berenstein and D. Kazhdan, *Geometric and unipotent crystals*, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999) Geom. Funct. Anal. (2000) Special Volume, Part I, 188–236.
- [FOY] K. Fukuda, M. Okado, Y. Yamada, *Energy functions in box ball systems*, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 1379–1392.

- [GV] I. Gessel and G. Viennot, *Binomial determinants, paths and hook length formulae*, Adv. Math. **58** (1985) 300–321.
- [H] R. Hirota, *Discrete analogue of a generalized Toda equation*, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 3785–3791.
- [HHIKTT] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, *The $A_M^{(1)}$ Automata related to crystals of symmetric tensors*, J. Math. Phys. **42** (2001) 274–308.
- [HKOT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado and T. Takagi, *Combinatorial R matrices for a family of crystals: $B_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $A_{2n}^{(2)}$, and $D_{n+1}^{(2)}$ cases*, J. Alg. **247** (2002) 577–615.
- [HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases*, Contemporary Math. **297** (2002) 151–182.
- [HKT1] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, *Soliton cellular automata associated with crystal bases*, Nucl. Phys. B **577**[PM] (2000) 619–645.
- [HKT2] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, *Simple algorithm for factorized dynamics of $\mathfrak{g}_n$ -automaton*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 10697–10705.
- [K] M. Kashiwara, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. **73** (1994) 383–413.
- [Ki] A. N. Kirillov, *Introduction to tropical combinatorics*, in “Physics and Combinatorics 2000” (Eds. A. N. Kirillov and N. Liskova) Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop, World Scientific, (2001) 82–150.
- [KNY] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, *Discrete dynamical systems with $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ symmetry*, Lett. Math. Phys. **60** (2002) 211–219.
- [KOTY1] A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Geometric crystal and tropical R for $D_n^{(1)}$* , Int. Math. Res. Not. (2003) 2565–2620.
- [KOTY2] A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Tropical R and tau functions*, Comm. Math. Phys. **245** (2004) 491–517.
- [M] T. Miwa, *On Hirota’s difference equations*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982) 9–12.

- [NY] M. Noumi and Y. Yamada, *Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions*, Adv. Stud. Pure Math. **40** (2004) 371–442.
- [S] M. Shimozono, *Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties*, math.QA/9804039.
- [TS] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514–3519.
- [TTMS] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247–3250.
- [V] A. P. Veselov, *Yang-Baxter maps and integrable dynamics*, Phys. Lett. A **314** (2003) 214–221.
- [Y] Y. Yamada, *A birational representation of Weyl group, combinatorial R-matrix and discrete Toda equation*, in “Physics and Combinatorics 2000” (Eds. A. N. Kirillov and N. Liskova) Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop, World Scientific, (2001) 305–319.