

CIRCLE PACKING の私的入門

京大理 谷口雅彦

(Masahiko Taniguchi)

Circle packing (CP) とは 円板によるリーマン面
の充填であり、それらの配置から元の面 (位相的な) 三角
形分割、あるいは組み合わせ論的な contact graph のみ
ならず、たとえば graph 上の幾何構造までも確定する。正
則性 (rigidity) が組み合わせ論的な graph を「硬直化」さ
せるのである。

古来多様体の離散化はグラフ化が一方の主流となして
来たが、(たとえば森明, Royden から Lyons; Sullivan
に至る型問題への応用に代表されるような) 群作用に付随す
る離散化以外では、vertex の位置は恣意的にならざるを
得ない。ましてや edge を与える根拠は存在し得ない。こ
で、たとえば network においては electric flow を「天
の声」とする。この文脈においては、多様体はむしろ net-
work から生み出されるものである。決してその逆ではない。
(Duffin 等から Doyl, Snell への流れをみよ)

もとより、群作用に離散化においても、戦略の根底にあるのは群そのものの代数的構造である。この側面の可視化として Cayley graph があり、word metric 等により幾何学化されたとしても、代数的構造の解明が中心課題として残る。

注) 多様体のグラフ化は単純化であるが、群のグラフ化は複雑化である。対象の「ほどよい」情報化が目的であろう。

一方向 - 二方向には、一般に代数的構造というものは無い。あるのは正則性 = 複素構造のもつ生来の rigidity と、にもかかわらず消失しない奇妙な flexibility = Teichmüller theory である。

CP は、rigidity の顕在化により、一方向 - 二方向の複素構造を忠実に (組み合わせ論的な) contact graph に伝達することが可能な装置であるといえる。

よく、Koebe から Andreev, Thurston 等を経て、Stephenson, He, Schramm 等へと至り、ともかくも、三種の典型的な「世界」:

$\mathbb{C}P$: リーマン環 (球面幾何)

$\mathbb{C}$: 複素平面 (Euclid 幾何)

Δ : 単位円板 (双曲幾何)

における CP の存在定理は一応の収束を得た。

リーマン環とグラフとの間には既に大きな「橋」が渡されてはいるが、それは群構造に依存する道であつた。今、 CP は何の「凹凸」もない所に、文字どおり網をかける新しい手法を提供しているように思える。

形態の理念を規定する。

無限に並ぶ円板を見たから正則性について語れば、さぞ愉快であらう。