

The Eigenvalue Splitting of the Kac Operator

金沢大学自然科学研究科 百目鬼 敦 (Atsushi Doumeki)

1. 目標

次の $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の作用素

$$K(\hbar) = \exp(-V(x)/2) \exp(\hbar^2 \Delta) \exp(-V(x)/2), \quad (1.1)$$

を考えます. この作用素は Kac 作用素と呼ばれ, 統計力学においてよく知られた伝送行列を, イジング模型の一般化 (スピンの値を ± 1 から連続ベクトルに, 即ち $\mathbf{R}^d$ にした) である Kac 模型 [5] に対して考える時に現れる. 我々は, この作用素の固有値の分離に対して, 興味がある. この問題は Helffer [1][2] により, 最近考え直されているものである. $V(x)$ が一様強凸, 即ち, $V(x)$ は C^∞ 関数であって,

$$\sigma \equiv \inf_{x \in \mathbf{R}^d} (\text{Hess} V)(x) > 0,$$

を満たすものとする. そしてさらに次の条件を満たすとする.

$$|\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{(2-|\alpha|)_+}, \quad 0 \leq |\alpha| < \infty, \quad V(x) \geq C|x|^2 - 1/C, \quad C > 0, \quad (1.2)$$

但し $(s)_+ = \max(s, 0)$ かつ $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$. この時彼は固有値の分離に関して次の結果を得た. [1]

$$\frac{\mu_2(\hbar)}{\mu_1(\hbar)} \leq \exp(-\cosh^{-1}(\hbar^2 \sigma + 1)),$$

但し $\mu_1(\hbar)$ と $\mu_2(\hbar)$ は $K(\hbar)$ の最大固有値とその次の固有値である. この結果は任意の定数 $\hbar > 0$ に対して成立する. しかしこの一様強凸なポテンシャルは他の重要なポテンシャル, 例えば $|x|^4$, などを含んでいない.

これ以外にも Helffer は $\hbar \rightarrow 0$ の時, 次の結果を得た. [2, Remark 3.2]

$$\frac{\mu_2(\hbar)}{\mu_1(\hbar)} = \exp(-(E_2(\hbar) - E_1(\hbar)) + O(\hbar^2)), \quad (1.3)$$

但し $E_1(\hbar), E_2(\hbar)$ は条件 (1.2) を満たすポテンシャルを持つ, Schrödinger 作用素

$$H(\hbar) = H_0(\hbar) + V = -\hbar^2 \Delta + V(x) \quad (1.4)$$

の最小固有値とその次の固有値である. この準古典評価 (1.3) は,

$$\|\exp(-H(\hbar)) - K(\hbar)\| = O(\hbar^2) \quad (1.5)$$

なる準古典評価と最大最小原理とから従う. 我々は評価 (1.3) と (1.5) をより広いクラスのポテンシャルに対して拡張すると同時に, $E_j(\hbar)$, $j = 1, 2$ を漸近展開して, $\hbar \rightarrow 0$ における Kac 作用素の固有値の分離の評価を得ることを目的とする.

2. 結果

まず評価 (1.5) を拡張するために、ポテンシャルのクラスとして次のものを考える. 各定数 $c > 0, \rho > 0, 0 \leq m < \infty$ そして $0 < \kappa \leq 1$, に対して

$$\begin{aligned} (1) & V(x) = V_0(x) + V_1(x), \quad V_j(x) \geq 0, \quad j = 0, 1, \\ (2) & V_0(x) \in C_0^{m, \kappa}(\mathbf{R}^d), \\ (3) & V_1(x) \in C^2(\mathbf{R}^d), \quad V_1(x) \geq c\langle x \rangle^\rho \text{ on } |x| > R \quad (R \gg 1), \\ & |\partial_j^\alpha V_1(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{(\rho - |\alpha|)_+}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq 2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

但し $C_0^{m, \kappa}(\mathbf{R}^d)$ は m 回連続的に微分可能な、コンパクトサポートを持つ関数 $f(x)$ の族であって、その m 回微分 $\partial^\alpha f$, $|\alpha| = m$, が κ 次ヘルダー連続性を持つものであるとする. この条件の下で、評価 (1.5) を一般化できる. さらに、この条件を満たすポテンシャルを持った Schrödinger 作用素の固有値を漸近展開して (1.3) を精密化するため、次の条件をポテンシャルにかす.

$$\begin{aligned} (1) & V(x) = 0 \text{ if and only if } x = 0, \\ (2) & V_1(x) \equiv 0 \text{ on } |x| \leq 1/2, \\ (3) & V_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}), \quad \text{supp } V_0 \subseteq \{x \in \mathbf{R}^d \mid |x| \leq 1\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$V_0(x) \sim w(x) \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha x^\alpha, \quad a_0 \neq 0,$$

但し $w(x)$ は $C^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ に属す正の等質関数であって $w(\lambda x) = \lambda^{\kappa+m} w(x)$ for $\lambda > 0$ を満たす. (2.2) の条件 (1) は $V(x)$ が one well ポテンシャルであることを保証する. これらの条件を満たすポテンシャル用いて $K(\hbar)$ を (1.1) で、 $H(\hbar)$ を (1.4) で定義する. さらに (2.2) に現れた $w(x)$ を用いて、

$$H_\kappa = -\Delta + a_0 w(x)$$

と言う Schrödinger 作用素を新たに用意しておく. 以上の条件 (2.1) と (2.2) のもとで、我々は評価 (1.3) の一般化かつ精密化である、 $\hbar \rightarrow 0$ における、Kac 作用素の固有値の分離に関する次の主定理を得た.

定理 2.1. $V(x)$ は (2.1) と (2.2) を満たすと仮定する. $\mu_1(\hbar)$ と $\mu_2(\hbar)$ は Section 1 と同様とし、 e_1 と e_2 は H_κ の最小固有値とその次の固有値とする. $\hbar \rightarrow 0$ の時、

$$\frac{\mu_2(\hbar)}{\mu_1(\hbar)} = \begin{cases} 1 - (e_2 - e_1)\hbar^\alpha + O(\hbar^{\kappa+m}), & \kappa + m < \sqrt{2}, \\ 1 - (e_2 - e_1)\hbar^\alpha - \Xi\hbar^{\alpha+\beta} + O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}), & \kappa + m \geq \sqrt{2}, \end{cases} \quad (2.3)$$

但し

$$\alpha = \frac{2(\kappa + m)}{\kappa + m + 2}, \quad \beta = \frac{2}{\kappa + m}$$

である. また $\Xi \geq 0$ は $(a_\alpha)_{|\alpha|=1}^\infty$ に依存した定数で、もし $V(x) = a_0 w(x)$ ならば $\Xi = 0$ である.

この主定理の証明は(1.5)を一般化する事と, $H(\hbar)$ の固有値を漸近展開する事, によって成される. よってまずこの2点を Section 3 と Section 4 とで, それぞれ定理として述べ, その後 Section 5 において証明を行う.

3. Helffer の Remark の一般化

この様な型の評価は最近 Helffer[2] によってはじめられ, Trotter-Kato 積公式の作用素ノルムに関する評価に用いられた. これを [3] と [4] はそれぞれ一般化した. 我々の考えている誤差評価は, 準古典的と言う点でこれらの結果と一致はしないが, 用いられている手法は交換子法と言う点で, [4]のそれを真似たものである.

定理3.1. $V(x)$ は条件(2.1)を満たすと仮定する. $\hbar \rightarrow 0$ の時次の評価が成立する.

$$\|\exp(-H(\hbar)) - K(\hbar)\| = O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}).$$

証明は次の主張から直ちに従う.

主張3.1. $V(x)$ は 定理 3.1.と同様とする. その時任意の $a > 0$ と十分小さい $t > 0$ に対して, $\hbar \in (0, 1]$ に関して一様に, 次の評価が成立する.

$$\begin{aligned} \|\exp(-\frac{t}{\hbar}H(\hbar)) - K(t; \hbar)\| &= \hbar^{-1} O(t^{1+a((\kappa+m)\wedge 2)}) \\ &+ O(t^{2-a(2-\kappa-m)_+}) + \hbar^{-1+(\rho-1)_+/\rho} O(t^{3-a(1-\kappa-m)_+-(\rho-1)_+/\rho}) \\ &+ \hbar^{-1} O(t^3) + \hbar^{(\rho-2)_+/\rho} O(t^{-2a(1-\kappa-m)_++2-(\rho-2)_+/\rho}) \\ &+ \hbar^{-1+(\rho-1)_+/\rho} O(t^{3-(\rho-1)_+/\rho}) + \hbar^{-1+2(\rho-1)_+/\rho} O(t^{3-2(\rho-1)_+/\rho}) \\ &+ \hbar^{2(\rho-1)_+/\rho} O(t^{3-2(\rho-1)_+/\rho}), \end{aligned}$$

但し

$$K(t; \hbar) = \exp(-\frac{t}{\hbar}V/2) \exp(-\frac{t}{\hbar}H_0(\hbar)) \exp(-\frac{t}{\hbar}V/2)$$

まず 主張 3.1 を認めた上で 定理 3.1を証明する.

定理 3.1 の証明.

主張 3.1から 我々は $\hbar$ に関する評価を $t = \hbar$ と置いて得ることが出来る. この時未定定数 a に関する束縛条件がつぎのようにさだまる.

$$\begin{aligned} a((\kappa+m)\wedge 2) &> 0, \quad -a(2-\kappa-m)_+ + 2 > 0, \\ -2a(1-\kappa-m)_+ + 2 &> 0, \quad -a(1-\kappa-m)_+ + 2 > 0. \end{aligned}$$

我々は出来るだけ大きく $\hbar$ のオーダーを定めるべきであるから $a = 1$ と取れば良い. $\square$

注意3.1. 主張 3.1 より我々は Trotter-Kato 積公式の作用素ノルムによる誤差評価も得ることができる. [2], [3] or [4].

$N \rightarrow \infty$ の時,

$$\|\exp(-tH(1)) - (K(t/N; 1))^N\| = \begin{cases} O(N^{-(\kappa+m)/2}), & m = 0, 1, \\ O(N^{-(2/\rho \wedge 1)}), & m \geq 2, \end{cases}$$

が成立する. この結果は論文[3]に対応するものであり, 論文[4]では, $m = 0, 1$ の場合は述べられていない.

以下この節においては, 主張 3.1 の証明の概略を述べる. 証明はいくつかの補題を示すことによって成される.

まずヘルダー連続性を持つ関数である $V_0(x)$ を, 軟化子で近似する. $\phi(x)$ を規格化された滑らかな非負の偶関数で, 単位球上にサポートを持つものとする. $0 < \epsilon \ll 1$ なる任意の定数に対して

$$V_{0,\epsilon}(x) = \epsilon^{-d} \int \phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) V_0(y) dy,$$

と定義して, $V_\epsilon(x) = V_{0,\epsilon}(x) + V_1(x)$ と置く. 次の恒等式に着目する.

$$\begin{aligned} \exp(-\frac{t}{\hbar} H(\hbar)) - K(t; \hbar) &= (\exp(-\frac{t}{\hbar} H(\hbar)) - \exp(-\frac{t}{\hbar} H_\epsilon(\hbar))) \\ &\quad + (\exp(-\frac{t}{\hbar} H_\epsilon(\hbar)) - K_\epsilon(t; \hbar)) \\ &\quad + (K_\epsilon(t; \hbar) - K(t; \hbar)) \\ &\equiv D_1(t; \hbar) + D_2(t; \hbar) + D_3(t; \hbar), \end{aligned} \quad (3.1)$$

但し

$$\begin{aligned} H_\epsilon(\hbar) &= H_0(\hbar) + V_\epsilon = -\hbar^2 \Delta + V_\epsilon(x), \\ K_\epsilon(\hbar) &= \exp(-V_\epsilon/2) \exp(-H_0(\hbar)) \exp(-V_\epsilon/2). \end{aligned}$$

主張 3.1 を証明するためには, $D_1(t; \hbar)$, $D_2(t; \hbar)$ そして $D_3(t; \hbar)$, それぞれのノルムを評価すればよい. その際には, $V_{0,\epsilon}$ の性質を知っておく必要がある.

補題 3.1. $V_{0,\epsilon}$ は次の諸性質を持つ.

- (1) $|V_{0,\epsilon}(x) - V_0(x)| \leq C\epsilon^{(\kappa+m)\wedge 2},$
- (2) $|\partial_j^\alpha V_{0,\epsilon}(x)| \leq C\epsilon^{-(|\alpha|-\kappa-m)_+}, \quad 1 \leq |\alpha| \leq 2,$

但し C は ϵ に無関係な定数である.

$D_1(t; \hbar)$ と $D_3(t; \hbar)$ のノルムの評価は 補題 3.1 を使うと以下のように得られる.

補題 3.2. $t \rightarrow 0$ の時, $\hbar \in (0, 1]$ に関して一様に, 次の評価が成立する.

$$\|D_1(t; \hbar)\| = \|D_3(t; \hbar)\| = \epsilon^{(\kappa+m)\wedge 2} \hbar^{-1} O(t).$$

証明には次の等式に注意すれば良い.

$$\begin{aligned} \exp(-\frac{t}{\hbar} H_\epsilon(\hbar)) - \exp(-\frac{t}{\hbar} H(\hbar)) &= \frac{1}{\hbar} \int_0^t \exp(-\frac{s}{\hbar} H_\epsilon(\hbar)) (V_0(x) - V_{0,\epsilon}(x)) \exp(-\frac{(t-s)}{\hbar} H_\epsilon) ds, \\ \exp(-\frac{t}{\hbar} V_\epsilon/2) - \exp(-\frac{t}{\hbar} V/2) &= \frac{1}{2\hbar} \int_0^t \exp(-\frac{s}{\hbar} V_{0,\epsilon}/2) (V_0(x) - V_{0,\epsilon}(x)) \exp(-\frac{(t-s)}{\hbar} V_{0,\epsilon}/2) ds. \quad \square \end{aligned}$$

次に $D_2(t; \hbar)$ を評価しよう.

補題3.3. $t \rightarrow 0$ の時, $\hbar \in (0, 1]$ に関して一様に, 次の評価が成立する.

$$\begin{aligned} \|D_2(t; \hbar)\| &= \epsilon^{-(2-\kappa-m)+} O(t^2) + \epsilon^{-(1-\kappa-m)+} \hbar^{-1+(\rho-1)+/\rho} O(t^{3-(\rho-1)+/\rho}) \\ &\quad + \epsilon^{-2(1-\kappa-m)+} \hbar^{-1} O(t^3) + \hbar^{(\rho-2)+/\rho} O(t^{2-(\rho-2)+/\rho}) \\ &\quad + \hbar^{-1+(\rho-1)+/\rho} O(t^{3-(\rho-1)+/\rho}) + \hbar^{-1+2(\rho-1)+/\rho} O(t^{3-2(\rho-1)+/\rho}) \\ &\quad + \hbar^{2(\rho-1)+/\rho} O(t^{3-2(\rho-1)+/\rho}). \end{aligned}$$

証明の概略. 微分と交換子の計算により,

$$\frac{d}{dt} K_\epsilon(t; \hbar) = -\frac{1}{\hbar} H_\epsilon(\hbar) K_\epsilon(t; \hbar) - R_\epsilon(t; \hbar).$$

なる関係式が得られる. この微分方程式を解くことによって,

$$D_2(t; \hbar) = \exp\left(-\frac{t}{\hbar} H_\epsilon(\hbar)\right) - K_\epsilon(t; \hbar) = \int_0^t \exp\left(-\frac{(t-s)}{\hbar} H_\epsilon(\hbar)\right) R_\epsilon(s; \hbar) ds, \quad (3.2)$$

が得られる. 但し

$$\begin{aligned} R_\epsilon(t; \hbar) &= R_{1,\epsilon}(t; \hbar) + R_{2,\epsilon}(t; \hbar), \\ R_{1,\epsilon}(t; \hbar) &= \left[\exp\left(-\frac{t}{\hbar} V_\epsilon/2\right), H_0(\hbar)/\hbar \right] \exp\left(-\frac{t}{\hbar} H_0(\hbar)\right) \exp\left(-\frac{t}{\hbar} V_\epsilon/2\right), \\ R_{2,\epsilon}(t; \hbar) &= \exp\left(-\frac{t}{\hbar} V_\epsilon/2\right) \left[\exp\left(-\frac{t}{\hbar} H_0(\hbar)\right), V_\epsilon/(2\hbar) \right] \exp\left(-\frac{t}{\hbar} V_\epsilon/2\right), \end{aligned}$$

である. 一方, 任意の定数 $0 < a < \rho$ に対して

$$\exp\left(-\frac{t}{\hbar} V_\epsilon\right) \langle x \rangle^a \leq C \left(\frac{\hbar}{t}\right)^{a/\rho}, \quad t \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

が成立する. また Schrödinger 作用素の一般的性質として次の補題が成り立つ.

補題3.4. $l \geq 0$ とする. $t \rightarrow 0$ の時,

- (1) $\|\langle x \rangle^{-l} \exp\left(-\frac{t}{\hbar} H_0(\hbar)\right) \langle x \rangle^l\| = O(1).$
- (2) $\|\langle x \rangle^{-l} \exp\left(-\frac{t}{\hbar} H_0(\hbar)\right) D_j \langle x \rangle^l\| = \hbar^{-1/2} O(t^{-1/2}).$

(3.3) と 補題 3.4 を使うことにより $R_\epsilon(t; \hbar)$ に対して次の評価を得る.

$$\begin{aligned} \|R_\epsilon(t; \hbar)\| &= \epsilon^{-(2-\kappa-m)+} O(t) + \epsilon^{-(1-\kappa-m)+} \hbar^{-1+(\rho-1)+/\rho} O(t^{2-(\rho-1)+/\rho}) \\ &\quad + \epsilon^{-2(1-\kappa-m)+} \hbar^{-1} O(t^2) + \hbar^{(\rho-2)+/\rho} O(t^{1-(\rho-2)+/\rho}) \\ &\quad + \hbar^{-1+(\rho-1)+/\rho} O(t^{2-(\rho-1)+/\rho}) + \hbar^{-1+2(\rho-1)+/\rho} O(t^{2-2(\rho-1)+/\rho}) \\ &\quad + \hbar^{2(\rho-1)+/\rho} O(t^{2-2(\rho-1)+/\rho}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

(3.4) と (3.2) とから, 我々は 補題 3.3 を得る. $\square$

補題 3.2 と 補題 3.3 において, $\epsilon = t^a$ において良いから, これで 主張 3.1 が得られた. $\square$

4. Schrödinger 作用素の固有値の漸近展開

この節において $H(\hbar)$ の固有値を漸近展開する. $H(\hbar)$ の固有値を重複度をこめて数えたものを $(E_k(\hbar))_{k=1}^{\infty}$ とする. 同様に H_{κ} の固有値を重複度をこめて数えたものを $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ とする. 一方重複度をこめないで数えたものを $(\tilde{e}_j)_{j=1}^{\infty}$ として, それぞれの重複度を m_j とする. この時次の定理が成立する.

定理 4.1. $V(x)$ は (2.1) and (2.2) を満たすとする. この時 m_j 個の固有値 $E_{k(j)}(\hbar)$ が存在して, $\hbar \rightarrow 0$ の時, 次を満たす.

$$E_{k(j)}(\hbar) \sim \hbar^{\alpha} \left(\tilde{e}_j + \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{k(j)} \hbar^{\beta l} \right),$$

但し

$$\alpha = \frac{\kappa + m}{\kappa + m + 2}, \quad \beta = \frac{2}{\kappa + m + 2},$$

であって, $c_l^{k(j)}$ は (2.2) の (3) に現れる $(a_{\alpha})_{|\alpha|=0}^{\infty}$ に依存したある定数である.

このような定理は既に [6] などによって, 様々なポテンシャルのクラスに対して証明されている. しかしここでは彼らの結果を, 特異点付近でのポテンシャルの正則性に関して, 拡張することが必要である. 但し証明方法は, Simon [6] のそれを少し変更したにすぎない. 以下 定理 4.1 の証明の概略を述べる.

まず漸近展開の最初の項を求めよう.

主張 4.1. 任意の $\tilde{e}_j$ に対して, 次を満たす $H(\hbar)$ の固有値が m_j 個存在する.

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{E_{k(j)}}{\hbar^{\alpha}} = \tilde{e}_j,$$

但し α は 定理 4.1 で定義した定数である.

証明は Simon の証明方法と同様に出来る. あとは固有値が $\hbar^{\beta}$ のオーダーで漸近展開出来ることを示せば良い. それには次の補題が重要である.

補題 4.1.

$$P_j(\hbar) = \frac{i}{2\pi} \oint_{|h^{\alpha} e_j - z| = h^{\alpha} \epsilon} (H(\hbar) - z)^{-1} dz,$$

と置く. 但し $\epsilon > 0$ は, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - h^{\alpha} \tilde{e}_j| < h^{\alpha} \epsilon\}$, なるディスク内に $(E_{k(j)}(\hbar))$ 以外の固有値が入らない様に, 十分小さく取る. $\hbar \rightarrow 0$ の時, $\|(1 - P_j(\hbar))\psi_k\| \rightarrow 0$, が任意の j と $k \in (k_1(j), k_2(j), \dots, k_{m_j}(j))$ に対して成り立つ.

この補題を使って, $\tilde{e}_j$ が重複度 1 の場合を証明する. 重複している場合も, ほぼ同様に証明できるので省略する. $U(\hbar)f(x) = \hbar^{d\beta}f(\hbar^\beta x), f \in L^2$ と定義して,

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\hbar) &= \hbar^{-\alpha}U(\hbar)H(\hbar)U(\hbar)^{-1}, \\ \tilde{P}_j(\hbar) &= \frac{i}{2\pi} \oint_{|e_j - z|=\epsilon} (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} dz,\end{aligned}$$

と置く. 補題 4.1 より, $\langle \phi_k, \tilde{P}_j(\hbar)\phi_k \rangle$ は $\hbar \rightarrow 0$ の時 1 に収束する. 但し ϕ_k は, 固有値 $e_k = \tilde{e}_j$ を持つ H_κ の固有関数である. よって次の自明な関係式が成立する.

$$\hbar^{-\alpha}E_{k(j)}(\hbar) = \frac{\langle \tilde{H}(\hbar)\phi_k, \tilde{P}_j(\hbar)\phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \tilde{P}_j(\hbar)\phi_k \rangle}.$$

それ故固有値の漸近展開を得るには, レゾルベントを展開すれば良い.

$$\hbar^{-\alpha}U(\hbar)H_\kappa(\hbar)U(\hbar)^{-1} = H_\kappa$$

に注意すれば, 次の様に展開できるのが分かる.

$$(\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1}\phi_k = \sum_{n=0}^{l-1} t_n(\hbar) + r_l(\hbar),$$

但し

$$\begin{aligned}t_n(\hbar) &= (-1)^n(H_\kappa - z)^{-1}[\tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1}]^n\phi_k, \\ r_l(\hbar) &= (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1}[\tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1}]^l\phi_k, \\ \tilde{V}(\hbar^\beta x) &= \hbar^{-\alpha}(V(\hbar^\beta x) - a_0 w(\hbar^\beta x)).\end{aligned}$$

$t_n(\hbar)$ と $r_l(\hbar)$ を, それぞれ評価する. $l=2$ の場合を考えれば, 一般の場合の証明もほとんど同じ様にできる. 次の様な, 滑らかなカットオフ関数 $\chi(x)$, を用意する.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

そして $\chi_\hbar = \chi(\hbar^\beta x)$ と置く. $V_0(x)$ に対して原点付近で漸近展開を仮定したから $\hbar \rightarrow 0$ で

$$\chi_\hbar \tilde{V} \sim \hbar^{-\alpha} w(\hbar^\beta x) \sum_{|\gamma|=1}^{\infty} a_\gamma \hbar^{|\gamma|} x^\gamma$$

が成立する. ここで $\hbar \rightarrow 0$ の時 $\chi_\hbar \tilde{V}(\hbar^\beta x) \rightarrow \tilde{V}(0)$ であることを使った. これより $\chi_\hbar \tilde{V}$ は次の様に表されるとして良い.

$$\chi_\hbar \tilde{V} = \chi_\hbar Q_2(\hbar; x) + R_2(\hbar; x),$$

但し

$$Q_2(\hbar; x) = \hbar^{-\alpha} w(\hbar^\beta x) \sum_{|\alpha|=1} \hbar^{|\alpha|\beta} x^\alpha.$$

また $R_2(\hbar, x)$ は

$$|R_2(\hbar; x)| \leq C_R \hbar^{2\beta} |x|^{(\kappa+m+2)}, \quad (4.1)$$

を満たす. 但し C_R はある正の定数. さらに

$$\begin{aligned} \hat{t}_1(\hbar) &= (-1)(H_\kappa - z)^{-1} \chi_\hbar \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \phi_k, \\ \hat{r}_2(\hbar) &= (-1)^2 (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} [\chi_\hbar \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1}]^2 \phi_k, \end{aligned}$$

と置く. ここで, $\langle x \rangle^a (H_\kappa - z) \langle x \rangle^{-a}$ が, 任意の $a > 0$ に対して有界作用素である事と,

$$\|\langle x \rangle^{-(\kappa+m+1)} \chi_\hbar \tilde{V}\| = O(\hbar^\beta),$$

である事に注意すると

$$\begin{aligned} &\|\hat{r}_l(\hbar)\| \\ &= \|(\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \langle x \rangle^{\kappa+m+1} (\langle x \rangle^{-(\kappa+m+1)} \chi_\hbar \tilde{V})(H_\kappa - z)^{-1} \langle x \rangle^{-(\kappa+m+1)} \\ &\quad (\langle x \rangle^{-(\kappa+m+1)} \chi_\hbar \tilde{V}) \langle x \rangle^{2(\kappa+m+1)} (H_\kappa - z)^{-1} \langle x \rangle^{-2(\kappa+m+1)} \langle x \rangle^{2(\kappa+m+1)} \phi_k\| \\ &= O(\hbar^{l\beta}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

一方次の等式は自明である.

$$\begin{aligned} r_2(\hbar) - \hat{r}_2(\hbar) &= (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} (1 - \chi_\hbar) \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \phi_k \\ &\quad + (-1)^l (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \chi_\hbar \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} (1 - \chi_\hbar) \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \phi_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

ϕ_k の指数型減衰性から

$$\|(1 - \chi_\hbar) |x|^b \phi_k\| = O(\hbar^\infty), \quad (4.4)$$

が従う. (4.4) より

補題4.2. $\|r_2(\hbar) - \hat{r}_2(\hbar)\| = O(\hbar^{2(m+2)\beta-2\epsilon}),$

但し

$$\epsilon = \begin{cases} (\alpha - \beta\rho)_+, & \rho < \kappa + m, \\ 0, & \rho \geq \kappa + m, \end{cases} \quad 2(m+2)\beta - 2\epsilon > 2\beta.$$

証明. 次の様に $r_2(\hbar) - \hat{r}_2(\hbar)$ を書き直す.

$$\begin{aligned} r_2(\hbar) - \hat{r}_2(\hbar) &= R(\hbar) + S(\hbar), \\ R(\hbar) &= (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \chi_\hbar \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} (1 - \chi_\hbar) \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \phi_k, \\ S(\hbar) &= (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} (1 - \chi_\hbar) \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \tilde{V}(H_\kappa - z)^{-1} \phi_k. \end{aligned} \quad (4.5)$$

まず $R(\hbar)$ 項を評価する. $R(\hbar)$ は次の様書き直せる.

$$\begin{aligned} R(\hbar) &= R_1(\hbar) + R_2(\hbar), \\ R_1(\hbar) &= (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \chi_{\hbar} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} \tilde{V} [-\chi_{\hbar}, (H_{\kappa} - z)^{-1}] \phi_k, \\ R_2(\hbar) &= (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \chi_{\hbar} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} (1 - \chi_{\hbar}) \phi_k. \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.4) より $\|R_2(\hbar)\| = O(\hbar^{\infty})$. 一方

$$[-\chi_{\hbar}, (H_{\kappa} - z)^{-1}] = (H_{\kappa} - z)^{-1} [H_{\kappa}, \chi_{\hbar}] (H_{\kappa} - z)^{-1}$$

を $R_1(\hbar)$ に代入すると,

$$\begin{aligned} R_1(\hbar) &= R_{11}(\hbar) + R_{12}(\hbar), \\ R_{11}(\hbar) &= (H(\hbar) - z)^{-1} \chi_{\hbar} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} \\ &\quad \times 2D_j \hbar^{\beta} (D_j \chi)(\hbar^{\beta} x) (H_{\kappa} - z)^{-1} \phi_k, \\ R_{12}(\hbar) &= (\tilde{H}(\hbar) - z)^{-1} \chi_{\hbar} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} \\ &\quad \times \hbar^{2\beta} (D_j^2 \chi)(\hbar^{\beta} x) D_j (H_{\kappa} - z)^{-1} \phi_k. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$R_{11}(\hbar)$ のみ評価する. $R_{12}(\hbar)$ の評価は $R_{11}(\hbar)$ と同様にできる. $1 - \chi_{\hbar}$ と $(H_{\kappa} - z)^{-1}$ とで交換子を取る. $R_{11}(\hbar)$ は

$$\begin{aligned} R_{11}(\hbar) &= (H(\hbar) - z)^{-1} \chi_{\hbar} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} 2D_j \hbar^{\beta} [(D_j^2 \chi)(\hbar^{\beta} x), (H_{\kappa} - z)^{-1}] \phi_k \\ &\quad + (H(\hbar) - z)^{-1} \chi_{\hbar} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} \tilde{V} (H_{\kappa} - z)^{-1} 2D_j \hbar^{\beta} (H_{\kappa} - z)^{-1} (D_j^2 \chi)(\hbar^{\beta} x) \phi_k \\ &\equiv R_{11}^1(\hbar) + R_{11}^2(\hbar), \end{aligned} \quad (4.8)$$

と書き直せる.

$$\text{supp } (D_j \chi)(\hbar^{\beta} x) \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \geq \hbar^{-\beta}/2\},$$

であるから任意の $a > 0$ に対して, (4.4) と同様に

$$\||x|^a (D_j \chi)(\hbar^{\beta} x) \phi_k\| = O(\hbar^{\infty}), \quad (4.9)$$

が言える. (4.9) より

$$\|R_{11}^2(\hbar)\| = O(\hbar^{\infty}). \quad (4.10)$$

$R_{11}^1(\hbar)$ の評価に際しては, $\langle x \rangle^l (H_{\kappa} - z)^{-1} D_j \langle x \rangle^{-l}$ が任意の $l > 0$ に対して有界作用素である事と,

$$|\tilde{V}| \leq C \hbar^{-\epsilon} \langle x \rangle^{\gamma},$$

但し

$$\epsilon = \begin{cases} (\alpha - \beta\rho)_+, & \rho < \kappa + m, \\ 0, & \rho \geq \kappa + m, \end{cases} \quad \gamma = \max(\kappa + m + 1, \rho),$$

である事と, さらに $\chi_{\hbar} \tilde{V} \leq \hbar^{\beta} \langle x \rangle^{\kappa+m+1}$ である事に注意する. 以上の事実から

$$\begin{aligned} \|R_{11}^1(\hbar)\| &= \|(H(\hbar) - z)^{-1} \chi_{\hbar} \tilde{V} (\langle x \rangle^{-\gamma} \langle x \rangle^{\gamma}) (H_{\kappa} - z)^{-1} \\ &\quad \times \langle x \rangle^{-\gamma} \tilde{V} \langle x \rangle^{-\gamma} \langle x \rangle^{2\gamma} (H_{\kappa} - z)^{-1} \hbar^{\beta} 2D_j \langle x \rangle^{-2\gamma} \langle x \rangle^{2\gamma} (D_j^2 \chi)(\hbar^{\beta} x) \\ &\quad \times (H_{\kappa} - z)^{-1} \langle x \rangle^{-2\gamma} \langle x \rangle^{2\gamma} (\hbar^{2\beta} (D_k^2 D_j \chi)(\hbar^{\beta} x) + \hbar^{\beta} D_k (D_k D_j \chi)(\hbar^{\beta} x)) \langle x \rangle^{-2\gamma} \langle x \rangle^{2\gamma} \phi_k\| \\ &= O(\hbar^{3\beta-\epsilon}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

が従う. この評価は, $3\beta - \epsilon < 2\beta$ であると言う点で, 必要な条件を満足していない. しかし $1 - \chi_{\hbar}$ と $(H_{\kappa} - z)^{-1}$ の間で, 交換子をまだ2回しか取っていないことに注意する. $1 - \chi_{\hbar}$ と $(H_{\kappa} - z)^{-1}$ の間で, $(m+2)$ 回, 交換子を取れば, (4.4) ~ (4.11) を得たのと同様の議論を用いて,

$$\|R_{11}^1(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+3)\beta-\epsilon}), \quad (4.12)$$

なる評価を得る. $(m+3)\beta - 2\epsilon > 2\beta$ である. (4.8) と (4.10) ~ (4.12) とを用いて

$$\|R_{11}(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+3)\beta-\epsilon}). \quad (4.13)$$

$$\|R_{12}(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+4)\beta-\epsilon}). \quad (4.14)$$

(4.13) と (4.14) とから $\|R_1(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+3)\beta-\epsilon})$. よって (4.6) より

$$\|R(\hbar)\| = O(\hbar^{(m+3)\beta-\epsilon}). \quad (4.15)$$

$S(\hbar)$ を評価する際には, $S(\hbar)$ が $\tilde{V}$ を2個含んでいるので, 少し注意する必要がある. $1 - \chi_{\hbar}$ と $(H_{\kappa} - z)^{-1}$ の間で, $2(m+2)$ 回交換子をとれば, $R(\hbar)$ 項の評価の仕方をまねて

$$\|S(\hbar)\| = O(\hbar^{2(m+2)\beta-2\epsilon}), \quad (4.16)$$

を得る. $2(m+2)\beta - 2\epsilon > 2\beta$ である. (4.5), (4.15) と (4.16) から $\|r_2(\hbar) - \hat{r}_2(\hbar)\| = O(\hbar^{2(m+2)\beta-2\epsilon})$. $\square$

補題 4.2 より

$$\|r_2(\hbar) - \hat{r}_2(\hbar)\| = o(\hbar^{2\beta}).$$

よって (4.2) から, $\|r_2(\hbar)\| = O(\hbar^{2\beta})$. 同様にして $\|t_1(\hbar) - \hat{t}_1(\hbar)\| = o(\hbar^{2\beta})$, が示せる.

$$\tilde{t}_1(\hbar) = (-1)(H_{\kappa} - z)^{-1} Q_2(\hbar; x) (H_{\kappa} - z)^{-1} \phi_k,$$

と置くと, (4.1) から $\|\tilde{t}_1(\hbar) - \hat{t}_1(\hbar)\| = O(\hbar^{2\beta})$, が示せる. $\tilde{t}_1(\hbar)$ は, $\hbar^{\beta}$ に関して多項式であるから, これで固有値が, $\hbar^{\beta}$ に関する漸近展開を持つことが示された. $\square$

5. 定理2.1の証明

定理 3.1 と 定理 4.1 を使って 定理 2.1 を証明する.

証明. 定理 3.1 と最大最小原理とから,

$$\exp(-E_j(\hbar)) - \mu_j(\hbar) = O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}), \quad \hbar \rightarrow 0, \quad j = 1, 2,$$

が従う。この評価から

$$\begin{aligned}\mu_2(\hbar)/\mu_1(\hbar) &= \exp(-(E_2(\hbar) - E_1(\hbar))) + O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}) \\ &= 1 - (E_2(\hbar) - E_1(\hbar)) + O(\hbar^{(\kappa+m)\wedge 2}), \quad \hbar \rightarrow 0,\end{aligned}$$

を得る。これは Helffer の結果 (1.3) の一般化になっている。 $H(\hbar)$, H_κ の最小固有値は重複していないという既知の事実と、定理 4.1 とから

$$\begin{aligned}E_1(\hbar) - E_2(\hbar) &\sim (e_1 - e_2)\hbar^\alpha + (c_1^1 - c_1^2)\hbar^{\alpha+\beta} \\ &\quad + (c_2^1 - c_2^2)\hbar^{\alpha+2\beta} + O(\hbar^{\alpha+3\beta}),\end{aligned}$$

を得る。但し $\tilde{e}_j = e_j, j = 1, 2$ を使った。ここで、 $\kappa + m = \alpha + \beta$ である時 $\kappa + m = \sqrt{2}$ であることに注意すれば、定理 2.1 における評価が従う。 $\square$

自明でない例 $V(x) = |x|^\sigma \sqrt{1 + |x|^2}$, $0 < \sigma < \infty$, なるポテンシャルを持つ Kac 作用素を考える。カットオフ関数 $\chi(x)$ を, $0 \leq \chi(x) \leq 1$ かつ $\text{supp } \chi(x) \in \{|x| \leq 1\}$, を満たすように取って, $V_1(x) = (1 - \chi(x))V(x)$ and $V_0(x) = \chi(x)V(x)$ と置く。 $V(x)$ は (2.1) と (2.2) を満たす。但しこの時 $m = [\sigma]$, $\kappa = \sigma - m$ and $\rho = \sigma + 1$. 定理 2.1 より $\hbar \rightarrow 0$ の時,

$$\mu_2(\hbar)/\mu_1(\hbar) = \begin{cases} 1 - (e_2 - e_1)\hbar^\alpha + O(\hbar^\rho), & \sigma < \sqrt{2}, \\ 1 - (e_2 - e_1)\hbar^\alpha - \Xi\hbar^{\alpha+\beta} + O(\hbar^{\rho\wedge 2}), & \sigma \geq \sqrt{2}, \end{cases}$$

が成立する。但し e_1 と e_2 は $-\Delta + |x|^\sigma$ の最小固有値とその次の固有値で, $\alpha = 2\sigma/(\sigma+2)$, $\beta = 2/(\sigma+2)$.

参考文献

- [1] Helffer, B., Universal estimate of the gap for the Kac operator in the convex case, Commun. Math. Phys. 161 (1994), 631–642.
- [2] Helffer, B., Around the transfer operator and the Trotter-Kato formula, Operator theory: Advances and Applications, Vol 78, Basel: Birkhäuser Verlag, 161 – 174, 1995.
- [3] Ichinose, T., Takanobu, S., Estimate of the difference between the Kac operator and the Schrödinger semigroup, Commun. Math. Phys. (to appear)
- [4] Doumeki, A., Ichinose, T., Tamura, H., Error bounds on exponential product formulas for Schrödinger operators, J. Math. Soc. Japan (to appear)
- [5] Kac, M., Mathematical Mechanics of Phase Transitions, 1966 Brandeis Lectures, Gordon and Breach, 1968.
- [6] Simon, B., Semiclassical analysis of low lying eigenvalues I. Non degenerate minima: Asymptotic expansion, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. 38 (1983), 295 – 307.