

標本函数系と Hilbert 空間 L^2 上の直交系

東京工業大学名誉教授

梅垣壽春 (HISAHARU UMEGAKI)

§1. まえがき

表記の標本函数系 (Sampling Functions の系) は, 情報理論を創造した C.E.Shannon がその理論の一つの柱となる time-parameter $t \in \mathbb{R} (= (-\infty, \infty))$ 上の信号函数の把握・解析などを含めて論じたものであり, それは画期的な概念で情報・信号解析の重要な base となっている. これらを数学的見地に立って論ずる場合, 函数解析・Fourier 解析の興味ある展開がなされる.

本論で扱われるエネルギー有限な信号函数 $f, g, \dots$ とは, real line $\mathbb{R}$ 上で a.e. 定義され且つ 2 乗可積分な複素数値函数全体の集団, つまりこれ等が Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ を構成している. その様な数理的な base に立って所論を構築する. 文末に記載した文献は本論を記述するに最も参考とした論文, 書物である. 本論は Wavelet 直交系構成への一道程である. Wavelets の概念を修得するに文献 [2] は大変理解し易いことを茲に記し度い.

§2. 標本函数 (Sampling functions)

標本函数 $S_\lambda(\cdot)$ は次の様にして与えられる: 実数 $\lambda > 0$ を fix し

$$S_\lambda(t) = \begin{cases} 2\lambda \frac{\sin 2\pi\lambda t}{2\pi\lambda t} & (0 \neq t \in \mathbb{R}) \\ 2\lambda & (t = 0). \end{cases} \quad (2.1)$$

一般に $f \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換は

$$\hat{f}(\omega) = \text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \quad (2.2)$$

の定式を用いる. 標本函数は $S_\lambda(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ で, これの Fourier 変換は

$$\hat{S}_\lambda(\omega) = 1_{[-\lambda, \lambda]}(\omega) \quad (\text{区間 } [-\lambda, \lambda] \text{ 上の定義函数}). \quad (2.3)$$

この標本函数 $S_\lambda(\cdot)$ について, 数学的立場で, 先ず興味を呼ぶものは次に述べる Hilbert 空間 BL_λ である.

周波数帯が区間 $[-\lambda, \lambda]$ に限定されている信号函数 (: Band Limited in $[-\lambda, \lambda]$) の全体を BL_λ で表す:

$$BL_\lambda = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \hat{f}(\omega) = 0 \ (\forall \omega \ (|\omega| > \lambda))\}.$$

このとき区間 $[-\lambda, \lambda]$ を周波数帯 (bandwidth of frequency) という。これらの記号設定の基で次の定理を得る。

〔註〕 以下、本 § で述べる定理 2.1~3 は既知であり、前論文 [6, 7] などでも既に示したものであるが、§3 の所論展開上の関連で必要とするので、ここで再録し証明無しで述べ度い。

〈定理 2.1〉 任意の $\lambda > 0$ に対して定まる空間 BL_λ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間、従って、それ自身で BL_λ は Hilbert 空間となる。

〈定理 2.2〉 (i) $K_\lambda(s, t) \triangleq S_\lambda(s - t)$ ($s, t \in \mathbb{R}$) とおくと、2 変数函数 $K_\lambda(s, t)$ は再生核 (RK と略記) の条件を満たす。

(ii) (Yao [8]) Hilbert 空間 BL_λ は函数 $K_\lambda(\cdot, \cdot)$ を RK とする再生核 Hilbert 空間 RKHS である:

$$BL_\lambda = H(K_\lambda).$$

一方標本関数 $S_\lambda(\cdot)$ を用いて

$$E_\lambda^S f = S_\lambda * f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \lambda \geq 0$$

(* は convolution 積) とする。このとき

〈定理 2.3〉 (Umegaki [7]) (i) E_λ^S ($\lambda \geq 0$) は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間 BL_λ 上への射影作用素である。

(ii) 射影作用素の一徑族 $\{E_\lambda^S\}_{\lambda \geq 0}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の Spectral Resolution である。

(iii) $\{E_\lambda^S\}$ によるスペクトル積分は

$$P^2 \left(= \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{d^2}{dt^2} \right) = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda^S.$$

茲で自己共役作用素 P は Schrödinger 対 (P, Q) の P である。

ここで Shannon の展開定理を Hilbert 空間上の基本収束定理の帰結として次の定理の形で表示しよう:

$$\varphi_n(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} S_\lambda \left(t - \frac{n}{2\lambda} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

とおき、これを標本関数系という。この Fourier 変換は

$$\widehat{\varphi}_n(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp \left(-\frac{2\pi i n \omega}{2\lambda} \right) \widehat{S}_\lambda(\omega).$$

これを用いて

〈定理 2.4〉 (標本展開定理) (i) 標本函数系 $\{\varphi_n\}$ は CONS in BL_λ , 茲で CONS は Complete OrthoNormal System の略記。

(ii) 全ての信号函数 $f \in BL_\lambda$ は $\text{CONS}\{\varphi_n\}$ に関する Fourier 展開によって, 次の (1), (2) の極限式によって表示される.

$$(1) \lim \left\| f - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sum_{n=-N}^N f\left(\frac{n}{2\lambda}\right) \varphi_n \right\|_2 = 0,$$

$$(2) \lim \left\| f - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sum_{n=-N}^N f\left(\frac{n}{2\lambda}\right) \varphi_n \right\|_\infty = 0.$$

ここで $\lim$ は $N \rightarrow \infty$ の下である. 即ち, この展開式は L^2 -norm に関する平均収束のみならず, 時間軸上で一様収束することを意味している.

§3. 直交系 $\{S_{m,n}\}$ の構成

一般に函数 $\xi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\xi\|_2 = 1$, を基函数として導かれる一つの函数を

$$\xi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \xi(2^m t - n), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

とおく. このとき, $\xi_{m,n} \in L^2(\mathbb{R})$, さらに

$$\int |\xi_{m,n}(t)|^2 dt = 2^m \int |\xi(2^m t - n)|^2 dt = 2^m \int |\xi(t)|^2 2^{-m} dt = \|\xi\|_2^2 = 1 \quad (3.2)$$

が云え, こうして導入された 2 重 index の函数列 $\{\xi_{m,n}\}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) が CONS in $L^2(\mathbb{R})$ であるとき $\{\xi_{m,n}\}$ は ξ を基函数とする 'Wavelet CONS' という. この CONS 構成を標本函数 $S_\lambda(\cdot)$ におけるパラメーターが ' $\lambda = 1/2$ ' の場合に適用しよう.

註 式 (3.2) のように, 積分記号として単に $\int$ と記した場合は $\int = \int_{\mathbb{R}}$ と見做す. 以下同様.

$$S(t) = S_{1/2}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく, i.e.

$$S(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t} & (0 \neq t \in \mathbb{R}) \\ 1 & (t = 0). \end{cases}$$

これは $S(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ で $\|S\|_2 = 1$. また §2 の (2.3) によって

$$\widehat{S}(\omega) = (\mathcal{F}S)(\omega) = 1_{[-1/2, 1/2]}(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

ここで函数 $\xi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\xi\|_2 = 1$, に対し式 (3.1) によって函数 $\xi_{m,n}$ を構成したと同様に, 標本函数 $S(\cdot)$ に対して函数 $S_{m,n}$ を構成する:

$$S_{m,n}(t) = 2^{m/2} S(2^m t - n), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

更に, 積分計算式 (3.2) によって

$$\|S_{m,n}\|_2 = \|S\|_2 = \|S_{1/2}\|_2 = 1.$$

次に, 各 $m, n \in Z$ に対して

$$\tilde{S}_{m,n}(\omega) \triangleq \hat{S}_{m,n}(\omega) \Big|_{[-2^{m-1}, 2^{m-1}]} \quad (\hat{S}_{m,n} \text{ の区間 } [-2^{m-1}, 2^{m-1}] \text{ 上への制限})$$

とおく. これ等に関して, 次の定理が成立する.

〈定理 3.1〉 固定した $m \in Z (> 0)$ に対して, 函数列 $\{\tilde{S}_{m,n}, n \in Z\}$ は CONS in $L^2(-2^{m-1}, 2^{m-1})$.

証明. Fourier 変換 $\hat{S}_{m,n}$ について計算すればよい.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{m,n}(\omega) &= 2^{m/2} \int S(2^m t - n) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &\quad (u = 2^m t - n \text{ とおくと, } 2^m t = u + n, t = 2^{-m}(u + n), \\ &\quad du = 2^m dt, dt = 2^{-m} du \text{ であるから}) \\ &= 2^{m/2} \int S(u) \exp(-2\pi i \omega \cdot 2^{-m}(u + n)) 2^{-m} du \\ &= 2^{-m/2} \int S(u) \exp(-2\pi i \omega \cdot 2^{-m}(u + n)) du \\ &= 2^{-m/2} \int S(u) e^{-2\pi i \omega 2^{-m} u} e^{-2\pi i \omega 2^{-m} n} du \\ &= 2^{-m/2} \hat{S}(2^{-m} \omega) \exp(-2\pi i \omega 2^{-m} n). \end{aligned}$$

ここで, 函数 $\hat{S}(2^{-m} \cdot)$ は閉区間 $[-2^{m-1}, 2^{m-1}]$ 上の定義函数と一致する:

$$\hat{S}(2^{-m} \cdot) = 1_{[-2^{m-1}, 2^{m-1}]}(\cdot).$$

すると

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{m,n}, \hat{S}_{m,n'} \rangle &= 2^{-m} \int_{-2^{m-1}}^{2^{m-1}} \exp(-2\pi i \omega 2^{-m} n) \exp(2\pi i \omega 2^{-m} n') d\omega \\ &= \delta(n, n') \quad (\text{Kronecker } \delta). \end{aligned}$$

函数 $\hat{S}_{m,n}$ の定義域を区間 $[-2^{m-1}, 2^{m-1}]$ 上に制限したものが, $\tilde{S}_{m,n}$ であり, これより函数列 $\{\tilde{S}_{m,n}\}_{n=1}^\infty$ が Hilbert 空間 $L^2(-2^{m-1}, 2^{m-1})$ 上で CONS であることが云える.

各 $\hat{S}_{m,n}$ は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 全域で定義されている. これ等 m, n を独立に変動させて函数列を再構成することによって Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ 上の CONS を構成して行く議論が残るが, 他日, Hilbert 空間上の作用素論の関連も含めて論じ度い.

参考文献

- [1] R. B. Ash, *Information Theory*, Interscience Publ., 1990.
- [2] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992.
- [3] 国澤清典・梅垣壽春, 情報理論の進歩, 岩波書店, 1965 年.
- [4] S. Saito, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, π Pitman Research Notes in Math. Series, Langman Sci. & Tech., **369**, 1997.
- [5] 梅垣壽春, 情報数理の基礎, サイエンス社, 1995 年.
- [6] 梅垣壽春, 信号函数の生成する再生核 Hilbert 空間, 数理解析研究所講究録, **1067** (1998), 118-124.
- [7] H. Umegaki, *A spectral property of one parameter family of sampling functions – from signal analysis to functional analysis*, $QP - PQ$, Quantum Probability & Related Topics, **7** (1992), 453-463.
- [8] K. Yao, *Applications of reproducing kernel Hilbert spaces*, Inform. Control, **11** (1967), 427-444.