

Fundamental sequence の system の性質について

角田 法也 (広島大・工)

(Noriya KADOTA, Hiroshima Univ.,

Applied Math.)

§0 Introduction.

Fundamental sequence の “自然な” とり方とはどのようなものかを、[1], [3], [4] に引き続き考察する。

今、 Δ もある countable ordinal として、任意の limit ordinal $\lambda < \Delta$ に対し、

$$(i) \lambda[0] < \lambda[1] < \lambda[2] < \dots < \lambda,$$

$$(ii) \lim_{x < \omega} \lambda[x] = \lambda$$

を満たす sequence $\langle \lambda[x] \rangle_{x < \omega}$ (λ に対する fundamental sequence と呼ぶ) が対応しているとき、fast-growing hierarchy $\langle F_\alpha : \omega \rightarrow \omega \rangle_{\alpha < \Delta}$ を次のように帰納的に定義する。

$$(i) F_0(x) = x+1,$$

$$(ii) F_{\alpha+1}(x) = \underbrace{F_\alpha(\dots (F_\alpha(x)) \dots)}_{x+1 \text{ 個の } F_\alpha} \left[= F_\alpha^{x+1}(x) \right]$$

$$(iii) F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x), \text{ 但し、} \lambda \text{ は limit ordinal.}$$

また、

$\mathcal{F}_\alpha = \text{elementary recursive in } F_\alpha$ である (ω 上の) 関数全体としよう.

Ketonen と Solovay が論文 [5] の中で有限組合せ論的命題である Paris-Harrington Principle (PH) から定義される関数の階層と、 ε_0 までの fast-growing hierarchy $\langle F_\alpha \rangle_{\alpha < \varepsilon_0}$ の細かい関係を調べたとき、次の (I), (II) の事実を用いて PH が Peano arithmetic (PA) では (正しいが) 証明出来ないと結論したのである.

(I) (Wainer [10]) ε_0 までの limit ordinals に対する standard な fundamental sequence の system

$$\langle \langle \lambda[x] \rangle_{x < \omega} : \lambda (< \varepsilon_0) \text{ は limit ordinal} \rangle$$

に対し、 $\bigcup_{\alpha < \varepsilon_0} \mathcal{F}_\alpha$ は、 $\prec_\alpha$ -recursive function ($\alpha < \varepsilon_0$) 全体と一致する.

(II) (Kreisel) $\prec_\alpha$ -recursive function ($\alpha < \varepsilon_0$) 全体は provably recursive in PA である function 全体と一致する.

ここで、(I) の事実は、か、こな fundamental sequence の system ではなく、具体的に "standard な" fundamental sequence の system をとれば、 $\bigcup_{\alpha < \varepsilon_0} \mathcal{F}_\alpha$ は $\prec_\alpha$ -recursive func. ($\alpha < \varepsilon_0$) 全体に一致するということが述べている.

Ketonen と Solovay の結果を拡張、一般化しようとする際、

また、それ自身の興味からも、(I)の事実を一般的に考察することは大切であるが、そのとき、(つまり、 ε_0 を一般の Δ とするとき、) fundamental sequence をどのようにとればよいかという問題が現われてくる。すなわち、fundamental sequence の“自然な” system とはどのようなものが、という問題の考察が重要なのである。

我々は [4] (角田-青山) で、Schmidt [8] の結果を拡張して、その上で定義された fast-growing hierarchy $\langle F_\alpha \rangle_{\alpha < \Delta}$ が、基本的な性質 (例えば各 F_α が strictly increasing であることなど) を持つような fundamental sequence の system の条件をいくつか定義して、それらの条件相互の関係や、second number class 全体に対する system の存在に関する結果を得た。

ここでは、そのような fundamental sequence の system の性質の研究が、subrecursive hierarchy の理論、特に上記の (I) の一般化に、どのようにつながってくるかを考察する。

まず Section 1 では、fundamental sequence の system の性質の相互関係を [4] に従って述べる。そして Section 2 で fundamental sequence の system 上での fast-growing hierarchy と α -recursive functions との関係を一般的に考察する。

最後に、Section 3 では、Enumeration hierarchy と fast-growing hierarchy との関係に関する Zemke [11] の結果を述べる。

§ 1 Fundamental sequence の system.

ここでいう (Δ に対する) fundamental sequence の system とは、Zemke [11], Rose [7] 等で考察される system of notation (但し、uniqueness condition 付き) のことである。

Def. (Δ に対する) fundamental sequence の system

$\mathcal{S} = (S, <)$ は次のように定義される。

- (1) S は 自然数全体 ω のある primitive recursive subset,
- (2) $<$ は S 上の order-type Δ (ある countable ordinal) の primitive recursive well-order で、 0 を最小元として持つものとする。 S の元を $\alpha, \beta, \dots$ と書く。また、 $\alpha+1$, $\alpha-1$ をそれぞれ $<$ に隣する successor, predecessor とする。
primitive recursive
- (3) $\text{Seq} : S \times \omega \rightarrow S$ を primitive recursive function (1 に延ばせるもの) で次の (i) - (iii) を満たすとする。
 - (i) $\alpha = 0 \Rightarrow \text{Seq}(\alpha, x) = 0, \quad x < \omega,$
 - (ii) α が successor $\Rightarrow \text{Seq}(\alpha, x) = \alpha - 1, \quad x < \omega,$
 - (iii) α が limit $\Rightarrow \langle \text{Seq}(\alpha, x) \rangle_{x < \omega}$ は α に対する fundamental sequence. つまり、

$$\left(\begin{array}{l} \text{Seq}(\alpha, x) < \text{Seq}(\alpha, x+1) < \alpha, \quad x < \omega \\ \lim_{x < \omega} \text{Seq}(\alpha, x) = \alpha \quad \text{を} \text{満たす} \end{array} \right.$$

$\text{Seq}(\alpha, \kappa)$ のことを $\alpha[\kappa]$ と書く.

Example ε_0 に対する standard な fundamental sequence の system $\mathcal{S}$ は、 S を ε_0 までの ordinal 全体と、また、 $<$ を ordinal の不等号 と同一視したとき、次の様に定義される. (Wainer [10] 参照)

$\text{limit } \alpha (< \varepsilon_0)$ に対して 帰納的に $\alpha[\kappa]$ を定義する.

α が $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$ ($\alpha_1 > \dots > \alpha_k$, $0 < n_1, \dots, n_k < \omega$) と Cantor normal form で表わされているとき、

(i) α_k が $\beta+1$ の形 のとき、

$$\alpha[\kappa] = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot (n_k - 1) + \omega^{\beta} \cdot \kappa,$$

(ii) α_k が limit のとき、

$$\alpha[\kappa] = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot (n_k - 1) + \omega^{\alpha_k}[\kappa]$$

さて、 $(\dots (\alpha[x_1])[x_2]) \dots)[x_m]$ のことを $\alpha[x_1][x_2] \dots [x_m]$ と書くことにしたとき、fundamental sequence の system の性質を記述するために重要な $\xrightarrow{n}$, $\xRightarrow{n}$ を次のように定義する.

Def. $n < \omega$, System $\mathcal{S}$ に対して、

(1) $\alpha \xrightarrow{n} \beta$ とは、 $\alpha > \beta$ で、かつ $0 < k < \omega$ が存在して、

$$\underbrace{\alpha[n][n] \dots [n]}_{k \text{ 個の } n} = \beta \quad \text{のとき.}$$

(2) $\alpha \xrightarrow{n} \beta$ とは、 $\alpha = \beta$ または $\alpha \xrightarrow{m} \beta$ のとき。

これらの記法を用いて、fundamental sequence の system の性質を記述しよう。

Def. $n < \omega$.

(1) System $\mathcal{S}$ が (n)-built-up とは、

$$\alpha[x+1] \xrightarrow{n} \alpha[x], \quad x < \omega, \quad \text{limit } \alpha \text{ のとき.}$$

(2) System $\mathcal{S}$ が (n)-diagonal-built-up とは、

$$\alpha[x+1] \xrightarrow{x+n} \alpha[x], \quad x < \omega, \quad \text{limit } \alpha \text{ のとき.}$$

(3) System $\mathcal{S}$ が LW とは、

$$\begin{cases} \alpha[1] \xrightarrow{1} \alpha[0] \\ \alpha[x+1] \xrightarrow{x} \alpha[x], \quad 0 < x < \omega, \quad \text{limit } \alpha \text{ のとき.} \end{cases}$$

(4) System $\mathcal{S}$ が nice であるとは、

$$\alpha[x+1] \xrightarrow{x+1} \alpha[x] + 1, \quad x < \omega, \quad \text{limit } \alpha \text{ のとき.}$$

Lemma 1. System $\mathcal{S}$ に対して.

(1) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up のとき、 $\alpha \xrightarrow{m} \beta$, $m, n \leq s$ ならば、

$$\alpha \xrightarrow{s} \beta.$$

(2) $k = 0$ または 1 に対して、 $\mathcal{S}$ が (k)-diagonal-built-up のとき、

$$\alpha \xrightarrow{m} \beta, \quad m < s \quad \text{ならば,} \quad \alpha \xrightarrow{s} \beta.$$

(3) $\mathcal{S}$ が LW のとき、 $\alpha \xrightarrow{m} \beta$, $m < s$ ならば、 $\alpha \xrightarrow{s} \beta$.

(4) $\mathcal{S}$ が (0) -diagonal-built-up のとき、 $\alpha \xrightarrow{n} \beta$ ならば $\alpha \xrightarrow{n+1} \beta+1$.

Proof. α に属する transf. ind. による.

(1) $\alpha \xrightarrow{m} \beta$, $m, n \leq s$ とする. このとき、 $\alpha[m] \xrightarrow{m} \beta$.

今、 $\mathcal{S}$ は (n) -built-up であるから、 $\alpha[s] \xrightarrow{n} \alpha[m]$ (ind.

hyp. より). $\alpha[s] \xrightarrow{s} \alpha[m] \xrightarrow{s} \beta$. したがって、 $\alpha \xrightarrow{s} \alpha[s] \xrightarrow{s} \beta$.

(2) $k=0$ または 1 . $\alpha \xrightarrow{m} \beta$, $m < s$ とする. このとき、 $\alpha[m] \xrightarrow{m} \beta$.

$\mathcal{S}$ が (k) -diagonal-built-up であるならば、

$$\alpha[s] \xrightarrow{s+k-1} \cdots \xrightarrow{m+k} \alpha[m].$$

このとき、ind. hyp. より、 $\alpha[s] \xrightarrow{s} \alpha[m] \xrightarrow{s} \beta$.

したがって、 $\alpha \xrightarrow{s} \alpha[s] \xrightarrow{s} \beta$.

(3) (2) と同様.

(4) $\alpha=0$ のとき明らか. $\alpha=\gamma+1$ のとき、 $\alpha \xrightarrow{n} \beta$ とすると、

$\gamma=\beta$ または $\gamma \xrightarrow{n} \beta$. $\gamma=\beta$ のとき、 $\alpha=\beta+1$. $\gamma \xrightarrow{n} \beta$

のとき、ind. hyp. より、 $\gamma \xrightarrow{n+1} \beta+1$. したがって $\alpha \xrightarrow{n+1} \beta+1$.

α が limit の場合、 $\alpha \xrightarrow{n} \beta$ とすると、 $\alpha[n]=\beta$ または

$\alpha[n] \xrightarrow{n} \beta$. $\alpha[n]=\beta$ のとき、 $\mathcal{S}$ が (0) -diagonal-built-up であるから、 $\alpha[n+1] \xrightarrow{n} \alpha[n] = \beta$. ind. hyp. より、

$\alpha[n+1] \xrightarrow{n+1} \beta+1$. したがって $\alpha \xrightarrow{n+1} \alpha[n+1] \xrightarrow{n+1} \beta+1$. $\therefore \alpha \xrightarrow{n+1} \beta+1$.

$\alpha[n] \xrightarrow{n} \beta$ のとき、induction の仮定により、 $\alpha[n] \xrightarrow{n+1} \beta+1$.

$\mathcal{S}$ が (0) -diagonal-built-up ならば、 $\alpha[n+1] \xrightarrow{n} \alpha[n]$. (2) より、

$\alpha[n+1] \xrightarrow{n+1} \alpha[n]$. ところで、 $\alpha \xrightarrow{n+1} \alpha[n+1] \xrightarrow{n+1} \alpha[n] \xrightarrow{n+1} \beta+1$.

Lemma 1 から次のことが導かれる。

Lemma 2. System $\mathcal{S}$ に対して、

- (1) $\mathcal{S}$ が (n) -built-up ならば、 $\mathcal{S}$ は $(n+1)$ -built-up.
- (2) $\mathcal{S}$ が (n) -built-up ならば、 $\mathcal{S}$ は (n) -diagonal-built-up.
- (3) $\mathcal{S}$ が (1) -diagonal-built-up ならば、 $\mathcal{S}$ は (n) -diagonal-built-up ($n > 1$)
- (4) $\mathcal{S}$ が (1) -built-up ならば、 $\mathcal{S}$ は LW.
- (5) $\mathcal{S}$ が (0) -diagonal-built-up ならば、 $\mathcal{S}$ は LW かつ nice.
- (6) $\mathcal{S}$ が LW または nice ならば、 $\mathcal{S}$ は (1) -diagonal-built-up.

Def. System $\mathcal{S}$ に対して、

- (1) $\mathcal{S}$ が normed であるとは、次の (i) - (iii) を満たす。

$\text{norm } N: S \rightarrow \omega$ が定義されているとき、

(i) $\alpha = 0$ のとき、 $N(\alpha) = 0$

(ii) α が successor のとき、 $N(\alpha-1) < N(\alpha)$

(iii) α が limit のとき、 $N(\alpha[x]) < N(\alpha[x+1])$, $x < \omega$.

- (2) $\mathcal{S}$ が regulated であるとは、 $\mathcal{S}$ が normed であって、その $\text{norm } N$ が、次を満たすとき。

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha[N(\beta)]$$

- (3) $\mathcal{S}$ が p. r. - regulated であるとは、 $\mathcal{S}$ が regulated であつて、その norm N が primitive recursive (に拡張されるもの) のときとする。

Lemma 3. System $\mathcal{S}$ に対し、以下の (1) ~ (3) の条件は同値。

(1) $\mathcal{S}$ が (n) - built-up

(2) $\mathcal{S}$ が Bachmann property $B[n]$ をもつ。

$$\text{すなわち、} \alpha[x] < \beta \leq \alpha[x+1] \Rightarrow \alpha[x] \leq \beta[x]$$

$$x < \omega, \text{ limit } \alpha \text{ を満たす。}$$

(3) $\mathcal{S}$ が次の条件を満たす：

$$\alpha[x] < \beta \leq \alpha[x+1] \Rightarrow \beta \xrightarrow{n} \alpha[x], \quad x < \omega, \alpha \neq \text{limit.}$$

Proof. Schmidt [6] や 角田 - 青山 [3] の中にある。

Lemma 4 System $\mathcal{S}$ が (n) - built-up とする。このとき、

$$N(\alpha) = |\{ \beta \mid \alpha \xrightarrow{n} \beta \}|$$

と定義すると、 N は norm であつて、

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha[N(\beta)] \text{ を満たす。}$$

(すなわち、 $\mathcal{S}$ は regulated である。)

Proof. まず、 N が norm の条件 (i) - (iii) を満たすことは、

$\mathcal{S}$ が (n) -built-up であることから出る。次に $\alpha > \beta$ で、 α

は limit とする。このとき 2つの場合がある。

Case 1. $0 < p < \omega$ が存在して $\alpha[p] \geq \beta > \alpha[p-1]$

Case 2. $\alpha[0] \geq \beta$.

Case 1 のとき、Lemma 1 より

$$\alpha[p] \geq \beta \xrightarrow{n} \beta[n] \xrightarrow{n} \alpha[p-1] \xrightarrow{n} \dots \xrightarrow{n} \alpha[0] \geq 0.$$

ゆえに、 $p \leq N(\beta)$. よって $\beta \leq \alpha[p] \leq \alpha[N(\beta)]$.

Case 2 では、 $\beta \leq \alpha[0] \leq \alpha[N(\beta)]$.

Lemma 5. System $\mathcal{S}$ が regulated で、その norm を N と

すると、 $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \xrightarrow{N(\beta)} \beta$ である。

Proof. α に 関する transf. ind. による。

Lemma 6. System $\mathcal{S}$ が regulated または、(1)-diagonal-

built-up (ゆえに Lemma 2 から、 LW または nice) であるとき、

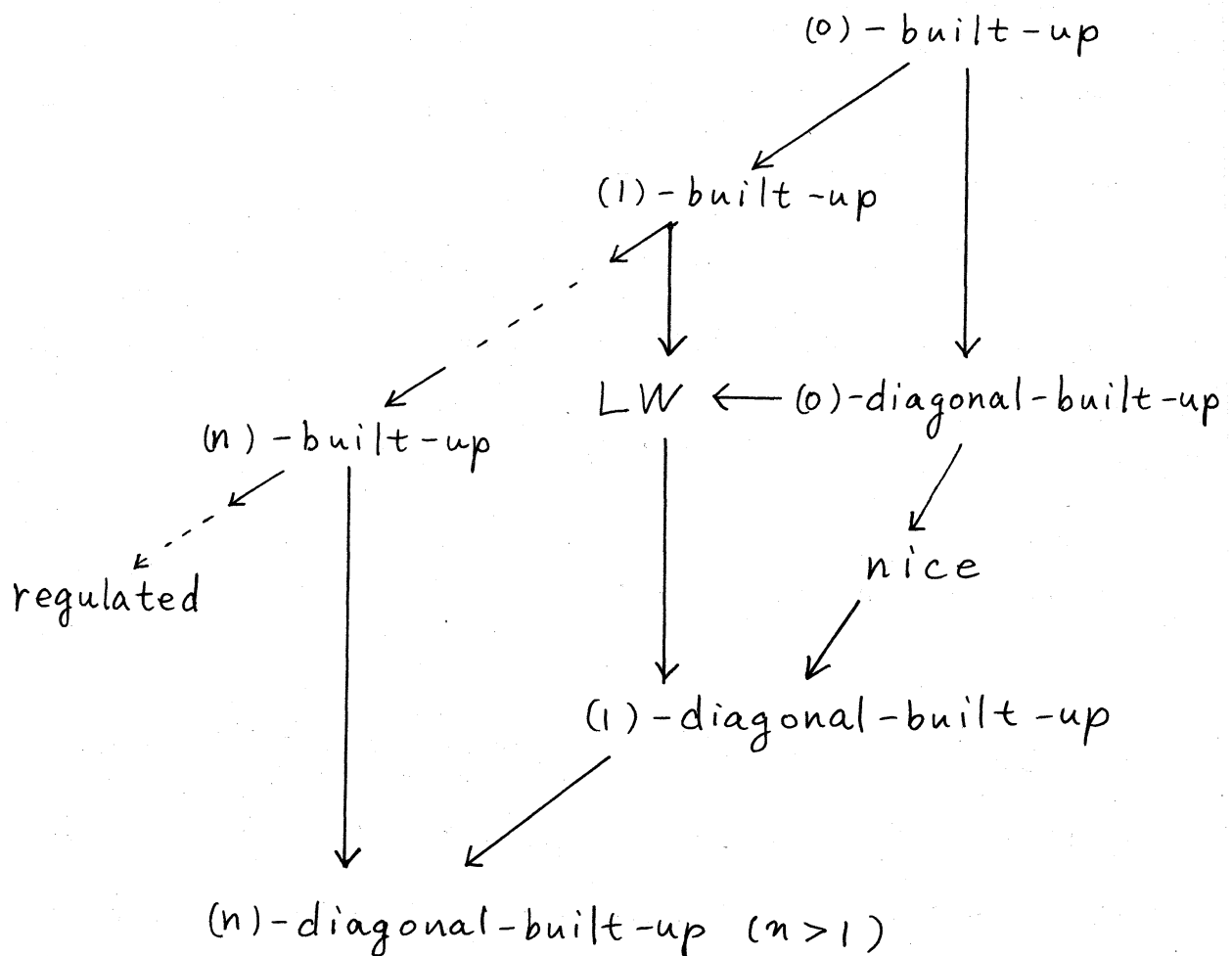
$\alpha > \beta$ ならば、ある $m < \omega$ が存在して、 $\alpha \xrightarrow{m} \beta$ となる。

Proof. $\mathcal{S}$ が (1)-diagonal-built-up のときも、 α に 関する transf.

ind. による。

下のような図式が書ける.

(但し, " $A \rightarrow B$ " は "System $\mathcal{A}$ が A であれば, $\mathcal{A}$ は B である" ということの意味する.)



§ 2 Fast-growing, Hardy hierarchy と κ_α -recursive functions

この Section では、system $\mathcal{S}$ に対して、number-theoretic function の族 fast-growing hierarchy $\{F_\alpha\}_{\alpha < \Delta}$, Hardy hierarchy $\{H_\alpha\}_{\alpha < \Delta}$, 及び κ_α -recursive function の族 $V(\alpha)$ の概念を導入し、system $\mathcal{S}$ に対するいくつかの条件の下で、それらの族の関係を考察する。

基本的な定義・概念は Rose [7] 等を参照されたい。

Def. (1) $f: \omega^k \rightarrow \omega$ が $g: \omega \rightarrow \omega$ により dominate されるとは、ある $c < \omega$ が存在して、

$$c \leq \max(x_1, \dots, x_k) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_k) \leq g(\max(x_1, \dots, x_k))$$

のときとする。

(2) $f: \omega^k \rightarrow \omega$ に対して、 $f^m: \omega^k \rightarrow \omega$ を次のように作る。

$$f^0(x_1, \dots, x_k) = x_1$$

$$f^{m+1}(x_1, \dots, x_k) = f(f^m(x_1, \dots, x_k), x_2, \dots, x_k)$$

Def. (fast-growing hierarchy $\{F_\alpha\}_{\alpha < \Delta}$, $\{\bar{F}_\alpha\}_{\alpha < \Delta}$)

$F_\alpha: \omega \rightarrow \omega$ を次のように定義する。

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} x+1 & , \alpha = 0 \text{ のとき,} \\ F_{\alpha-1}^{x+1}(x) & , \alpha \text{ は successor のとき,} \\ F_\alphax & , \alpha \text{ は limit のとき.} \end{cases}$$

$\overline{F}_\alpha$ を elementary recursive in F_α である関数全体,

$\overline{F}_\alpha$ を elementary recursive in F_β ($\beta \leq \alpha$) である関数全体とする.

Def. (Hardy hierarchy $\{H_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$, $\{\overline{H}_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$).

$H_\alpha: \omega \rightarrow \omega$ を次のように定義する.

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} x & , \alpha = 0 \text{ のとき,} \\ H_{\alpha-1}(x+1) & , \alpha \text{ は successor のとき,} \\ H_\alphax & , \alpha \text{ は limit のとき.} \end{cases}$$

$\mathcal{H}_\alpha$ をすべての elementary recursive functions と、 H_α を含み、

limited substitution と limited primitive recursion で

閉じた最小の関数族とする.

$\overline{\mathcal{H}}_\alpha$ をすべての elementary recursive functions と、 H_β ($\beta \leq \alpha$)

を含み、limited substitution と limited primitive recursion

で閉じた最小の関数族とする.

Theorem 7 System $\mathcal{S}$ が LW または nice とする. このとき.

$\{F_\alpha\}$, $(\{H_\alpha\})$ に対して、次の (1) - (3) が成り立つ.

(1) 各 F_α は strictly increasing,

$$(2) \alpha \xrightarrow{m} \beta \Rightarrow F_\beta(s) \leq F_\alpha(s), F_\beta(x) < F_\alpha(x), x > s$$

但し、 $s = \max(1, m)$.

$$(3) \alpha > \beta \Rightarrow F_\beta \text{ は } F_\alpha \text{ によ、て dominate される.}$$

(また、 $\{H_\alpha\}$ に対しても (1) - (3) の F を H に置き換えて成り立つ.)

Proof. (1), (2) を同時に α に関する transf. ind. によ、て証明する. (Schmidt [8], 青山-角田 [1], 角田-青山 [4]).

(3) は Lemma 6 により、 $\alpha > \beta$ ならば、ある $m < \omega$ に対して $\alpha \xrightarrow{m} \beta$ となるので、(2) から、 F_β は F_α によ、て dominate されることが解かる.

Def. ($<_\alpha$ -recursive function $V(\alpha)$)

$V(\alpha)$ をすべての primitive recursive function を含み、substitution と次の (unnested) α -recursion について閉じた最小の関数族とする.

$$f(0, u) = g_0(u)$$

$$f(x, u) = g_1(x, u, f(p(x, u), u)) \quad , \quad x > 0$$

$$\text{但し、} \begin{cases} p(x, u) < x & , \quad 0 < x < d \text{ のとき.} \\ p(x, u) = 0 & , \quad \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

$V(\alpha)$ に属する関数は $<_\alpha$ -recursive であると言われる.

Lemma 8 $\omega \leq d$ とする. $\mathcal{U}(d)$ はすべての primitive recursive function を含み, substitution と primitive recursion と, 以下の d -annihilation で閉じた最小の関数族である.

$$f(0, u) = 0$$

$$f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u), \quad x > 0.$$

$$\text{但し, } \begin{cases} p(x, u) < x & , \quad 0 < x < d \text{ のとき,} \\ p(x, u) = 0 & \text{その他のとき.} \end{cases}$$

Proof. primitive recursion と, d -annihilation が次の

$$d\text{-recursion: } \begin{cases} f(0, u) = g_0(u) \\ f(x, u) = g_1(x, u, f(p(x, u), u)), \quad x > 0 \end{cases}$$

を生成することを示す.

$$g \text{ を } g(0, u) = 0$$

$$g(x, u) = 1 + g(p(x, u), u), \quad x > 0$$

と置く. この意味は,

$$g(x, u) = \mu n (p^n(x, u) = 0).$$

$$h \text{ を, } h(x, 0, u) = g_0(u),$$

$$h(x, y, u) = g_1(p^{g(x, u)-y}(x, u), u, h(x, y-1, u)), \\ y > 0$$

と定義すると,

$$f(p^{g(x,u)-n}(x,u), u) = h(x, n, u), \quad 0 \leq n \leq g(x, u)$$

$$(\because) \quad n=0 \Rightarrow p^{g(x,u)}(x,u) = 0 \text{ により.}$$

$$\begin{aligned} n > 1 &\Rightarrow f(p^{g(x,u)-n}(x,u), u) \\ &= g_1(p^{g(x,u)-n}(x,u), u, f(p^{g(x,u)-(n-1)}(x,u), u)) \\ &= g_1(p^{g(x,u)-n}(x,u), u, h(x, n-1, u)) \\ &= h(x, n, u) \end{aligned}$$

したがって、 $f(x, u) = h(x, g(x, u), u)$ である。

Def. $\alpha > \beta$ のとき、 $N: S^2 \rightarrow \omega$ を次のように定義する。

$$N(\alpha, \beta) = \mu n (\alpha \xrightarrow{n} \beta).$$

注意: Lemma 6 により、system $\mathcal{S}$ が regulated や、(1)-diagonal-built-up (ゆえに LW または nice) のとき、 $\alpha > \beta$ に対し、 $\alpha \xrightarrow{n} \beta$ となる n は存在する。

ここで我々は、仮定として、以下のものを採用する。

- (i) System $\mathcal{S}$ は LW または nice とする。
- (ii) $\mathcal{S}$ に対して、ordinal としての演算 (加法 $\alpha + \beta$, 乗法 $\alpha \cdot \beta$, べき法 α^β) を考えるが、それらは primitive recursive function (に拡張出来るもの) とする。

(iii) 関数 $N(\alpha, \beta)$ は primitive recursive function (に拡張出来るもの) とする.

Lemma 9 (1) $\bigcup_{n < \omega} \mathcal{F}_n$ はすべての primitive recursive functions を含む.

(2) $\alpha \geq 3$, F_α は $\bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta$ 内にある関数を dominate する.

(3) $\bigcup_{n < \omega} \bar{\mathcal{F}}_{\alpha+n}$ は substitution, primitive recursion で閉じている.

Theorem 10. 上のような条件 (i) ~ (iii) の下での system $\mathcal{S} = (S, <)$ に対して、 $<$ の order type Δ を ε -number とし、

ある $\beta < \alpha^\omega$ ($\alpha \geq \omega$) に対して、 $p \in \mathcal{F}_\beta$ とする.

但し、
$$\begin{cases} p(x, u) < x & , 0 < x < \alpha \text{ のとき} \\ p(x, u) = 0 & , \text{その他のとき} \end{cases}$$

このとき、 f が α -annihilation :

$$\begin{cases} f(0, u) = 0 \\ f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u) & , x > 0 \end{cases}$$

によって定義されているならば、

ある $k < \omega$, $r \in \mathcal{F}_{\alpha^k}$ が存在して、

$$f(x, u) < F_{\alpha^k}(r(x, u))$$

となる.

Proof. $p \in \mathcal{F}_\beta$ ($\beta \leq \alpha^\omega$) とする. α の Cantor normal form: $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot m_k$, $\alpha_1 > \dots > \alpha_k$, $0 < m_1, \dots, m_k < \omega$ とする.

$\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1$ とする. このとき, ある $1 < m < \omega$ が存在して, $p \in \mathcal{F}_{\gamma m}$.

$\delta = \gamma^{(m+1)}$ と置く. このとき, Lemma 9 より, F_δ は primitive recursive in p である関数を dominate する.

関数 $s(x, u, y) =$

$$\max [N(\delta \cdot p(p(x, u), u), \delta), N(\delta \cdot p(x, u), \delta \cdot p(p(x, u), u) + 1), \\ N(\delta \cdot \alpha, \delta \cdot p(x, u)), N(\alpha^{m+2}, \delta \cdot \alpha), p(x, u), u, y] \\ + y + 1$$

は primitive recursive in p であるので, ある $0 < b < \omega$ が存在して, $s(x, u, y) \leq F_\delta(\max(x, u, y)) + b$.

$r(x, u) = \max [N(\delta \cdot p(x, u), \delta), N(\delta \cdot x, \delta \cdot p(x, u) + 1), \\ N(\delta \cdot \alpha, \delta \cdot x), N(\alpha^{m+2}, \delta \cdot \alpha), x, u, b] + b$ と置く
と, $r \in \mathcal{F}_\delta$ であって,

$$r(p(x, u), u) + 1 = s(x, u, b)$$

$$\leq F_\delta(\max(x, u, b)) + b$$

$$\leq F_\delta(\max(x, u, b) + b)$$

$$\leq F_\delta(r(x, u)).$$

今, $f(x, u) \leq F_{\delta \cdot x}(r(x, u))$ である.

($\therefore$) x の transf. ind. に よる.

$$\textcircled{\ast} f(0, u) = 0 \leq F_{\sigma \cdot 0} (r(x, u)).$$

$$\textcircled{\ast} x > 0, f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u)$$

$$\leq 1 + F_{\sigma \cdot p(x, u)} (r(p(x, u), u))$$

$$\leq F_{\sigma \cdot p(x, u)} (r(p(x, u), u) + 1)$$

$$\leq F_{\sigma \cdot p(x, u)} (F_{\sigma} (r(x, u)))$$

($N(\sigma \cdot p(x, u), \sigma) \leq r(x, u)$ より Th. 7 を用いて.)

$$\leq F_{\sigma \cdot p(x, u)} (F_{\sigma \cdot p(x, u)} (r(x, u)))$$

$$\leq F_{\sigma \cdot p(x, u) + 1} (r(x, u))$$

($N(\sigma \cdot x, \sigma \cdot p(x, u) + 1) \leq r(x, u)$ より Th. 7 を用いて.)

$$\leq F_{\sigma \cdot x} (r(x, u)).$$

さらに. $N(\sigma \cdot d, \sigma \cdot x) \leq r(x, u)$ より.

$$F_{\sigma \cdot x} (r(x, u)) \leq F_{\sigma \cdot d} (r(x, u))$$

また. $N(\alpha^{m+2}, \sigma \cdot d) < r(x, u)$ より.

$$F_{\sigma \cdot d} (r(x, u)) < F_{\alpha^{m+2}} (r(x, u))$$

結局. $f(x, u) < F_{\alpha^k} (r(x, u))$, $k < \omega$.

Corollary 11. System $\mathcal{S}$ は Th. 10 の条件の下にある
ものとする. このとき. $\alpha \leq \omega$ とすると.

$$U(\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha^\omega} F_\beta$$

である.

したがって、 $\mathcal{S}$ の order-type を Δ , $\Delta > \Delta'$ を ε -number とすると、

$$\bigcup_{\alpha < \Delta'} U(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha < \Delta'} F_\alpha \text{ である.}$$

Proof. Lemma 9 と Theorem 10 より、 $\bigcup_{\beta < \omega} F_\beta$ はすべての primitive recursive function を含み、primitive recursion と α -annihilation に関して閉じている。だから Lemma 8 より結論を得る。

次に、System $\mathcal{S}$ が満たしている条件を更に強めて、(i)–(iii')に加えて、以下の(*)を採用して、 $\mathcal{S}$ が (i) (ii) (iii') (*) を満たしているものとする。

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \sigma \text{ に対して,} \\ (\sigma \cdot \beta + \alpha)[x] = \sigma \cdot \beta + \alpha[x], \\ \omega^{\alpha+1}[x] = \omega^\alpha \cdot x, \quad x < \omega. \end{array} \right.$$

Lemma 12. System $\mathcal{S}$ が上記の条件を満たしているとする。このとき、 $H_{\sigma \cdot \beta + \alpha}(x) = H_{\sigma \cdot \beta}(H_\alpha(x))$ である。

Proof. α に関する transf. ind. による。

Lemma 13 System $\mathcal{S}$ が上記の仮定を満たすとき、次が成り立つ.

$$(1) H_{\omega^m}(x+1) \geq F_m(x) + 1, \quad x \geq 1, \quad m < \omega.$$

$$(2) F_m(x+1) \geq H_{\omega^m}(x) + 1, \quad x \geq 1, \quad m < \omega.$$

(3) 関数 H_{ω^ω} はすべての primitive recursive function を dominate する.

(4) $\omega \leq \alpha$ とするとき、 $\bigcup_{\beta < \omega^\alpha + 1} \mathcal{A}_\beta$ は substitution で閉じている.

(5) $\omega \leq \alpha$ とするとき、 $\bigcup_{\beta < \omega^\alpha + \omega} \mathcal{A}_\beta$ は primitive recursion で閉じている.

Proof. (1), (2) : Ketonen - Solovay [5] p. 298 参照.

(3) は (1) より出る. (4) Wainer [10] p. 286 参照.

(5) f が $g_0, g_1 \in \bigcup_{\beta < \omega^\alpha + \omega} \mathcal{A}_\beta$ から primitive recursion

$$\begin{cases} f(0, u) = g_0(u) \\ f(x+1, u) = g_1(x+1, u, u) \end{cases}$$

で定義されているとする. だから、ある $c, n < \omega$ に対して、

$$g_0(u) \leq H_{\omega^\alpha + n}(\max(x, u, y) + c)$$

$$g_1(x, u, y) \leq H_{\omega^\alpha + n}(\max(x, u, y) + c).$$

このとき、 x の induction により、

$$f(x, u) \leq H_{\omega^\alpha + n}^{x+1}(\max(x, u) + c(x+1)) \text{ を示す.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\because) \circ f(0, u) = g_0(u) \leq H_{\omega^{\alpha+n}}(\max(u) + c) \\ \circ f(x+1, u) = g_1(x+1, u, f(x, u)) \\ \leq H_{\omega^{\alpha+n}}(\max(x+1, u, f(x, u)) + c) \\ \leq H_{\omega^{\alpha+n}}(H_{\omega^{\alpha+n}}^{x+1}(\max(x+1, u) + c(\alpha+1)) + c) \\ \leq H_{\omega^{\alpha+n}}^{x+2}(\max(x+1, u) + c(\alpha+2)) \end{array} \right.$$

次に $e = \max(x, u) + c(x+1)$ と置く。

$$H_{\omega^{\alpha+n}}^{x+1}(e) \leq H_{\omega^{\alpha+n}}^e(e) = H_{\omega^{\alpha+n+1}}(e)$$

(4)より、関数 $H_{\omega^{\alpha+n+1}}(e)$ は $H_{\omega^{\alpha+(n+2)}}$ によつて dominate される。結局、 $\bigcup_{\beta < \omega^{\alpha+\omega}} \mathcal{H}_\beta$ は primitive recursion によつて閉じている。

Theorem 14 上のような条件 (i) (ii) (iii) (*) の下での System $\mathcal{S} = (S, <)$ に対して、 $<$ の order type Δ を ε -number とし、ある $\beta < (\omega^\Delta)^\omega$ ($\Delta \geq \omega$) に対して、 $p \in \mathcal{H}_\beta$ とする。

$$\text{但し、} \begin{cases} p(x, u) < x, & 0 < x < \omega^\Delta \\ p(x, u) = 0 & \text{その他のとき。} \end{cases}$$

このとき、 f が ω^Δ -annihilation:

$$\begin{cases} f(0, u) = 0 \\ f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u), & x > 0 \end{cases}$$

によつて定義されているならば、ある $k < \omega$, $r \in \mathcal{H}_{\omega^{\Delta \cdot k}}$

が存在して、 $f(x, u) < H_{(\omega^\alpha)^k}(r(x, u))$ となる。

Proof. $p \in \mathcal{H}_\beta$, $\beta < (\omega^\alpha)^\omega$, $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \dots + \omega^{\alpha_e} \cdot m_e$
 $\alpha_1 > \dots > \alpha_e$, $0 < m_1, \dots, m_e < \omega$ とする。

$\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1$ と定義すると、ある $1 < m < \omega$ に対し、 $p \in \mathcal{H}_{\omega^{\gamma \cdot m}}$
 $\delta = (\omega^\gamma)^{(m+1)}$ とすると、Lemma 13 より、 H_δ は primitive
 recursive in p である関数 f を dominate するので、関数

$S(x, u, y) = \max \{ N(\delta \cdot p(x, u), \delta \cdot (p(p(x, u), u) + 1)),$
 $N(\delta \cdot \omega^\alpha, \delta \cdot p(x, u)), p(x, u), u, y \} + y + 1$ は

primitive recursive in p であるから、 $0 < b < \omega$ が存在
 して、 $S(x, u, y) \leq H_\delta(\max(x, u, y)) + b$

$r(x, u) = \max \{ N(\delta \cdot x, \delta \cdot (p(x, u) + 1)), N(\delta \cdot \omega^\alpha, \delta \cdot x),$
 $x, u, b \} + b$ と定義すると。

$r \in \mathcal{H}_\delta$ であって、さらに、

$$\begin{aligned} r(p(x, u), u) + 1 &= S(x, u, b) \\ &\leq H_\delta(\max(x, u, b)) + b \\ &\leq H_\delta(\max(x, u, b) + b) \\ &\leq H_\delta(r(x, u)). \end{aligned}$$

このとき、 $f(x, u) \leq H_{\delta \cdot x}(r(x, u))$ を x についての
 のくに関する transfinite induction で示す。

$$[(-)] \quad f(0, u) \leq H_{\delta \cdot 0}(r(x, u)).$$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad f(x, u) &= 1 + f(p(x, u), u) \\
 &\leq 1 + H_{\delta \cdot p(x, u)}(r(p(x, u), u)) \\
 &\leq H_{\delta \cdot p(x, u)}(r(p(x, u), u) + 1) \\
 &\leq H_{\delta \cdot p(x, u)}(H_{\delta}(r(x, u))) \\
 &= H_{\delta \cdot (p(x, u) + 1)}(r(x, u)) \\
 &\leq H_{\delta \cdot x}(r(x, u))
 \end{aligned}$$

さらに、 $H_{\delta \cdot x}(r(x, u)) \leq H_{\delta \cdot \omega^{\alpha}}(r(x, u))$

$$(\because N(\delta \cdot \omega^{\alpha}, \delta \cdot |x|) \leq r(x, u))$$

結局、 $\delta \cdot \omega^{\alpha} = \omega^{\delta \cdot (m+1) + \alpha} = \omega^{\delta(m+2)}$ より、

$$f(x, u) < H_{\omega^{\delta \cdot k}}(r(x, u)), \quad k < \omega.$$

Corollary 15 System $\mathcal{S}$ を Th. 14 の条件の下にあるものとする。このとき、 $\alpha \geq \omega$ として、

$$U(\omega^{\alpha}) \subseteq \bigcup_{\beta < (\omega^{\alpha})_{\omega}} \mathcal{H}_{\beta}$$

となる。したがって、 $\mathcal{S}$ の order-type を Δ 、 $\Delta > \Delta' \in \varepsilon$ -number とすると、 $\bigcup_{\alpha < \Delta'} U(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha < \Delta'} \mathcal{H}_{\alpha}$ である。

Proof. Lemma 13 と Theorem 14 より、 $\bigcup_{\beta < (\omega^{\alpha})_{\omega}} \mathcal{H}_{\beta}$ はすべての primitive recursive functions を含み、primitive recursion と、 ω^{α} -annihilation に関して閉じている。だから、Lemma 8 により、結論を得る。

§3 Enumeration hierarchy

Kleene に よる enumeration hierarchy $\{K_\alpha\}_{\alpha < \omega}$, $\{\bar{K}_\alpha\}_{\alpha < \omega}$ は 次の ように 定義 される. (Schwichtenberg [9], Rose [7] 参照)

$\Sigma = \{1, 2\}$ とする. sequence $z_m, \dots, z_0$ が x の modified binary representation とは.

$$z_i \in \Sigma,$$

$$x = 2^m \cdot z_m + 2^{m-1} \cdot z_{m-1} + \dots + 2z_1 + z_0.$$

0 の modified binary representation は empty sequence.

$$b(x) = z_m z_{m-1} \dots z_0 \in \Sigma^*, \quad \text{と する.}$$

Example $b(3) = 11$, $b(5) = 21$, $b(0) = \text{empty string}$.

$z_m z_{m-1} \dots z_0 \in \Sigma^*$ の ternary value は 次で 定義 される:

$$t(z_m z_{m-1} \dots z_0) = 3^m \cdot z_m + 3^{m-1} \cdot z_{m-1} + \dots + 3z_1 + z_0.$$

empty string の ternary value は 0.

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle = t(b(x_n) \circ b(x_{n-1}) \circ \dots \circ b(x_0))$$

Example $\langle 3, 0, 5 \rangle = t(b(5) \circ b(0) \circ b(3)) = t(210011) = 571.$

$(x)_i = x_i$ とする. 但し, $x = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$.

与えられた関数 h と, elementary recursive in h である関数 f に対して, index $\#_h(f)$ を f の生成に従って定義する.

(i) $f(x_1, \dots, x_p) = h(x_1, \dots, x_p)$ ならば $\#_h(f) = \langle 0, p \rangle$.

(ii) $f(x_1, \dots, x_n) = C_n^c(x_1, \dots, x_n) = c$ ならば $\#_h(f) = \langle 1, n, c \rangle$.

(iii) $f(x_1, \dots, x_n) = U_n^i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ ならば $\#_h(f) = \langle 2, n, i \rangle$.

(iv) $f(x, y) = x + y$ ならば $\#_h(f) = \langle 3, 2 \rangle$.

(v) $f(x, y) = x - y$ ならば $\#_h(f) = \langle 4, 2 \rangle$.

(vi) $f(x_1, \dots, x_n) = g(k_1(x_1, \dots, x_n), \dots, k_m(x_1, \dots, x_n))$

ならば, $\#_h(f) = \langle 5, n, \#_h(g), \#_h(k_1), \dots, \#_h(k_m) \rangle$.

(vii) $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < x_1} g(i, x_2, \dots, x_n)$ ならば, $\#_h(f) = \langle 6, n, \#_h(g) \rangle$.

(viii) $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < x_1} g(i, x_2, \dots, x_n)$ ならば, $\#_h(f) = \langle 7, n, \#_h(g) \rangle$.

そして次の関数 el^h を定義する.

$$el^h(x, y) = \begin{cases} f((y)_0, (y)_1, \dots, (y)_{n-1}), \\ \quad \begin{array}{l} x \text{ が "elementary recursive in } h \text{ である"} \\ \text{ある } f \text{ の index } x \text{ となるとき,} \\ \quad x = \#_h(f) \text{ のとき,} \end{array} \\ 0, \quad \text{その他のとき.} \end{cases}$$

注意: $eI^h(x, y)$ は primitive recursive in h であるが、elementary recursive in h ではない。

$$E_\alpha(x, y) = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \text{ のとき,} \\ eI^H(x, y), & \alpha \text{ は succ. 但し, } H = E_{\alpha-1} \\ eI^H((x)_1, y), & \alpha \text{ は limit 但し} \\ & H = E_\alpha[(x)_0] \end{cases}$$

と定義して、

$\mathcal{K}_\alpha$ は elementary recursive in E_α である関数全体、

$\overline{\mathcal{K}}_\alpha$ は elementary recursive in E_β ($\beta \leq \alpha$) である関数全体と定義する。

このとき、Zemke [11] により、次のことが解かる。

Theorem 16 (Zemke) System $\mathcal{S} = (S, <)$ が、

p.r.-regulated であれば、

$$\overline{\mathcal{F}}_{2+\alpha} = \mathcal{F}_{2+\alpha} = \overline{\mathcal{K}}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha \quad (\alpha \in S)$$

が成り立つ。

最後に次の2つの考察を行なう。

考察1. 我々の Section 2 での Th. 10, Th. 14 では、fundamental sequence の system $\mathcal{S}$ の条件として、

δ は LW または nice であって、関数
 $N(\alpha, \beta) = \mu n (\alpha \xrightarrow{n} \beta)$
 が primitive recursive である

ことが必要であつた。また、Th. 16 では、p.r.-regulated
 という条件から、norm $N(\alpha)$ が primitive recursive であ
 ることが必要であつた。

今、Section II の Lemmata 2, 4 より、(1)-built-up であ
 り、そこから誘導される norm $N(\alpha) = |\{\beta \mid \alpha \rightarrow \beta\}|$
 が primitive recursive であれば、Th. 10 と Th. 16 の要請を
 同時に満たすことが出来るが、そのことは、単なる十分条件
 にすぎないので、Th. 10 と Th. 16 を同時に成り立たせる
 ようなより良い条件を定めることは今後の課題であらう。

考察 2. Ketonen - Solovay [5] は Paris - Harrington
 Principle から定義される関数族と ϵ_0 までの fast-growing
 hierarchy $\{f_\alpha \mid \alpha < \epsilon_0\}$ との関係を示して、Paris - Harrington
 Principle の PA (first order Peano arithmetic) での証明不
 可能性を示した。この関係を一般化する際、より一般の funda-
 mental sequence の system に対する性質を調べる必要がある。

下田 [14] は Γ_0 までの fundamental sequence の system

を詳しく調べて、その system が (1)-built-up であること、さらに、 $N(\alpha, \beta) = \mu n (\alpha \xrightarrow{n} \beta)$ が primitive recursive であることを示している。

この結果によって我々の定理が、具体的な Γ_0 までの fundamental sequence の system に対して適用されることが保証される。

B I B L I O G R A P H Y

- [11] Aoyama K., Kadota N., A note on built-upness, manuscript.
 - [12] Dennis-Jones, E.C., Wainer, S.S., Subrecursive hierarchies via direct limits, Lecture Notes in Math. 1104(1984), 117-128.
 - [13] Kadota N., Aoyama K., A note on Schmidt's built-up systems of fundamental sequences, RIMS Kokyuroku, 644(1988), 30-43.
 - [14] Kadota N., Aoyama K., Some extensions of built-upness on systems of fundamental sequences, manuscript.
 - [15] Ketonen, J., Solovay, R., Rapidly growing Ramsey functions, Annals of Mathematics, 113(1981), 267-314.
 - [16] Löb, M.H., Wainer, S.S., Hierarchy of number theoretic functions I, II, Arch. math. Logik, 13(1970), 39-51, 97-113.
 - [17] Rose, H.E., Subrecursion : functions and hierarchies, Clarendon Press, Oxford, 1984.
 - [18] Schmidt, D., Built-up systems of fundamental sequences and hierarchies of number theoretic functions, Arch. math. Logik 18(1976), 47-53. Postscript 18(1977), 145-146.
 - [19] Schwichtenberg, H., Eine Klassifikation der $\mathcal{E}_0$ -rekursiven Funktionen, Zeitschr. f. math. Logik, 17(1971), 61-74.
 - [10] Wainer, S.S., Ordinal recursion and refinement of the extended Grzegorzczuk hierarchy, JSL 37(1972), 281-292.
 - [11] Zemke, F., P.r.-regulated systems of notation and the subrecursive hierarchy equivalence property, Trans. of AMS, 234(1977), 89-118.
- provably recursive function に属するもの ↓-----
- [12] Kino A., On provably recursive functions and ordinal recursive functions, J. Math. Soc. Japan, 29(1968), 456-476.
 - [13] Takeuti G., Proof theory, 2nd ed. North-Holland, 1987.

----- fundamental sequences の system に 属するもの ↓-----

[14] Shimoda M., Elementary properties of a system of fundamental sequences for Γ_0 , manuscript.

[15] Takeuti G., Yasugi M., Fundamental sequences of ordinal diagrams, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 25(1976), 1-80.