

野海・山田方程式系の WKB 解析に向けて

近畿大理工 青木 貴史 (AOKI, Takashi)
 京大数理研 河合 隆裕 (KAWAI, Takahiro)
 京大理 小池 達也 (KOIKE, Tatsuya)
 京大数理研 竹井 義次 (TAKEI, Yoshitsugu)

Painlevé 方程式のもつ対称性を考察する中から, 野海正俊・山田泰彦(神戸大自然科学)の両氏は, $A_l^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性をもった Painlevé 方程式の高階版と考えられる方程式系を発見した(cf. [NY1], [NY2]). 本稿では, Painlevé 方程式に対する WKB 解析(cf. [KT1], [AKT], [KT2])をより広いクラスの非線型方程式に一般化すべく, この「野海・山田方程式系」に対する WKB 解析の可能性について論じてみたい.

「野海・山田方程式系」(但し, WKB 解析を展開するために large parameter η を然るべく導入したもの)の具体形は次の通りである. まず $A_{2m}^{(1)}$ 型(i.e., $l = 2m$)の場合は

$$(1) \quad \frac{df_j}{dt} = \eta \left[f_j(f_{j+1} - f_{j+2} + \cdots - f_{j+2m}) + \alpha_j \right] \quad (j = 0, 1, \dots, 2m).$$

ここで α_j は $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{2m} = \eta^{-1}$ を満たすパラメータ, また f_j は $f_0 + \cdots + f_{2m} = t$ と規格化されているものとする. なお, f_j, α_j 等は index j に関して周期的(周期は $n = l + 1$)であると約束する. 一方 $A_{2m+1}^{(1)}$ 型(i.e., $l = 2m + 1$)の場合は

$$(2) \quad \frac{t}{2} \frac{df_j}{dt} = \eta \left[f_j \left(\sum_{1 \leq r \leq s \leq m} f_{j-1+2r} f_{j+2s} - \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} f_{j+2r} f_{j+1+2s} \right) + \frac{t}{2} \alpha_j \right] \\ (j = 0, 1, \dots, 2m + 1).$$

このときは $\alpha_0 + \alpha_2 + \cdots = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots = \eta^{-1}/2$, $f_0 + f_2 + \cdots = f_1 + f_3 + \cdots = t/2$ により規格化しておく. ($l = 2m$ の場合と同様に, index に対する周期性も仮定する.) いずれの場合も, これらの非線型方程式は, サイズが $n \times n$ ($n = l + 1$) の次の線型方程式系の両立条件(可積分条件)として現れる.

$$(3) \quad x \frac{\partial}{\partial x} \psi = \eta A \psi,$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi = \eta B \psi,$$

但し

$$(5) \quad A = - \begin{pmatrix} \epsilon_1 & f_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \epsilon_{n-2} & f_{n-2} & 1 \\ x & & \epsilon_{n-1} & f_{n-1} & \\ x f_0 & x & & \epsilon_n & \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} q_1 & -1 & & & \\ & q_2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & q_{n-1} & -1 \\ -x & & & & q_n \end{pmatrix}.$$

ここで ϵ_j は $\alpha_j = \epsilon_j - \epsilon_{j+1} + \eta^{-1}\delta_{j0}$, $\sum \epsilon_j = 0$ により定まるパラメータ. また $q_j = q_j(t)$ は, $q_{j+2} - q_j = f_j - f_{j+1}$, $\sum q_j = -t/2$ を満たす t の関数である. より具体的には, $l = 2m$ の場合は

$$(6) \quad \begin{aligned} q_j &= f_{j+1} + f_{j+3} + \cdots + f_{j+2m-1} - \frac{t}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(f_j - f_{j+1} + f_{j+2} - \cdots + f_{j+2m}), \end{aligned}$$

また $l = 2m + 1$ の場合は

$$(7) \quad \begin{aligned} q_j &= \frac{2}{t} \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} f_{j-1+2r} f_{j+2s} - \frac{t}{4} \\ &= -\frac{1}{t} \left[\sum_{r=0 \text{ or } 0 \leq s < r \leq m} f_{j-1+2r} f_{j+2s} - \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} f_{j-1+2r} f_{j+2s} \right] \end{aligned}$$

と定める. この線型方程式系 (3)-(4) に対する WKB 解析を用いて, 非線型の野海・山田方程式系を論じるのが目標である.

Painlevé 方程式の場合にも, モノドロミー保存変形を通じて (サイズが 2×2 の) 線型方程式系が付随していた. Painlevé 方程式に対する WKB 解析が成功した一つの (そして, おそらく最大の) 理由は, 付随する線型方程式系の turning point や Stokes curve といった「Stokes 幾何」が, Painlevé 方程式のそれと密接に関係していたことである. 以下では, 野海・山田方程式系に対する WKB 解析の可能性を探るために, 野海・山田方程式系の Stokes 幾何を考察する.

1 階線型方程式系の場合, turning point や Stokes curve はその係数行列 (正確には, η に関して最高次の部分) の固有値を用いて次のように記述される.

turning point $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 固有値が重根となる点,

$$\text{Stokes curve} \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{Im} \left(\int_{x_0}^x (\lambda_j(x) - \lambda_k(x)) dx \right) = 0.$$

(ここで λ_j, λ_k は turning point $x = x_0$ で重なる固有値を表す.) 他方, 非線型方程式系の turning point や Stokes curve は, 特異摂動的に定まる (η^{-1} に関する) 形式巾級数解での線型化方程式のそれとして定義される. 野海・山田方程式系 (1) あるいは (2) の場合, $f_j = f_{j,0}(t) + \eta^{-1}f_{j,1}(t) + \cdots$ という未知関数の巾級数展開を方程式に代入することにより

$$(8) \quad \hat{f}_j = \hat{f}_j(t, \eta) = \hat{f}_{j,0}(t) + \eta^{-1}\hat{f}_{j,1}(t) + \cdots$$

という形式巾級数解が得られ, この形式解 $\hat{f}_j$ での (1) あるいは (2) の線型化方程式の (上述の意味での) turning point や Stokes curve が, 野海・山田方程式系の Stokes 幾何を与える訳である.

このとき, 野海・山田方程式系の Stokes 幾何と, それに付随する線型方程式系 (3)-(4) (但し, 野海・山田方程式系の形式解 $\hat{f}_j$ を係数に代入したもの) の Stokes 幾何に関して, 次が成立する.

Proposition 1 線型方程式系 (3) および (4) の係数 A, B に, 野海・山田方程式系の形式解 $\hat{f}_j$ を代入したものの (η に関する) 最高次の部分をそれぞれ $A_0 = A_0(x, t)$ および $B_0 = B_0(x, t)$, また A_0, B_0 の固有多項式の判別式をそれぞれ $\Delta_{A_0}(x, t)$, $\Delta_{B_0}(x, t)$ で表すとき,

$$(9) \quad \Delta_{A_0}(x, t) = \Delta_{B_0}(x, t) D(x, t)^2$$

が成立する. ここで $D(x, t)$ は, $D(x, t) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\mu_j + \mu_k)$ (μ_j は B_0 の固有値) で定義される. ($D(x, t)$ は x に関しては m 次の多項式となる.) 特に, 線型方程式系 (3) の turning point の全体は, m 個の double turning point ($D(x, t)$ の零点) から成る部分と, (4) の turning point ($(n-1)$ 個存在し, 一般には simple) との和集合になる.

Proposition 2 線型方程式系 (3) の固有値を $\lambda_j(x, t)$, (4) の固有値を $\mu_j(x, t)$ とすれば,

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \lambda_j(x, t) = x \frac{\partial}{\partial x} \mu_j(x, t).$$

Proposition 3 野海・山田方程式系の形式解 $\hat{f}_j$ における線型化方程式の係数行列の (η に関する) 最高次部分を $C_0 = C_0(t)$ で表す. このとき, C_0 の固有多項式と B_0 の固有多項式との間に, 次の関係式が成立する.

$$(11) \quad \det(\nu - C_0) = \begin{cases} 2^n g_{\text{odd}}(\mu) \Big|_{\mu=\nu/2} & (l = 2m \text{ のとき}), \\ 2^n (\mu \tilde{g}_{\text{odd}}(\mu)) \Big|_{\mu=\nu/2} & (l = 2m + 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

但し $g_{\text{odd}}(\mu)$ は B_0 の固有多項式 $\det(\mu - B_0)$ の μ に関する奇数次部分, また $\tilde{g}_{\text{odd}}(\mu)$ は $g_{\text{odd}}(\mu)$ をその最高次の係数で割って monic にした多項式 (従って $l = 2m$ のときは $\tilde{g}_{\text{odd}} = g_{\text{odd}}$) である.

Proposition 3 より, 特に C_0 の固有多項式 $\det(\nu - C_0)$ は, ある m 次多項式 f を用いて $\nu f(\nu^2)$ ($l = 2m$ のとき) あるいは $\nu^2 f(\nu^2)$ ($l = 2m + 1$ のとき) という形をしていることがわかる. 従って, 野海・山田方程式系の turning point (すなわち C_0 の固有値が重根となる点) には, f の定数項が消えるタイプ (“type (I)” と呼ぶ) と, f の判別式が消えるタイプ (“type (II)” と呼ぶ) の 2 つの種類が存在する. このとき, Proposition 1 から Proposition 3 を組み合わせることにより, 野海・山田方程式系のそれぞれのタイプの turning point に対して次を示すことができる.

Proposition 4-I $t = t_0$ を野海・山田方程式系の type (I) の turning point とす

(i) $t = t_0$ においては, (3) のある double turning point $x = x^\dagger(t)$ と, それとは別の simple turning point $x = x^\ddagger(t)$ が合流する. しかも, $x = x^\dagger(t)$ および $x = x^\ddagger(t)$ において重なる固有値の index の組 (j_0, j_1) は両者で共通である.

(ii) さらに

$$(12) \quad \frac{1}{2} \int_{t^\dagger}^t (\nu_{k_0}(t) - \nu_{k_1}(t)) dt = \int_{x^\dagger(t)}^{x^\ddagger(t)} (\lambda_{j_0}(x, t) - \lambda_{j_1}(x, t)) \frac{dx}{x}$$

が成立する. ここで ν_{k_0} と ν_{k_1} は, $t = t_0$ で共に 0 となるような C_0 の固有値である. 特に, 野海・山田方程式の type (I) の turning point から出る Stokes curve 上の点では, 線型方程式系 (3) の double turning point $x = x^\dagger(t)$ と simple turning point $x = x^\ddagger(t)$ が Stokes curve で結ばれる.

Proposition 4-II $t = t_0$ を野海・山田方程式系の type (II) の turning point とするとき,

(i) $t = t_0$ においては, (3) の 2 つの異なる double turning point $x = x^\dagger(t)$ および $x = x^\ddagger(t)$ が合流する. しかも, $x = x^\dagger(t)$ および $x = x^\ddagger(t)$ において重なる固有値の index の組 (j_0, j_1) は両者で共通である.

(ii) さらに

$$(13) \quad \begin{aligned} \int_{t^\dagger}^t (\nu_{k_0}^+(t) - \nu_{k_1}^+(t)) dt &= - \int_{t^\dagger}^t (\nu_{k_0}^-(t) - \nu_{k_1}^-(t)) dt \\ &= \int_{x^\dagger(t)}^{x^\ddagger(t)} (\lambda_{j_0}(x, t) - \lambda_{j_1}(x, t)) \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

が成立する. ここで $\nu_{k_0}^\pm$ と $\nu_{k_1}^\pm$ は, $\nu_{k_l}^- = -\nu_{k_l}^+$ および $\nu_{k_0}^+(t_0) = \nu_{k_1}^+(t_0)$ を満たすような C_0 の固有値である. 特に, 野海・山田方程式の type (II) の turning point から出る Stokes curve 上の点では, 線型方程式系 (3) の 2 つの double turning point $x = x^\dagger(t)$ と $x = x^\ddagger(t)$ が Stokes curve で結ばれる.

これらの結果は, Stokes 幾何のレベルでは Painlevé 方程式のときとほぼ同様の状況が野海・山田方程式系の場合にも成立していることを意味しており, 野海・山田方程式系に対する WKB 解析の成功の可能性を強く示唆するものと考えられる.

References

- [AKT] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. II, *Structure of Solutions of Differential Equations*, World Scientific, 1996, pp. 1–49.
- [KT1] T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I, *Adv. Math.*, **118**(1996), 1–33.

- [KT2] ———: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III, *Adv. Math.*, **134**(1998), 178–218.
- [NY1] M. Noumi and Y. Yamada: Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, *Funkcial Ekvac.*, **41**(1998), 483–503.
- [NY2] ———: Symmetry in Painlevé equations, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 245–260.