

23. Elimination of Fast Variables in Stochastic Processes

湘北短大・電子 落 合 萌

東北大・工 山 崎 義 武

多体系の緩和過程を確率論のダイナミックスで論じ、集団運動の径路とそのまわりのゆらぎのふるまいを調べる。scaling expansion method¹⁾によりマスター方程式に含まれる各種 fast variables をつぎつぎと消去し、非平衡熱力学で議論できる slow mode pattern が形成されるまでの道筋を整理して論ずる。

系に含まれる各種の時間・空間的運動モードからわれわれの必要とする現象論に従うふるまいを導き出す試みは多数あるが、その手法は力学の運動論から出発する方法と確率論で確率の時間発展を追う立場とに大別される。前者では、Liouville 方程式を出発点とし、初期混沌状態、運動論的段階、流体力学的段階を経て熱平衡状態へ至る道筋でそれぞれの段階に特徴的パターンを形成する運動方程式を組織的に導出する手法が議論される。一方、確率過程論で同種の問題を扱う試みも自然な着想だが、前者に比べ多いとはいえない。とくに、時・空的にあらゆるモードを含む微視的なパターンの中から巨視的あるいは現象論的なパターンに達するまでを、前者にみられるような高い完成度と一般性を持たせて扱った例は知らない。確率論でこれを組織的に論じた最初の例は van Kampen²⁾にみられるが、力学的扱いの運動論的段階に相当する部分までが決められただけで、流体力学および非平衡熱力学で論ぜられる部分に関する事情には触れられていない。当初、van Kampen は²⁾は基本式を Kramers-Moyal 展開式に採ったが、後に gain-loss type のマスター方程式³⁾に換えている。このことからわかるように、van Kampen の用いた系のサイズの逆ベキで基本式を展開する方法は得られた物理的結果の意義は高く、評価されるべきであるが、スケーリングによる粗視化の思想を積極的にとり込み一般化を進めたものとはいえない。考え方にはまだ整理される余地が残っているように思えた。

本報告では、確率過程論の立場に立ち、広義のスケーリング法を導入し、粗視化を段階的にくりかえすという方法で系の緩和過程をさらに一般的に取扱う手法を提供した⁴⁾。

系に固有な巨視的サイズで書け、見たい現象を特徴づけるパラメーターによって確率変数をスケールし、新しい変数で閉じた式が得られ、これがそのスケーリングに対応した見たい現象を与える式であれば、この意味でスケーリング操作は粗視化と等価であることに着目する。われわれはこの着想の下に、観たいサイズより細かい現象を消去することで、あらゆる尺度を含む

モードの中から目的とする現象を記述する式だけを抽出することを考える。

巨視的変数 A はあらゆる時・空的模式から成り立っているが、これを調べたいサイズのベキ則で

$$A = \sum_{\nu} \Omega^{\nu} \alpha_{(\nu)} \quad (1)$$

と書く。 $\alpha_{(\nu)}$ はサイズ Ω^{ν} でスケールしたときの不変量で、そのふるまいを調べたい物理量の一つに相当する。 $P(A, t)$ を確率密度関数、 $W(A|A')$ を A' から A への遷移確率とすれば、マスター方程式は

$$\dot{P}(A, t) = \int \{W(A|A') P(A', t) - W(A'|A) P(A, t)\} dA' \quad (2)$$

で書ける。いま、巨視的変数の観たい特徴サイズを決定論的径路とそのまわりのゆらぎを不変量とするように選んで、

$$\frac{A}{\Omega} \equiv a = f(t) + \Omega^{-\frac{1}{2}} u$$

としよう。 $A \rightarrow A'$ のジャンプ・プロセスを $\Delta \ll \Omega$ として

$$\frac{A'}{\Omega} \equiv a' = f + \Omega^{-\frac{1}{2}} u + \Omega^{-1} \Delta .$$

この例では(1)で3種の異ったサイズ Ω , $\Omega^{\frac{1}{2}}$, Ω^0 が入り混っている。(1)式を観たい不変量で変換し、新変数で表わされたマスター方程式を Δ について粗視化し、Kramers-Moyal 展開式

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(u, t)}{\partial t} - \Omega^{\frac{1}{2}} \frac{df}{dt} \frac{\partial P(u, t)}{\partial u} \\ = \sum \frac{(-\Omega^{-\frac{1}{2}})^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \mu_n(f + \Omega^{-\frac{1}{2}} u) P(u, t) , \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。(3)は従来の展開式と異なり、粗視化の方法が明らかにされている点で新しい。(3)は f , u が共存し、それぞれについて閉じていない。(3)で時間をスケールし直し、 u を粗視化するスキームで、巨視的方程式

$$\frac{df}{d\tau} = \mu_1^{(0)}(f) \quad (4)$$

を得る。ゆらぎの大きさの項を拾えば、線型化された Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial P(u, \tau)}{\partial \tau} = -\mu_1^{(1)}(f) \frac{\partial}{\partial u} u P(u, \tau) + \frac{1}{2} \mu_2^{(0)}(f) \frac{\partial^2}{\partial u^2} P(u, \tau), \quad (5)$$

が得られる。(4)により決定論的径路 f が決り、 f を知ることににより(5)でゆらぎのふるまいが定められる。この事実は Bogoliubov の汎関数法⁵⁾に見られる階級制度の下剋上そのもので、確率過程論の立場でも、等価な解釈が与えられる結果が見出されたことは新しく、かつ興味深い。つぎに、マスター方程式(1)をスケール不変量 f , u および f の確率密度関数 $P(f, t)$ で書き換え、時間に関するスケール変換を行えば、ゆらぎのプロセスを粗視化することにより $P(f, t)$ で閉じた式を導出すれば、

$$\frac{\partial P(f, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial f} \{ \dot{f} P(f, \tau) \} \quad (6)$$

が得られる。(6)はまさに確率密度空間における連続の式である。流体力学的ステージのゆらぎのサイズを知りたいければ直ちに

$$\frac{\partial P(f, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial f} \mu_1(f) P(f, \tau) + \frac{\Omega^{-1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial f^2} \mu_2(f) P(f, \tau) \quad (7)$$

を拾うことができる。スケーリングの思想を導入し、確率論における緩和過程の一般化を行うことによって初期の目的を果すことができたことは新しい。ここでもやはり現象の階級制度が成り立ち、しかもそれが下剋上の構造を持つことが明らかにされたことは重要であろう。

参 考 文 献

- 1) M. Ochiai; Lett. Nuovo Cimento **40** (1984) 433.
- 2) N. G. van Kampen; Can. J. Phys. **39** (1961) 551.
- 3) N. G. van Kampen; Adv. Phys. Chem. **34** (1976) 245.
- 4) M. Ochiai and Y. Yamazaki; to be published.
- 5) N. N. Bogoliubov; J. Phys. (U. S. S. R) **10** (1946) 256, 265.