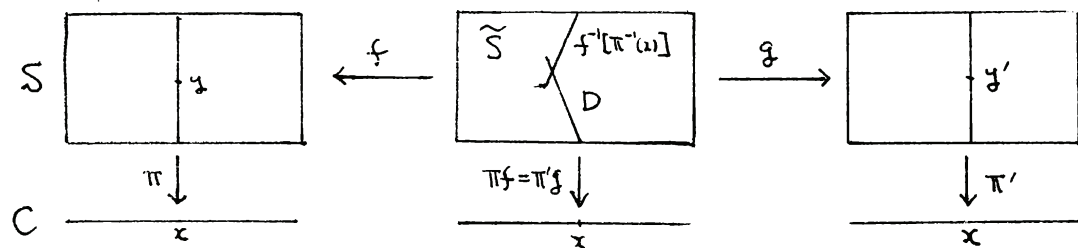


Elementary transformation の一般化

京大・理 丸山正樹

非特異代数曲面 S から非特異射影的曲線 C への morphism π が存在して, $\forall x \in C, \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1$ となるとき, S は C 上の線織面であるという。線織面を研究する基本的な導具に elementary transformation がある [N₁]。 S 上の一点 y と取り, $x = \pi(y)$ とおく。 S の y での blowing-up $f: \tilde{S} \rightarrow S$ を考えると, $\pi^{-1}(x)$ の f による proper transform $f^{-1}[\pi^{-1}(x)]$ はオノ種例外曲線になり contract できる。 $g: \tilde{S} \rightarrow S'$ をその contraction とすれば, C への morphism $\pi': S' \rightarrow C$ で, $\pi f = \pi' g$ となるものがある, $S - \pi^{-1}(x)$ は $S' - \pi'^{-1}(x)$ と同型であり, $\pi'^{-1}(x)$ は f の例外曲線の g による像であるから, $\mathbb{P}^1$ に同型である。従って, S' も C 上の線織面である:



$$y' = g(f^{-1}[\pi^{-1}(x)]), \quad D = f^{-1}(y), \quad g(D) = \pi'^{-1}(x)$$

定義 1. 双有理写像 $g^{-1}: S \rightarrow S'$ を y での elementary transformation と呼び, elm_y で表わす: $S' = \text{elm}_y(S)$.

Taen の定理により, C 上に階数 2 のベクトル束 E が存在して, S は C 上 $\mathbb{P}(E)$ と同型である。 $\mathbb{P}(E) = S$ 上の点 y を与えることと, 全射, $E \xrightarrow{\varphi} k(x)$ を与えることとは同値である。次は容易に証明できる。

命題 2. $E' = \ker(\varphi)$ とおけば, S' は C 上 $\mathbb{P}(E')$ に同型である。

上の命題は " E' もベクトル束になる" ということも含んでいる。もっとも, この場合は E' が torsion free であり, C が非特異代数曲線であることから明らかである。さて, 上の手順を "あるベクトル束から別のベクトル束を作る" ものと考えて, 一般化を考えると次のようになる。 X は局所 noetherian scheme とし, T は X の closed subscheme で, そのイデアル I_T が X 上の Cartier divisor となるものとする。 X 上のベクトル束 (locally free coherent sheaf) E , T 上のベクトル束 F , $\mathcal{O}_X$ -加群としての準同型 $\varphi: E \rightarrow F$ が与えられているとすると, 次の命題が容易に証明できる。

命題 3. φ が全射ならば, $E' = \ker(\varphi)$ は X 上のベクトル束で

ある。

$\varphi: E \rightarrow F$ が全射であるとき、次のような可換、完全図式 (display of φ) を得る

$$(D-4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & E|_T & \xrightarrow{\varphi|_T} & F \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \psi & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\varphi} & F \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & E(-T) = E(-T) & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

F' は T 上のベクトル束になり、 ψ は全射である。従って、
 もとの E は、 $E' = \ker(\varphi)$ から命題 3 と同じ手順で得られること
 になる。

定義 5. 命題 3 における手順で、 (E, F) からベクトル束 $E' = \ker(\varphi)$ を得る手続を elementary transformation と言ひ、 $E' = \text{elm}_F(E)$ と書く。この記号で、 $E(-T) = \text{elm}_F(E')$ である。

この定義における elementary transformation の blowing-up, blowing-down による解釈は次の通りである。 $\varphi: E \rightarrow F$ が全射であ

ると, φ は $P(F)$ から $P(E)$ への closed immersion を導く. これによ
り, $P(F)$ を $P(E)$ の closed subscheme とみなす. 同様に, $P(F')$ は
 $P(E')$ の closed subscheme である.

定理 6 [M₁, Th. 1.1]. $f: \tilde{P} \rightarrow P(E)$, $g: \tilde{P}' \rightarrow P(E')$ はそれぞれ
 $P(F)$, $P(F')$ に沿った blowing-up であるとする. $\tilde{P}$ と $\tilde{P}'$ は
 X -scheme として同型であり, f の例外因子は, この同型で,
 $g^{-1}[P(E)_{\mathcal{L}}]$ に一致し, g のそれは $f^{-1}[P(E)_{\mathcal{L}}]$ に一致する.

定義 7. 定理 6 の記号で, 双有理写像 $gf^{-1}: P(E) \rightarrow P(E')$ を
 $P(F)$ に沿った elementary transformation と言い, $\text{elm}_{P(F)}$ で表す.
すなわち, $P(E') = \text{elm}_{P(F)} P(E)$ であり, $P(E) = \text{elm}_{P(F')} P(E')$ である.

Elementary transformation は種々のベクトル束を作るのに非常に
有効であり, できるベクトル束の性質を調べるのもやりやす
いことが多い. Elementary transformation を使ったベクトル束の
構成について, 2, 3 の結果を以下に挙げる

定理 8. [M₂, Prop. A.1]. X は代数的閉体上定義された非特異
射影的多様体, $\mathcal{O}_X(1)$ は X 上の ample line bundle, D は X 上の divisor
 r は $r \geq \dim X$ を満たす整数であるとする. $\dim X > 0$ で, $X \neq \mathbb{P}^1$

であると仮定する。このとき、勝手な整数 s について、 $\mathcal{O}_X(1)$ に関して μ -stable なベクトル束 E で、 E の階数は r , $c_1(E) = D$ (一次同値), $d(c_2(E), \mathcal{O}_X(1)) \geq s$ ($\dim X \geq 2$ のとき) となるものが存在する、ここで $d(c_2(E), \mathcal{O}_X(1))$ は $c_2(E)$ の $\mathcal{O}_X(1)$ についての次数である。

これは非特異射影多様体上の stable ベクトル束の moduli 理論が自明でないことを保証している。

ある代数多様体上のベクトル束の集合が、有限次元の代数的集合で parametrize されるとき、その集合は“有界”であると言う。あるベクトル束の集合が有界であるかどうかは moduli の構成において基本的なことである。これについて、Atiyah は非特異射影的曲線上の階数、 c_1 の次数が一定の indecomposable ベクトル束の集合が有界であることを示した。しかし、代数曲面上では階数、 c_1, c_2 を固定しても indecomposable ベクトル束の集合が必ずしも有界にならないことを、Atiyah が例で示した。これが、特定な場合の病的現象でないことは次の定理でわかる。これも elementary transformation を使って証明される。

定理 9 [M₃, Appendix, Prop.]. X は非特異射影的曲面, D は X 上の divisor, c は整数であるとする。 $\mathcal{F}(D, c)$ は X 上の階数 2 の

ベクトル束 E で, *indecomposable*, $c_1(E)=D$ (一次同値), $c_2(E)=c$ (代数的同値) となるものの同型類の集合であるとする。このとき, $\mathcal{F}(D, c)$ は有界でない。

Elementary transformation の有効性を示す定理ともう一つ挙げよう。

定理 10 [M₁, Th. 1.12]. X は代数的閉体上定義された擬射影的な非特異代数様体とする。 $\underbrace{\dim X \leq 3 \text{ ならば,}}_{X \text{ 上のベクトル束 } E \text{ について,}}$ X 上の Cartier divisor T と, T 上の階数 $r(E)-1$ のベクトル束 F が存在して, $P(E) \cong \operatorname{elm}_{P(F)} P(\mathcal{O}_X^{\oplus r(E)})$ となる。ここで, T は smooth とれる。さらに, $\dim X \geq 2$ ならば, T は既約とれる。

上記の定理の証明の idea を見てみよう。 X は擬射影的だから ample line bundle $\mathcal{O}_X(1)$ がある。 n を十分大きな正整数として, $E(n)$ を考える。 $H^0(X, E(n))$ の一般の section $s_1, \dots, s_n$ ($n=r(E)$) を取って, $\zeta: \mathcal{O}_X^{\oplus r(E)} \rightarrow E(n)$ を得る。 key point は「 n が十分大きく, $s_1, \dots, s_n$ が十分一般ならば, $\dim X \leq 3$ の仮定の下で, ζ は単射で, $\operatorname{coker}(\zeta) = F'$ は smooth Cartier divisor T 上の line bundle になる」ということである。 $F = \ker(\zeta_T)$ とおけば, $P(E) = \operatorname{elm}_{P(F)} (P(\mathcal{O}_X^{\oplus r(E)}))$ となることは, display (D-4) からすぐ

にわかる。

$\dim X = 4$, $\operatorname{rk}(E) = 2$ の場合を考えてみる。局所的に考えて、 $E = \mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ とすると、 $s_1 = u_1 e_1 + u_2 e_2$, $s_2 = v_1 e_1 + v_2 e_2$ となる、ここで、 e_1, e_2 は E の free basis で、 u_1, u_2, v_1, v_2 は $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ の一般元である。この時、 $\zeta(X) = 0$ が $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$ で定まる closed subscheme の各点 x で成立してしまう。 $\operatorname{coker}(\zeta) = F'$ は Cartier divisors $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$ の support を持つが、その特異点集合で pinch してしまう。

ところで、 E が局所 noetherian scheme X 上の coherent sheaf で、 F が X 上の Cartier divisor T 上の coherent sheaf とし、 E から F への $\mathcal{O}_X$ -加群としての全射 φ が与えられているものとする。 T の局所方程式が E の非零因子ならば、 $E' = \ker(\varphi)$, $F' = \ker(\varphi|_T)$ について、(D-4) はそのまま成立する。例えば、“ F が T 上のベクトル束である” という条件をはずせば、擬射影的な様体上のすべてのベクトル束は適当に line bundle をテンサーすることによって、 $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ から定義の意味での elementary transformation で得られる。これは定理10のすぐ後に述べることから明らかである。

また、“ E がベクトル束である” を例えば、“ E は torsion free” という条件でおきかえれば、elementary transformation は torsion free coherent sheaf の間の変換になる。これはある torsion free sheaf,

またはべうトル束から, 別の torsion free sheaf を作る有力な手段である。例えば, 基底空間 X が非特異代数曲面で, E が torsion free coherent sheaf ならば, $E' = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(E, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$ はべうトル束であり, E と subsheaf として含む。 E'/E は有限個の点に support を持つ sheaf であるから, E はべうトル束から, E の意味での elementary transformation で得られることになる。このほか R. Hartshorne [H₁] は一般化された elementary transformation を $\mathbb{P}^3$ 上の reflexive sheaf の研究に有効に利用している。

Elementary transformation の一般化について, 定理 6 の見地, すなわち, blowing-up, blowing-down の見方から正当化を試みよう。 X は局所 noetherian scheme, E, F は coherent $\mathcal{O}_X$ -加群であるとする。 F について, 次の条件が与えられているとする

$C(F)$: $\text{Ann}(F)$ が coherent ideal I で Cartier divisor になるものを含め, $\text{Supp}(F) = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/I)$ となる。

E から F への $\mathcal{O}_X$ -加群としての全射 φ が与えられているとする。 $E' = \ker(\varphi)$, $F' = \ker(\varphi|_T)$ とおく, ここで, T は I によって定まる closed subscheme. (D-4) によってわかるように, 自然な全射 $\psi: E' \rightarrow F'$ がある。 φ, ψ が与える準同型 $E' \otimes S(E) \rightarrow S(E)$, $E(-T) \otimes S(E') \rightarrow S(E')$ があるが, これにより各々 $P(E)$, $P(E')$ の closed subscheme が定まる。その support は各々 $P(F)$, $P(F')$ であ

る。この coherent subscheme を $P(F)'$, $P(F')'$ で表すことにする。

$\mathcal{O}_X$ の ideal J と $\mathcal{O}_X$ -加群 H について、次の条件を考える

$C(H, J)$: すべての正整数 n について、自然な写像

$J \otimes_{\mathcal{O}_X} S^n(H) \rightarrow JS^n(H)$ が単射である。

定理 11. 上の E, F, E', F' について、 $C(F), C(E, I), C(E', I)$ が成立しているとする。 $f: \tilde{P} \rightarrow P(E), g: \tilde{P}' \rightarrow P(E')$ はそれぞれ $P(F)', P(F')'$ に沿った blowing-up とする。この時、 $\tilde{P}$ と $\tilde{P}'$ は X 上同型であり、 f の例外因子は、この同型の下で、 $g^{-1}[P(E')_T]$ と一致し、 g のそれは $f^{-1}[P(E)_T]$ と一致する。

E, E' が共にベクトル束ならば $C(E, I), C(E', I)$ は明らかなにみたされる。従って、定理 10 の “ $\dim X \leq 3$ ” という条件をはずした場合、上の定理は使える。 X が regular scheme ならば、もう少し強いことが言える

命題 12. X は regular scheme, E は X 上の torsion free coherent sheaf であるとする。 E は条件 (S_n) をみたし、各閉点 x で、 E_x homological dimension は 1 以下であるとする。 X の各閉点 x で $\dim_{k(x)} E(x) \leq r(E) + n$ ならば、 $\underbrace{S^m(E)}_{\text{任意の } m \geq 1}$ は torsion free である。

例えば, E_0 は regular scheme X 上のベクトル束で, $s \in H^0(X, E_0)$ によって, $E = E_0/s\mathcal{O}_X$ が torsion free であるとする。この E は命題12の条件をみたしている。

定理11, 命題12の証明はかなり面倒である。Elementary transformation のこれまでの結果と一緒にして Tata Inst. of Fundamental Research の Lecture Note Series の一冊として出版する予定である。

引用文献

- [H₁] R. Hartshorne, Stable reflexive sheaves, II, Invent. Math., 66, 1982.
- [M₁] M. Maruyama, On a family of algebraic vector bundles, Number Theorey, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973.
- [M₂] M. Maruyama, Moduli of stable sheaves, II, J. Math. Kyoto Univ., Vol.18, 1978.
- [M₃] M. Maruyama, On boundedness of families of torsion free sheaves, J. Math. Kyoto Univ., Vol 21, 1981.
- [N₁] M. Nagata, On rational surfaces, I, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A, Math., Vol 32, 1962.