

結び目によつた Dehn-surgery で得られる 3次元多様体について

津田塾大学 円山 憲子

(Noriko Maruyama)

§ 1. Introduction.

対象は、すべて smooth, oriented category で扱うものとする。

3次元多様体を与える方法は、いくつか知られている。特にどんな closed, orientable 3次元多様体も S^3 内 a link によつた Dehn-surgery で得られることは、よく知られているが、link ではなく knot によつた Dehn-surgery で与えるという制限をつけた場合には、まだ決定的な結果は得られていないようである。そこで次のような一般的问题がたてられる。

問題: 所与の homology lens space が適当な homology S^3 (or S^3) 内 a knot a Dehn-surgery で与えられるかどうか判定せよ。また Dehn-surgery で与えられた時、その表現は一意的か。

また knot K による Dehn surgery には, surgery 係数と呼ばれる有理数が対応し、得られる 3 次元多様体の位相型は、 K の入っている homology 3-sphere を固定すれば、 K の surgery 係数で決まることもよく知られている。特に surgery 係数が整数の時、Dehn-surgery を framed surgery と呼ぶことにすれば、2-handle attaching を通して 3 次元多様体(同志)の同境(cobordism)問題に関与してくる。

homology cobordism group of homology 3-spheres, $\mathcal{H}^3$ の構造について懸案の問題は、 μ -invariant, $\mu(\Sigma)=0$ だが $[\Sigma] \neq 0$ in $\mathcal{H}^3$ なる homology 3-sphere Σ の発見である。そこでもし homology lens space L^2 , homology 3-sphere Σ , $\mu(\Sigma)=0$ かつ a knot K の framed surgery で得られ、i.e. $L = X_\Sigma(K; p)$, $p \in \mathbb{Z}$, L は homology S^2 ($=$ 4-manifold V with $H_*(V; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^2; \mathbb{Z})$, $\partial V \neq \emptyset$) の境界とならないものがあれば、 Σ の homology cobordism class は $\mathcal{H}^3$ 中 non zero である。何となれば、もし $[\Sigma] = 0$ ならば、 $\exists$ acyclic 4-manifold W s.t. $\partial W = \Sigma$ 。また $L = X_\Sigma(K; p)$ より $\exists C(p)$: 2-handle body s.t. $\partial C(p) = L \cup -\Sigma$ 。よって $V = C(p) \cup_\Sigma W$ における $\partial V = L$ かつ V は homology S^2 となり、 L の条件に反するようになるからである。よって上の性質を持つ homology

3-sphere 発見のために、まあ先の一般的問題を framed surgery に制限した形の問題、

Qf: 所与の homology lens space が 適当な homology 3-sphere (or S^3) の knot の framed surgery で得られるかどうか判定せよ。

と、次の問題

Q: 所与の homology lens space が homology S^2 の境界となるか判定せよ。

に答えるければならない。

Λ を homology lens space, Σ を homology 3-sphere, もし $\Lambda = \chi \Sigma$ ($\chi = p$) から $[\Sigma] = 0 \in \mathcal{H}^3$ ならば, Λ は homology S^2 の境界となることを注意しておく。

§2では, framed surgery の代数的な条件等を調べ, 特に lens space について考察を進める。 §3では, 素な 3次元多様体の連結和を問題の対象とし, 次の定理を示す。

Theorem. K : non trivial, not sufficiently large knot in S^3 . もしある $r \in \mathbb{Q}$ ($r \neq 0$) に対し K に r の係数 r で S^3 を Dehn surgery $\chi = \pm \alpha$ が, α 個の素な 3次元多様体の連結和となっているならば, $\Lambda \subseteq \Sigma$ である。

§2. framed surgery

2.1. ここでは、一般に a homology lens space が knot a framed surgery で得られるための代数的な必要条件を求める。

Λ を homology lens space with $H_1(\Lambda; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ とする。 Λ はいつでも S^3 内の link $L = \bigcup_{i=1}^{\mu} L_i$ に Dehn-surgery して得られる, i.e. $\Lambda = \chi_{S^3}(L; \{r_i\})$, $r_i = p_i/q_i \in \mathbb{Q}$ ($i=1, \dots, \mu$)。 Λ の表現をひとつ選んで固定する。 A を $(L; \{r_i\})$ の linking form, $D = \prod_{i=1}^{\mu} q_i$ と置く。 [M: lemma 2.2] より $H_1(\Lambda; \mathbb{Z})$ の位数 $|H_1(\Lambda; \mathbb{Z})| = D \cdot \det A = p$ を得る。 さらに Λ が homology 3-sphere Σ 内の knot K の framed surgery で得られたとすると i.e. $\Lambda = \chi_{\Sigma}(K; p)$ 。 この時、 Λ と Σ は $\Sigma \times I$ に framing p の 2-handle を attach した 4次元多様体 $C(p)$ の境界となることに注意しておく。 逆に Σ は $\Lambda \times I$ にある framing の 2-handle を attach して得られたものとみなせる。 上の Λ の L による Dehn surgery を用いて Σ を S^3 から Dehn surgery の表現が得られる。 Σ は L と dual 2-handle の足 K^* による Dehn-surgery して得られるのである。 i.e.

$\Sigma = \chi_{S^3}(L \cup K^*; \{r_i\} \cup \{m\})$, $m \in \mathbb{Z}$.

$(L \cup K^*; \{r_i\} \cup \{m\})$ a linking form $A(m)$ is.

$$A(m) = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{smallmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_\mu \end{smallmatrix} \\ \hline l_1 \dots l_\mu & m \end{array} \right), \quad l_i = \text{lk}_{S^3}(K^*, L_i)$$

と書ける. すると $|H_1(\Sigma; \mathbb{Z})| = D \cdot \det A(m) = \pm 1$

([M: lemma 2.2]) となる. $A(m)$ の形から

$\det A(m) = m \cdot \det A + C$, (C は l_i 達と A で決まる定数) とおける. 以上の式から

$$D \cdot \det A(m) = m \cdot D \cdot \det A + D \cdot C = pm + DC = \pm 1,$$

従って $DC \equiv \pm 1 \pmod{p}$ となる.

特に $p = \text{odd}$ ならば, $\Lambda = \chi_\Sigma(K; \pm p)$ のとき, Λ は $\mathbb{Z}_2$ -homology 3-sphere の μ -invariant が定義される. これらの間の代数的な関係式を求めたい. $\Lambda = M(0, K; 1, 0, \pm p, 1)$ より [G1: Theorem 2] に依り

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda) &= \mu(S^3) + \mu(\Sigma) + \mu(L(\pm p, 1)) + c(0) + c(K) \\ &= \mu(\Sigma) + \mu(L(\pm p, 1)) + c(K) \end{aligned}$$

(但し, $c(K)$ は K の Arf-invariant) を得る. また [HNK] より lens space $L(\pm p, 1)$ の μ -invariant は

$$\mu(L(\pm p, 1)) = \mp \mu(L(p, p-1)) = \mp \frac{p-1}{16}$$

と計算される. これらの式を合せて

$$\mu(\Lambda) \pm (p-1)/16 = \mu(\Sigma) + c(K) \quad \text{を得る.}$$

右辺は. homology 3-sphere α μ -invariant および knot α Arf invariant が $8/16$ or $0/16 (= \mathbb{Z}_2)$ という値を取ることには注意すれば.

$$16 \mu(\Lambda) \pm (p-1) \equiv 0 \quad (8) \text{ が成り立つ.}$$

以上をまとめると,

Lemma 2.1. $\Lambda = \chi_{S^3}(L: \{r_i\})$ が homology lens space なら $H_1(\Lambda; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ とする.

もし $\Lambda = \chi_{S^3}(K: p)$ ならば $D \cdot C \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

さらに $p: \text{odd}$ の時, $16 \mu(\Lambda) \pm (p-1) \equiv 0 \quad (8)$.

Q_f に関して, $\forall K \alpha$ ことが分かる.

Corollary 2.1.1 $\Lambda = \chi_{S^3}(L: \{r_i\})$ は homology lens space なら $H_1(\Lambda; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$, $D = \prod_{i=1}^n q_i$, $r_i = p_i/q_i$ とする.

$\forall C \in \mathbb{Z}$ に対して $D \cdot C \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ ならば Λ は homology 3-sphere 内の knot α framed surgery として得られない.

さらに, $p: \text{odd}$ の時, $\mu(\Lambda) \pm (p-1) \not\equiv 0 \quad (8)$ ならば,

Λ は homology 3-sphere 内の knot α framed surgery として得られない.

p が even の時は, [F] に扱われ, 詳しい展開がなされているが, 以下 α ことを注意しておくことにする.

ここでは、 $p = \text{even}$ に限っておく。 Λ を homology lens space with $|H_1(\Lambda; \mathbb{Z})| = p$ とする。今 Λ が Σ の homology 3-sphere Σ_1, Σ_2 から framing p の 2-handle を attach して得られた 4 次元多様体 $C_1(p), C_2(p)$ の境界となっているとする。 $H_1(\Lambda; \mathbb{Z})$ の生成元は dual 2-handle の attaching sphere k_1^* (resp. k_2^*) である。 $h: \Lambda \rightarrow \Lambda$ homeomorphism s.t. $h_*(k_1^*) = \pm k_2^*$ なる $\pm$ により、 $C_1(p) \times C_2(p)$ を張り合せて得られる 4 次元多様体を C とおく。 $C = C_1(p) \cup_h C_2(p)$ 。 極と $\partial C = -\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ である。 $H_2(C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は Σ_1 につけた 2-handle h_1 と h_2 の dual 2-handles h_1^*, h_2^* から得られる $h_1^* \pm h_2^*$ で生成され、 Σ の intersection form は $\begin{pmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

lemma 2.2. $p = \text{even}$ の時、 C は Σ_1 と Σ_2 の spin cobordism を与える。 $\exists$ $\mu(\Sigma_1) = \mu(\Sigma_2)$ さらに p が条件 $(*)$: $x^2 \equiv \pm 1 (p) \iff x \equiv \pm 1 (p)$ を満たせば、 $C_1(p) \times C_2(p)$ の張り合せ方は $\pm$ の異なる h になる。
 $C_1(p) \cup_h C_2(p) = C$ となる。

この lemma 2.2 から Λ が μ -invariant zero の homology 3-sphere (特異に S^3) から framed surgery で得られないことの十分条件が出てくる。 $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Z}$ として $p = \text{even}$ の場合は Λ が成り立つ。

Corollary 2.2.1. p : even かつ lemma 2.2 の条件

(*) を満たす α とする. もし Λ が $\mu(\Sigma) \neq 0$ なる
homology 3-sphere a framed surgery で得られるならば,
 Λ は μ -invariant zero (特に S^3) a homology 3-sphere
a framed surgery で得られない.

$\Sigma^2 \mathcal{H}^3$ の構造をさぐる概念として, $[M]$ は
bounding genus を定義しているが, 我々は上のような
homology 3-spheres 間 a spin cobordism を持つ α 2.
bounding genus に関して $\forall \alpha$ 2. 評価式を得る.

Corollary 2.2.2. p : even 2, Λ 2 homology 3-
spheres Σ_1, Σ_2 に上のような関係が成り立っているとすると,
 Σ_i a bounding genus $|\Sigma_i|$ ($i=1,2$) について

$$|\Sigma_j| - 1 \leq |\Sigma_i| \leq |\Sigma_j| + 1 \quad i \neq j, i, j \in \{1, 2\}.$$

特に, (i) $|\Sigma_i| = 0$ ならば $|\Sigma_j| \leq 1$,

(ii) $|\Sigma_i| \leq n$ ($n \geq 1$) が critical estimate ($[M]$)
ならば, 評価 $|\Sigma_j| \leq n-1$ は critical である.

注意: p に関する条件 (*) は $p = 2 \cdot (4k+3)$ の形の素数の m

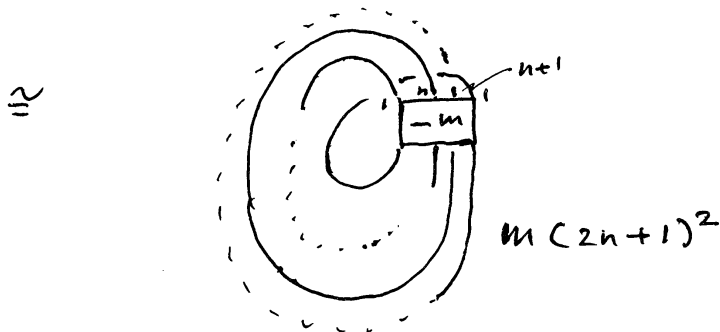
$k, m \in \mathbb{Z}^+$ と同値であることが証明できる.

2.2. lens spaces について.

lens space $L(p, q)$ (p, q は互いに素な整数) が trivial knot の p/q -Dehn surgery で得られることはよく知られた事実である。従って lens space に対してはその表現の一意性が問題となるが, Moser [Mo] は torus knot から, Fintushel - Stern [FS] と Gordon [G2] は doubly iterated torus knot (cable of torus knot) から, さらに [FS] は torus knot ではないある knot から, 一部の lens spaces が Dehn surgery により得られることを示した。我々は Rolfsen-Kirby Calculus により, 次の結果を得る。

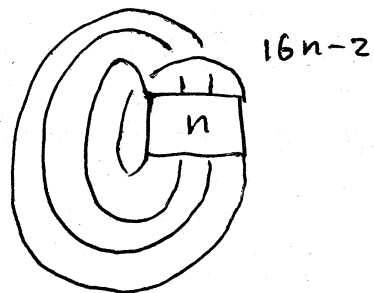
Theorem 2.3. 次の lens spaces は non-trivial knot の framed surgery から得られる。

$$(i) \ L(m(2n+1)^2, 2m(2n+1)+1)$$

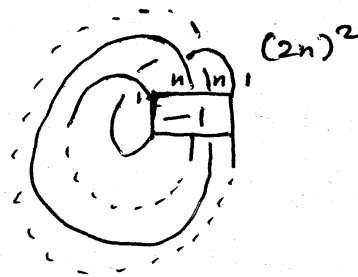


, $\boxed{-m}$ は m -full left handed twists (LKF 同値)。

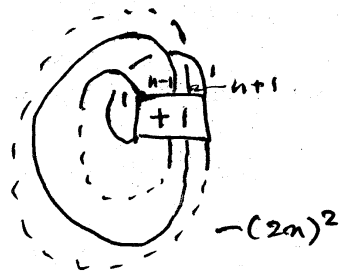
$$(ii) \quad L(16n-2, 6n-1)$$

 $\cong$


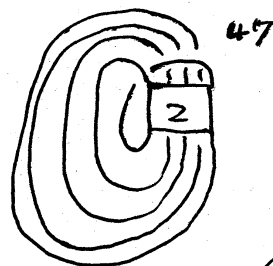
$$(iii) \quad L((2n)^2, 2(2n)+1) \cong$$



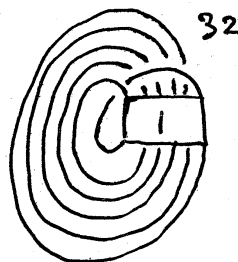
$$(iv) \quad L((2n)^2, 2(2n)-1) \cong$$



$$(v) \quad L(47, 18) \cong$$



$$(vi) \quad L(32, 23) \cong$$



Proof. 主張中の lens space $\cdots$
 のような framed link 表示を Rolfsen-Kirby Calculus
 で変形して得られる。詳細は略す。

次に lens spaces の連結和の surgery 表現は [Mo],
 [G2] で得られている。これらはすべて torus knot または
 iterated torus knot の Dehn-surgery で得られる。
 Gordon [G2] は次の問題を提出している。

問題 [Gordon]: 2つの lens spaces の連結和が
 torus knot または iterated torus knot 以外の knot の
 Dehn-surgery で得られるか?

この問題について次節で少し言及するつもりである。
 以上は lens space あるいは 2つの連結和が Dehn-surgery で
 得られる例であったが、以下は 2.1. の議論を lens
 spaces に適用して、lens space 特有と思われる現象について
 述べてゆきたい。lens space あるいは lens spaces の連結和
 の first homology group の位数が odd と even の場合に
 分けて議論する。

p が odd の時、lemma 2.1 から次の命題を得る。

Proposition 2.4. p は odd と仮定する。

(1) $L(p, q) = X_{\Sigma}(K: \pm p)$ ならば.

$16 \mu(L(p, q)) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ が成り立つ. さらにこれは $q \equiv \pm \text{quadratic residue } (p)$ と同値である.

(2) $\#_{i=1}^{\Delta} L(p_i, q_i) = X_{\Sigma}(K: \pm p)$, $\Delta \geq 2$, $p = \prod_{i=1}^{\Delta} p_i$ ならば. $D \cdot C \equiv \pm 1 \pmod{p}$, 但し $D = \prod_{i=1}^{\Delta} q_i$, C は linking form $A(n) = \left(\begin{array}{cc|c} p_1/q_1 & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{\Delta}/q_{\Delta} & \lambda_{\Delta} \\ \hline \lambda_1 & \dots & \lambda_{\Delta} & n \end{array} \right)$ $\det A(n) = n \cdot \det \begin{pmatrix} p_1/q_1 & 0 \\ \vdots & p_{\Delta}/q_{\Delta} \end{pmatrix}$

+ C と置いた時の定数である. 同様の条件のもとで, μ -invariant は $16 \sum_{i=1}^{\Delta} \mu(p_i, q_i) \pm (\prod_{i=1}^{\Delta} p_i - 1) \equiv 0 \pmod{8}$ となる.

Remark. [HNK] は lens space の μ -invariant の計算公式を上げているが, その Theorem 8. (4) は一般の q に対しては $16 \mu L(p, q) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ がいつでも成り立つことを述べている.

Proof. (1) で $16 \mu(L(p, q)) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ が成り立つことは lemma 2.1 より明らか. [HNK] は互いに素な整数 p, q に対し, Jacobi symbol $(\frac{q}{p})$ が lens space $L(p, q)$ の μ -invariant と次の式で関係付けられていることを示した;

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{4\mu L(p, q) + \frac{p-1}{4}}.$$

また, $(\frac{q}{p})$ は $L(p, q)$ の orientation preserving homotopy

type invariant であることも示した。 $q \equiv \pm \text{quadratic residue (p)}$ ならば、 $L(p, q) \cong L(p, 1) \cup L(p, -1)$ 。

$L(p, q) \cong L(p, 1)$ の時、先の関係式を用いて、

$$(-1)^{4\mu L(p, q) + \frac{p-1}{4}} = \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) = 1 \quad \text{よって} \quad 4\mu L(p, q) + \frac{p-1}{4} : \text{even} \quad \text{従って} \quad 16\mu L(p, q) + (p-1) \equiv 0 \pmod{8}.$$

また、 $L(p, q) \cong L(p, -1)$ の時、同様に $\left(\frac{q}{p}\right)$ は homotopy invariant だから $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ 。よって $\left(-\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^{p-1} = 1$ 。 $\left(-\frac{q}{p}\right) = (-1)^{4\mu L(p, -q) + \frac{p-1}{4}}$ 従って、

$$4\mu L(p, -q) + \frac{p-1}{4} : \text{even}, \quad \text{従って} \quad 4\mu L(p, q) - \frac{p-1}{4} : \text{even},$$

故に、 $16\mu L(p, q) - (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ を得る。以上 $q \equiv \pm \text{quadratic residue mod } p$ ならば $16\mu L(p, q) \pm (p-1) \equiv 0 \pmod{8}$ が言えた。逆は上の証明を逆にすればよい。

(2) は、lemma 2.1 を用いてただちに得る。 $\square$

この Proposition 2.4 は、lens space におけるその連結和が homology 3-sphere の framed surgery によって得られるための必要条件を与えている。特に $L(p, q)$ が knot の framed surgery によって得られるためには $L(p, 1)$ または $-L(p, 1)$ と homotopy 同値でなければならないことを主張している。

Qp を first homology group の位数 odd の lens space 又はこれらに連結和に限る。

Corollary 2.4.1 p : odd をする。

(1) $16 \mu L(p, q) \pm (p-1) \equiv \pm 4 \pmod{8}$ ならば $L(p, q)$ は homology 3-sphere (特に S^3) の framed surgery で得られない。

(2) $\#_{i=1}^n L(p_i, q_i)$, $p = \prod_{i=1}^n p_i$, $n \geq 2$ を. $16 \sum_{i=1}^n \mu(L(p_i, q_i)) \pm (p-1) \not\equiv \pm 4 \pmod{8}$ ならば, これは homology 3-sphere (特に S^3) の framed surgery で得られない。

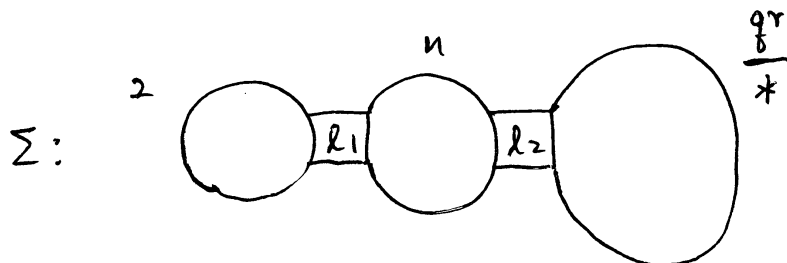
Corollary 2.4.1 で判定される例をいくつか上げる。

$L(24k-7, 6)$, $L(4k+3, 1) \# L(8k+7, 1)$, $L(4k-1, 1) \# L(4k+1, 1) \# L(4k+3, 1)$ は homology 3-sphere (特に S^3) の framed surgery で得られない。

最後に first homology group の位数が even の場合に S^3 の framed surgery で得られるかどうかの判定について述べる。これは, lemma 2.2 と Corollary 2.2.1 から判定する事ができるが, lens space $L(p, q)$, 但し p : even かつ 条件 (*) を満たすものについて S^3 の framed

surgey で得られない. α の例は [F] で与えられている
 ので. Σ は lens space の $\mathbb{Z}$ 以上の連結和に限る. $p = \prod_{i=1}^n p_i$
 が even かつ 条件 (*) を満たし, $\# L(p_i, q_i)$ の linking form
 が $L(p, 1)$ のそれと同型であるという要請から. Corollary 2.2.1
 は $\Delta = 2$ に対して $L(2, 1) \# L(q^r, *)$, $q: 4k+3$ の形の素数
 $r \in \mathbb{Z}^+$ の形の時のみ有効である.

$L(2, 1) \# L(q^r, *)$ は次の link に surgery を得ら
 れる homology 3-sphere Σ と 2-handle 1 個のみからなる
 4-次元の多様体で結ばれている. Σ は homology 3-sphere
 で μ -invariant が non-zero の α を見つけられたい.



$*$ = 1 の場合にいくつか見つかったのを報告する.

Proposition 2.5.

- (1) $L(2, 1) \# L(8k^2 - 1, 1)$, $8k^2 - 1: \text{odd prime}$
 - (2) $L(2, 1) \# L(24k^2 + 16k + 3)$, $k: \text{odd}$, $24k^2 + 16k + 3: \text{prime}$
 - (3) $L(2, 1) \# L(24k^2 + 32k + 11)$, $k: \text{even}$, $24k^2 + 32k + 11: \text{prime}$
- は, いずれも S^3 の framed surgery で得られない.

§3. Connected sum について.

任意の closed, orientable 3-manifold M は prime 3-manifolds (irreducible except $S^1 \times S^2$) M_i の connected sum に順序を除いて $M = \#_{i=1}^{\Delta} M_i$ と一意に分解されること (Milnor) に示されている。 $\Delta \geq 2$ の時, M は non-irreducible の decomposition を定める $\mathcal{S}$ = a collection of disjoint, non-parallel incompressible 2-spheres in M , $|\mathcal{S}| = \Delta - 1$ があることに注意しておく。

この節の目的は, closed, orientable 3-manifold $M = \#_{i=1}^{\Delta} M_i$ が knot に与った Dehn-surgery で得られるかという問題と, このような M (特に $M_i = \text{lens space}$ の時) が knot に与った Dehn surgery で与えられるためには, Δ はいくつまで許されるかということと 3次元 topology の手法を用いて考えてみることにする。

はじめに次の結果を紹介する。

Theorem 3.1. (Gordon [G2])

- (i) K : any knot $\Rightarrow K$ に与った係数 r の S^3 surgery で得られる ($K=r$) は有限個の $r \in \mathbb{Q}$ を除いて irreducible である。

(ii) K が torus knot でないならば、有限個の $r \in \mathbb{Q}$ を除く $\pi_1(K:r)$ は infinite である。

従って特に lens spaces の連結和 (基本群は有限) を対象にする試みはあながち無理な試みではないと思われる。
以下いくつかの補題を試みあげて、この節の主定理 (Theorem 3.6) を証明する。

lemma 3.2 K は non trivial knot とする。

$(K:r)$ が non-irreducible ならば、 K の exterior $X(K)$ 内に incompressible, ∂ -incompressible, connected planar surface F with $\partial F = \{ \text{parallel curves of slope } r = m/n \text{ in } \partial X(K) \}$ が存在する。

Proof. $(K:r) = X(K) \cup S^1 \times D^2$ 内の incompressible 2-sphere S を $S^1 \times D^2$ の軸と transversal にと位置に置き、 $S \cap S^1 \times D^2$ は meridian disks とできる。 $X(K)$ は irreducible 故、 $S \cap S^1 \times D^2 \neq \emptyset$ といふことはある。 meridian disk の boundary は $\partial X(K)$ 上に slope $r = m/n$ の curve である。 して $S \cap X(K)$ が incompressible かつ ∂ -incompressible である。 故の結果を F とする。 F が ∂ -compressible ならば F は ∂ -parallel な annulus といふことが [W. (1.10) lemma]

成分がある。すると S が $S^1 \times D^2$ 内に push され、 B^3 を張る。従って S の *incompressibility* に反する。よって F は ∂ -incompressible である。

Knot exterior 内の properly embedded surface の boundary curves について、次の成り立つことを松本幸夫先生に教わっていた。

Lemma 3.3. (Y. Matsumoto) F を $X(K)$ 内の orientable connected (planar) surface で、 ∂F は $\partial N(K)$ 上の parallel oriented loops (∂F には F が induce される向きを付ける) になっているとする。これらの代数的和を $\partial[F]$ とする。

この時、 $\partial[F] = 0$ 又は $\pm K$ が $N(K)$ で成り立つ。 $\partial[F] = 0$ の時、 ∂F の成分の向きは交互に変わり、 $\# \partial F$: even であり、 $\partial[F] = \pm K$ の時、 ∂F の成分は longitude となる。

Corollary 3.3.1. $\gamma \neq 0$ の時、 ∂F の成分の個数は偶数。

次は homology の計算で分かる。

Lemma 3.4. F を properly embedded (incompressible, ∂ -incompressible) surface in $X(K)$ で、 ∂F の成分の個数は偶数となっているならば F は $X(K)$ を separate する。

$X(K)$ 内の incompressible, ∂ -incompressible planar surface with slope γ ($\gamma \neq 0$) は, $X(K)$ を $X_1 \cup_F X_2$ と分解し, X_i は ∂ -incompressible となる. これは ∂ の Przytycki の結果から得る.

Lemma 3.5 (LP: Corollary 4.5D). L : S^3 内の link, exterior $X(L)$ は not sufficiently large (i.e. $X(L)$ は closed, 2-sided incompressible, not boundary parallel surface と見做す) とする. F は 2-sided, incompressible, not ∂ -parallel surface とする. $X(L)$ を F で切り開いて得られるものが handle bodies と呼ばれる. この必要十分条件は ∂F の each component of $\partial X(L)$ と ∂F が ∂ -parallel である.

Corollary 3.5.1. ~~Knot~~ K は exterior $X(K)$ が not sufficiently large な時, K は not sufficiently large (knot) と呼ばれる. K は S^3 内の not sufficiently large knot である. F は 2-sided incompressible, (∂ -incompressible) not ∂ -parallel planar surface with $\# \partial F = 2g$ である.

$X(K) - N(F) = X_1 \cup X_2$, X_i = handle body of genus g . と仮定する.

よ Corollary 1-54 問題の planar surface α は ∂ 上で ∂ -parallel であり, 我々

・主定理を示すことが出来る。

Theorem 3.6. K is non-trivial, not sufficiently large knot である。もしある $r \in \mathbb{Q}$ ($r \neq 0$) がある。

$$(K; r) = \sum_{i=1}^{\Delta} \# M_i \quad (M_i: \text{irreducible})$$

と表わしているならば Δ は 2 より小さい、 $\Delta \leq 2$ 。

Proof $\Delta \geq 3$ である。lemma 3.2 より, incompressible, ∂ -incompressible, non- ∂ -parallel planar surface with slope $r (\neq 0)$ (これらの条件を $(**)$ とおく) F がある。Corollary 3.3.1 より ∂F の成分の個数は偶数、 $F \neq \text{disk}$ である。また $\Delta \geq 3$ より $F = \text{disjoint } \partial F = \text{parallel}$ である、条件 $(**)$ を満たす disk と異なる別の planar surface F' が存在する。 $F' \subset X(K) - N(F) = X_1 \cup X_2$ である。一般性を失わず $F' \subset X_1$, $\partial F' \subset \partial X_1$ とし得る。($\partial F' \neq \emptyset$) F' は明らかに X_1 に incompressible である。また F' が ∂ -incompressible in X_1 が分かる。 F' は handle body 内の incompressible, ∂ -incompressible surface である。したがって handle body 内の ∂ -parallel surface を持つ surface は disk であることが知られているから。 $F' = \text{disk}$ となり条件 $(**)$ に反する。 $\Delta \geq 3$ の時、矛盾が導かれた。

Theorem 3.6 の条件を満たす knot は torus knot または hyperbolic

is not sufficiently large knot である。今の所 hyperbolic is sufficiently large knot についての連結和の成分の個数の評価式は分らない。torus knot に Dehn surgery に得られる連結和の成分の個数は、実際 2 以下であることが Moen [Mo] により調べられている。

より簡単な結び目から複雑な結び目を作るのが satellite knot である。この satellite knot $J(K)$ に関する Dehn-surgery の結果は Gordon によって調べられている [G2]。以下連結和の因子を irreducible, not sufficiently large 3-manifold とおこう。このような closed orientable 3-manifold を satellite knot から得る場合に問題を制限する。Gordon の次の lemma が有効である。

Lemma 3.7. [G2: Lemma 3.5/7] $(J(K):r)$ が w -atoroidal (i.e. $(J(K):r)$ は incompressible (separating) torus T を持つ) $H_1(T) \rightarrow H_1(J(K):r) \cong \mathbb{Z}_m = w\mathbb{Z}_m$ を誘起する、 w は J の K に対する winding 数、 $r = \frac{m}{n}$ ならば、solid torus の curve J による surgery に得られる 3-mfd $(J:r)$ は $(J:r) \cong S^1 \times D^2 \# P$ 。 P は $(J(K):r)$ の連結和因子と書かれる。 $(J(K):r) = (K:r/w^2) \# P$ から $(J(0):r) = (0:r/w^2) \# P$ 。 また $w=0$ の時 $(J(K):r) = (J(0):r)$ である。

K の satellite $J(K)$ (= surgery (= 結果) は K の surgery の結果と
 $J(K)$ の solid torus (= surgery (= 結果) である。次の場合
 (= Theorem 3.6 と Lemma 3.7 の系) の連結和の因子の個数について
 評価式が求まる。

Corollary 3.8. $(J(K), r) = \#_{i=1}^{\Delta} M_i$, M_i は irreducible
 の not sufficiently large knot とする。 Δ' は $(K, r/w^2) = \#_{j=1}^{\Delta'} M'_j$
 であるとする。

この時、 $\Delta' \leq \Delta \leq \Delta' + 1$ 。

Proof. $(J(K), r) = \#_{i=1}^{\Delta} M_i = (K, r/w^2) \# P$, $1 \leq P$
 は $(J(0), r) = (0, r/w^2) \# P$, 0 は trivial knot により決まる。
 $J(0)$ は not sufficiently large により Theorem 3.6 より、 $(J(0), r)$
 から得られる連結和の因子の個数 Δ'' は $\Delta'' \leq 2$ である。よって P
 は prime である。 P の連結和の因子の個数を Δ_P とする $0 \leq \Delta_P \leq 1$ 。
 $\Delta = \Delta' + \Delta_P$ よって $0 \leq \Delta - \Delta' \leq 1$ となり $\Delta' \leq \Delta \leq \Delta' + 1$ 。

この Corollary より $\Delta' \leq 2$ ならば $2 \leq \Delta \leq 3$, $\Delta' = 1$ ならば
 $\Delta \leq 2$ であることがわかる。

最後に予想といくつか問題を述べて終わる。

予想. $(K:r) = \prod_{i=1}^n M_i$. M_i : irreducible $\Rightarrow \Delta \leq 2$

この予想の根拠は、知られている例はすべて $\Delta \leq 2$ であるからだが、反例を作るのは難しいと思う。

knot + Dehn surgery の irreducible の not sufficiently large な 3-manifolds の連結和を得るためには、knot exterior 内の genus ≥ 2 の incompressible surface が surgery した結果いかに compress されるか調べなければならぬ。

問題 genus ≥ 2 の closed incompressible surface の 3-manifold 内での compressible 状態はどうなっているか？

§3 の議論では、Dehn-surgery の係数は整数或いは有理数かという事が殆ど問題になっていた。連結和が得られる場合の事例をみるとすべて整数であり、そこで、

問題 knot exterior 内の incompressible, ∂ -incompressible planar surface の slope を決定せよ。

— References —

[F] S. Fukuhara, On an invariant of homology lens spaces, preprint (first version)

[FS] R. Fintushel and R. Stern, Constructing lens

spaces by surgery on knots, Math. Z. 175
(1980), 33-51.

[G1] C. McA. Gordon, Knots, homology spheres and contractible 4-manifolds, Topology 14 (1973),
151-172

[G2] C. McA. Gordon, Dehn surgery and satellite knots,
preprint.

[HNK] F. Hirzebruch, W. D. Newmann and S. S. Koh, Differentiable manifolds and quadratic forms,
Marcel Dekker, New York (1971).

[M] Y. Matsumoto, On bounding genus of homology 3-spheres, preprint

[Mo] L. Moser, Elementary surgery along a torus knot, Pacific J. Math 38 (1971), 737-745.

[P] J. H. Przytycki, Incompressibility of surfaces after Dehn surgery, preprint.

[W] F. Waldhausen. Eine Klasse von 3-dimensional manifoldigkeiten. I, Inv. Math 3 (1967),
308-333