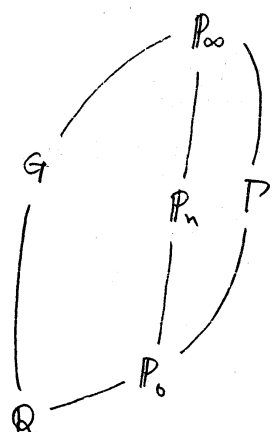


p 進 L 関数入門Ⅲ
($\mathbb{Z}_p$ -拡大と不変量)

山形大 理 木田 祐司

この小文では、 $\mathbb{Z}_p$ -拡大の理論の基本定理を概説する。本格的に勉強するには、S. Lang: *Cyclotomic Fields* (Springer) の chapter 5 を読みたい。なお講演では多きは省略したが、書いておく事にする。

§ 1. p : 素数, $g = 4$ (if $p = 2$) or p (if $p \neq 2$).
 $\zeta_m = \exp(2\pi i/m)$ とし, $\mathbb{P}_n = \mathbb{Q}(\zeta_{gp^n})$ $n \geq 0$,
 $\mathbb{P}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n$ とする。



$$\text{田分体論より} \quad \left(\begin{array}{c} \sigma \\ \zeta_{gp^n} = \zeta_{gp^n}^a \\ \hline a \bmod gp^n \end{array} \right)$$

$$\text{Gal}(\mathbb{P}_n/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/gp^n\mathbb{Z})^\times$$

$$\downarrow \text{制限} \quad \hookrightarrow \quad \downarrow \text{自然}$$

$$\text{Gal}(\mathbb{P}_{n-1}/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/gp^{n-1}\mathbb{Z})^\times$$

に おい て projective limit と して

$$G \simeq \mathbb{Z}_p^\times$$

この部分群として $P \simeq 1 + \mathfrak{p} \mathbb{Z}_p$ (右辺は $\mathbb{Z}_p$ (の加法群) に位相同型。ここを一般に

定義 K/k を有限次代数体 k の Galois 拡大とする時、これが $\mathbb{Z}_p$ -拡大であるとは

$$\text{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}_p \text{ (の加法群) (位相同型)}$$

となる事。

この時は $\mathbb{Z}_p$ の閉部分群が 0 と $p^n \mathbb{Z}_p$ ($n \geq 0$) のみだから

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}_p & \supset & p \mathbb{Z}_p & \supset & \cdots & \supset & p^n \mathbb{Z}_p & \supset & \cdots & \supset & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\ k & \subset & k_1 & \subset & \cdots & \subset & k_n & \subset & \cdots & \subset & K = \bigcup_{n=0}^{\infty} k_n \end{array} \quad \text{に対応して}$$

と中間体が一系列に並ぶ。 K の他はすべて k 上有限次。

例1 $\mathbb{P}_{\infty}/\mathbb{P}_0$ が典型的な $\mathbb{Z}_p$ -拡大。

例2 $G \simeq \mathbb{Z}_p^{\times} = (1 + \mathfrak{p} \mathbb{Z}_p) \times W$, $W \simeq (\mathbb{Z}/\mathfrak{p} \mathbb{Z})^{\times}$ より

W に対応する G の部分群 (Δ と書く事が多い) の固定体を $\mathbb{Q}_{\infty}$ とすると $\mathbb{Q}_{\infty}/\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}_p$ -拡大。しかも $\mathbb{Q}$ 上の唯一の $\mathbb{Z}_p$ -拡大。

例3 k を有限次代数体とすると, $k \cdot \mathbb{Q}_{\infty}/k$ は $\mathbb{Z}_p$ -拡大。これを k の cyclotomic (or basic) $\mathbb{Z}_p$ -拡大と言う。有限体上の一変数代数函数体の理論との類似という点ではこれが最も重要な $\mathbb{Z}_p$ -拡大。

例4 k が non-totally real ならば non-cyclotomic な $\mathbb{Z}_p$ -拡大が k 上に存在する。

§ 2. $\mathbb{Z}_p$ -拡大 K/k で何を調べると言うか

問 1 k_n の p -class group $A(k_n)$ は $n \rightarrow \infty$ でどう変化するか? 特に位数は?

一般の $\mathbb{Z}_p$ -拡大を考えると, あまり本質的でない部分で面倒があるので, $\mathbb{P}_\infty/\mathbb{P}_0$ についてのみ調べる。

L_n : $\mathbb{P}_n$ 上の最大不分裂 abel p -拡大 について

$$A(\mathbb{P}_n) \cong \text{Gal}(L_n/\mathbb{P}_n) \quad (\text{Artin map})$$

$$\downarrow \text{norm} \quad \supset \quad \downarrow \text{制限}$$

$$A(\mathbb{P}_{n-1}) \cong \text{Gal}(L_{n-1}/\mathbb{P}_{n-1})$$

において projective limit とすれば

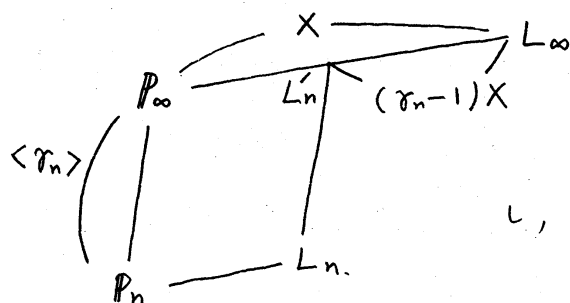
$$\textcircled{*} \quad X \cong \text{Gal}(L_\infty/\mathbb{P}_\infty)$$

ここに $L_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ は $\mathbb{P}_\infty$ の最大不分裂 abel p -拡大。

Γ は左辺に自然に作用する。右辺には $\gamma \in \Gamma$ に対して

$u_\gamma \in \text{Gal}(L_\infty/\mathbb{P}_0)$ と $u_\gamma \bmod \text{Gal}(L_\infty/\mathbb{P}_\infty) = \gamma$ なるようにとり $a \in$ 右辺に対して $\gamma \cdot a \stackrel{\text{def.}}{=} u_\gamma \cdot a \cdot u_\gamma^{-1}$ とする。

そして上の同型 $\textcircled{*}$ は Γ の作用も含めた同型。以下両者を区別しない。又、 Γ は乗法的に X は加法的に記す。



$\gamma_0 \in \Gamma = \text{Gal}(\mathbb{P}_\infty/\mathbb{P}_0)$ の生成元と

し, $\gamma_n = \gamma_0^{p^n}$ とする。

ここで $\text{Gal}(L_\infty/P_n)$ の交換子群は $(\gamma_n - 1)X$ となる。
 $P_n \in p \in \mathcal{P}$ する P_n の素ideal とすると、これはただ一つで、
 これだけが P_∞/P_n で分岐する。従って L_n は L'_n/P_n における
 P_n の惰性体。 P_n の分岐の状態を見れば

$$X/(\gamma_n - 1)X \cong \text{Gal}(L_n/P_n) (\cong A(P_n))$$

よって問1は次の事がわかれば良い。

問2 $\mathbb{Z}_p[[P]]$ -module としての X の構造は？

Iwasawa (Bull. A.M.S. 65(1959)) はこの方針。

Serre (Sem. Bourbaki 174(1958/59)) はもう一つひねり。
 P の topological generator $\gamma_0 \in 1$ を fix して $\gamma_0 = 1+T$
 とおく。若干の議論により X は $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ -module と
 みなせる。

問3 Λ -module としての X の構造は？

。 Λ の構造: local ring の maximal ideal $\mathfrak{M} = (p, T)$ は高
 1 2。高1 1の素ideal は単項で (p) の他は既約な

distinguished polynomial で生成される。ここに distinguished
 polynomial とは $\pi(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i$, $a_i \in P\mathbb{Z}_p$ $0 \leq i \leq d-1$

なるもので $\mathbb{Z}_p[[T]]/(\pi(T)) \cong \mathbb{Z}_p[[T]]/(\pi(T))$ なる事
 が特徴。abel 群としては $\Lambda/(p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\infty$,

$\Lambda/(\pi(T)) \cong \mathbb{Z}_p^d$ と全く type が違う事に注意。

中山の補題により X は有限生成 Λ -module となる。
 Λ -module の基本定理 (see ① フルバキ「可換代数」+ 前記の
 Serre の論文. 又は ② 冒頭に掲げた Lang の本) より X は

$$E(X) = \Lambda^{m_0} \oplus \Lambda/(\pi_1^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \Lambda/(\pi_s^{m_s})$$

(ここに π_i は p 又は既約な distinguished polynomial) 型の
 Λ -module に pseudo (quasi)-isomorphic となる。

つまり Λ -hom. $\rho: X \rightarrow E(X)$ に対して $\text{Ker } \rho, \text{Coker } \rho$
 が共に位数有限なものがある。

(注 単因子論の modification と見られる。実際 ② の証明は係数
 の多項式環上の module における証明と同様なもの。)

すると $E = E(X)$ への T の作用は具体的だから $p^{e'_n} =$
 $|E/(\gamma_n - 1)E|$ は計算出来る。(recall: $\gamma_n = (1+T)^{p^n}$)

まず、有限となければならぬので $m_0 = 0$ 。そして

$$f = \prod_{i=1}^s \pi_i^{m_i} = p^\mu (T^\lambda + \cdots) \quad \text{とすると}$$

$$e'_n = \lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \text{constant} \quad \text{for all } n \gg 0$$

となる。これから $p^{e_n} = |X/(\gamma_n - 1)X|$ を求める。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\gamma_n - 1)X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/(\gamma_n - 1)X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \rho'_n & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho''_n \end{array}$$

$$0 \longrightarrow (\gamma_n - 1)E \longrightarrow E \longrightarrow E/(\gamma_n - 1)E \longrightarrow 0$$

(ここで ρ'_n, ρ''_n は ρ から自然に induce されるもの)

なる図式において $|\text{Image } \rho''_n|$ を計算すれば

$|X/(r_n-1)X|/|Ker \rho_n''| = |E/(r_n-1)E|/|Coker \rho_n''|$
 $\therefore |Coker \rho_n''|$ は $n \rightarrow \infty$ で単調増加、しかし $\leq |Coker \rho|$ 。又、 $|Ker \rho_n''|$ は有限かつ単調減少。
 よって十分大きな n でどちらも一定の値をとる。

$$\begin{aligned}
 \therefore e_n &= e_n' + \text{constant} \quad \text{for all } n \gg 0 \\
 &= \lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \text{constant} \quad \text{for all } n \gg 0.
 \end{aligned}$$

本質的に同様な議論により、一般の $\mathbb{Z}_p$ -拡大について

$\mathbb{Z}_p$ -拡大の基本定理

• $K/K : \mathbb{Z}_p$ -拡大

• $X = \varprojlim A(k_n)$ ただし $A(k_n) \xrightarrow{\text{norm}} A(k_{n-1})$ 。

$\text{Gal}(K/K)$ の生成元 γ_0 をとり $\gamma_0 = 1+T$ とおけば
 K/K , γ_0 によって定まる $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ -module $E(X)$
 $= \Lambda/(\pi_1^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \Lambda/(\pi_s^{m_s})$ が存在して、

(π_i は p を既約な distinguished polynomial)

X はこれに pseudo-isomorphic となる。更に、

$$\begin{aligned}
 f &= \prod_{i=1}^s \pi_i^{m_i} = p^\mu (T^\lambda + \cdots) \\
 p^{e_n} &= |A(k_n)|
 \end{aligned}$$

とすると

$$e_n = \lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \text{constant} \quad \text{for all } n \gg 0$$

が成立する。

定義 λ, μ は定まる非負整数 $\lambda, \mu \in K/k$ の岩沢不変量 (Iwasawa invariants) と言い $\lambda(K/k), \mu(K/k)$ と記す。en の式から γ_0 のとり方に関係しない事がわかる。

これを調べたい。より詳しく

問4 多項式 f はどんなものか? (ただし f は K/k のみならず γ_0 のとり方にも関係する。)

§3 K/k を絶対abel体 k の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -拡大とし, $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, $\hat{G} = \text{Hom}(G, \overline{\mathbb{Q}_p})$ とする。

X と $E(X)$ に $\bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}$ を作用させると

$$V = X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}_p} \simeq \overline{\mathbb{Q}_p}[T]/(\pi_1^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \overline{\mathbb{Q}_p}[T]/(\pi_s^{m_s})$$

(有限位数の部分は消えて) $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上の vector spaces としての同型を得る。 π_i の中に p があれば, π_i も消えるが,

Ferrero-Washington の定理より, π_i は起こらない。そして $f = \prod_{i=1}^s \pi_i^{m_i}$ は V の線型変換としての $T = \gamma_0 - 1$ の特性多項式に他ならない。これを分解する。

$K \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$ の場合だけを考えておけば十分。 π の時は自然に $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}_\infty) \simeq G$ かつ X は $\mathbb{Z}_p[G]$ -module でもある。よって V は $\overline{\mathbb{Q}_p}[G]$ -module。ここから

$$1 = \sum_{\chi \in \hat{G}} e_\chi \quad , \quad e_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g$$

は $\overline{\mathbb{Q}_p}[G]$ における 1 の直交中等元への分解。従って

$$V = \bigoplus_x e_x V \quad \text{と分解されることが、} G \text{ と } \Gamma \text{ は可換ゆえ、}$$

各 $e_x V$ は T -invariant。(又、 $e_x V$ は $\{v \in V \mid g v = \chi(g) v \text{ for all } g \in G\} = V_x$ に等しい。)

結局次の問に達したわけである。

問 5 $e_x V$ の線型変換 $\gamma_0 - 1$ の特性多項式は何か？

(ただし、 K/k , γ_0 , χ のように関係する。)

注 この辺は Greenberg による Iwasawa の main conjecture の formulation (Nagoya Math. J. 56 (1974), 67 (1977)) を参照の事。

付記 岩沢不変量に関する open questions をいくつか。

K/k を cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -拡大とする。

Q1. $\mu(K/k) = 0$? (K が abel/ $\mathbb{Q}$ なら yes, by Ferrero-Washington) — Iwasawa の予想 —

Q2. K が totally real ならば更に $\lambda(K/k) = 0$? (全然わかっていない) — Iwasawa-Greenberg の予想 —

Q3. K を固定して p を動かす時, λ は bounded ? (全然わかっていない) — Ferrero の予想 —

Q4. 絶対 abel 体の cyclotomic $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_r}$ -拡大 ($p_1, \dots, p_r$ は異なる素数) における類数の p_i -part, および non p_i -part を調べよ。 — 小生の問 —