

加群とグラスマン多様体 II

数理解. 大山 陽介 (Ohyama Yousuke)

初めに断っておくが、本稿は、鈴木範男氏の論説に続くものである。ここでは、多変数の場合の佐藤理論、いわゆる高次元可積分系について述べる。

KP方程式系の理論の高次元化については、現在のところ最終的な形式に至っているとは言えない。現段階では、ここで述べる、自己双対 Yang-Mills 方程式を含む理論が得られているのみである。いずれの日にか、全ての「よい」gauge 場方程式を含む、より透明な理論が構成できると思われる。

はじめに、ここで用いる記号のいくつかについて説明する。

自然数の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

C : 標数 0 の代数的閉体

$$\mathcal{O} = C[[x_0, x_1, \dots, x_{r-1}]] \quad (r \in \mathbb{N})$$

$\mathfrak{m} = \mathcal{O}x_0 + \dots + \mathcal{O}x_{r-1}$; $\mathcal{O}$ の極大 ideal

$$\text{微分作用素のつくる環 } \mathcal{A} = \left\{ p(x, \partial_x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^r \\ |\alpha| < +\infty}} a_\alpha(x) \partial^\alpha; a_\alpha \in \mathcal{O} \right\}$$

$$I = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{r-1} \quad (\text{後で } I_\emptyset = \mathbb{N}^c \times \{0\} \subset I \text{ を用いる})$$

擬微分作用素をつくる環 $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ P(x, \partial_x) = \sum_{\substack{\alpha \in I \\ |\alpha| \ll +\infty}} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha ; \quad a_\alpha(x) \in \mathcal{O} \right\}$$

話を簡単にするため、形式的巾級数の中で話をすすめて
いる。

まずはじめに、ある微分方程式のクラスと、その“解空間”
との対応について述べる。ここでは、微分方程式を、 $\mathcal{E}$ の
 $\mathcal{O}$ -ideal ($\mathcal{E}$ の部分空間で、自然に左 $\mathcal{O}$ 加群の構造をもつもの)
としてとらえる。

$\mathcal{E}$ 加群 $\mathcal{V}$ (microfunction の空間) を

$$\mathcal{V} := \left\{ \varphi = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha e_\alpha : c_\alpha \in \mathbb{C}, \begin{array}{l} |\alpha| \ll 0 \text{ かつ } c_\alpha = 0, \\ m \in \mathbb{Z} \text{ を固定して, } |\alpha| = m \text{ かつ } \\ d_0 \ll 0 \text{ かつ } c_\alpha = 0 \end{array} \right\}$$

とする。 $\mathcal{E}$ の作用は、次のように定める

$$x_0 e_\alpha = (d_0 + 1) e_{(\alpha_0 + 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})} \quad (\alpha \in I)$$

$$\partial_0 e_\alpha = e_{(\alpha_0 - 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})}$$

$$x_j e_\alpha = (d_j + 1) e_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_{r-1})} \quad (j = 1, 2, \dots, r-1)$$

$$\partial_{x_j} e_\alpha = e_{(\alpha_0, \dots, \alpha_j - 1, \dots, \alpha_{r-1})} \quad (d_j \neq 0)$$

$$\partial_{x_j} e_\alpha = 0 \quad (d_j = 0)$$

* いくつか補足しておく.

1. $\mathcal{E}$ の積構造は Leibniz 則

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} \right) \circ \left(\sum_{\beta} b_{\beta}(x) \partial^{\beta} \right) \\ = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \gamma \in \mathbb{N}^r}} \binom{\alpha}{\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} \partial^{\alpha+\beta-\gamma} \end{aligned}$$

で定まる.

2. $\mathcal{V}$ は microfunction の空間と考えろ: とかできる. つま

り. $e_{\alpha} \in \frac{x^{\alpha'}}{\alpha'!} \delta^{-\alpha_0-1}(x_0) \quad (\alpha = (\alpha_0; \alpha') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{r-1})$ と考

えればよい. しか(り)から $\mathcal{V}$ は $\mathcal{E}/\mathcal{E}x_0 + \sum_{1 \leq j < r} \mathcal{E} \partial_{x_j}$ より

も大きい. $V_0 := \sum'_{\substack{\alpha \in I \\ \alpha_0 < 0}} C e_{\alpha}$ とすると.

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

は $\mathcal{D}$ -加群として exact 列である.

この V を ambient space として、無限グラスマン多様体 UGM^0 (1つのアフィンセルを定めた) を、次のように定める。

$$UGM^0 := \left\{ V \text{ の } \mathbb{C}\text{-subspace } U : \begin{array}{l} U = \sum_{j \in \mathbb{N}^c} \mathbb{C} \varphi_j, \quad \varphi_j = \sum_{(i, \alpha) \in I} \sum_{i,j} \varphi_{ij} e_{i, \alpha} \in V \\ \text{ただし } \sum_{i,j} \varphi_{ij} = \delta_{ij} \quad (i, j < 0) \end{array} \right\}$$

U は $I \times \mathbb{N}^c$ -行列 $(\sum_{i,j} \varphi_{ij})$ で表すこともある。

$\mathcal{E}$ の 0-部分空間 $\mathcal{E}_\phi$ を

$$\mathcal{E}_\phi = \sum_{v \in \mathbb{N}^c} \mathcal{O} \otimes v \quad (\text{無限和})$$

とする。我々の基本定理は次のものである。

定理 1.

$\mathcal{M} := \{ \mathcal{E} \text{ の左 } \mathcal{O}\text{-ideal } \mathcal{J} : \mathcal{E} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{E}_\phi \}$ と UGM^0 とは、1対1に対応する。対応関係は次の通り。

$$\mathcal{M} \ni \mathcal{J} \longmapsto U = \{ \varphi \in V : P\varphi \in V_0, \forall P \in \mathcal{J} \} \in UGM^0$$

$$UGM^0 \ni U \longmapsto \mathcal{J} = \{ P \in \mathcal{E} : P\varphi \in V_0, \forall \varphi \in U \} \in \mathcal{M}.$$

ここで、 $\mathcal{M}$ の元 J について 次のことに注意する。 J は
 $\mathcal{O}$ -加群としては無限生成である。 J の $\mathcal{O}$ -加群としての
 基底 $W_{j,\alpha} \in J$ ($(j,\alpha) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{r-1} - \mathbb{N}^c \times \{0\}$) を

$$W_{j,\alpha} = \partial_0^j \partial_{x'}^\alpha \in \mathcal{E}_\phi$$

となる作用素として定める。この時、 $W_{j,\alpha}$ の係数につい
 て、次の事実が成り立つ。

補題 $J \in \mathcal{M}$ に対して上で定めた $W_{j,\alpha}$ を

$$W_{j,\alpha} = \partial_0^j \partial_{x'}^\alpha = \sum_{k \in \mathbb{N}^c} w_{j,\alpha/k}(x) \partial_0^k \quad ((j,\alpha) \in J - I_\phi)$$

と書く。このとき、各 $k \in \mathbb{N}^c$ について

$$j+|\alpha| \rightarrow -\infty \quad \text{ならば} \quad \text{ord}_x w_{j,\alpha/k} \rightarrow \infty$$

かつ、 $\underbrace{j+|\alpha|}_{\geq 1} = m$ ($\in \mathbb{Z}$) を固定した時、

$$j \rightarrow -\infty \quad \text{ならば} \quad \text{ord}_x w_{j,\alpha/k} \rightarrow \infty$$

となる。ここで

$$\text{ord}_x w_{j,\alpha/k} := \max_{l \in \mathbb{N}} (w_{j,\alpha/k} \in \mathcal{M}^l)$$

である。

※ この補題は正確ではない。J の元は、必ず、

$\sum_{(j,i) \in J-I_\phi} \Theta W_{(j,i)}$ の形で表されるという完備性の条件を考えたものである。

定理1で与えた対応は、具体的には Wronskian の方法で構成することが出来る。1次元の場合と異なり、Plücker 座標が発散するので、技術的には多少の注意を要する。

$U = (\sum_{(i,j)} u_{ij}) \in UGM^\circ$ に対して、空間変数 x について時間発展させた frame $U(x)$ を

$$U(x) = \exp\left(\sum_{0 \leq j < r} x_j \partial_{x_j}\right) U = \left(\sum_{(i,j)} u_{ij}(x)\right)_{\substack{(i,j) \in J \\ j \in \mathbb{N}^c}}$$

$$::: \sum_{(i,j)} u_{ij}(x) = \sum_{(k,\beta) \in \mathbb{N}^r} \sum_{i+k, \alpha+\beta} \frac{x_0^k}{k!} \cdot \frac{x^\beta}{\beta!}$$

で定義する。この時 $\det(\sum_{(i,j)} u_{ij}(x); i,j < 0)$ は発散するか $\mathbb{N}^c$ -サイズ of 行列 $(\sum_{(i,j)} u_{ij}(x))_{i,j < 0}$ の逆行列は次のようにして構成出来る。

$(\sum_{(i,j)} u_{ij}(x))_{i,j < 0}$ の行列要素を、 m 進展開して、

$$\left(\sum_{(i,j)} u_{ij}(x)\right) = \sum_{l \in \mathbb{N}} C^{(l)}, \quad C^{(l)} \in \text{Mat}(\mathbb{N}^c \times \mathbb{N}^c, m^l)$$

とする。 $C^{(0)} = 1$ とする。 $C^{(l)} = (C_{i,j}^{(l)})_{i,j < 0}$ とする

と。 U に関する条件から、 j を固定すると、 $C_{i,j}^{(l)} = 0$ ($i \ll 0$)

となるので、 $C^{(2)}$ たちの間の積は well-defined である。したがって Neumann 展開によって $A(x) = (\sum_{(i,j) \in I} c_{(i,j)}(x))^{-1}$ が構成できる。

上のことから、 U に対応する ideal J の $\mathcal{O}$ -基底 $W_{i,d}$ が、次のように構成される。

$$U(x) A(x) = \left(w_{i,d}/j(x) \right)_{\substack{(i,d) \in I \\ j \in \mathbb{N}^c}} \quad w_{i,d}/j = \delta_{ij} \quad (i,j \in \mathbb{N})$$

としたとき、

$$W_{i,d} = \partial_0^i \partial_{x^d}^d - \sum_{j \in \mathbb{N}^c} w_{i,d}/j(x) \partial_0^j \quad (i,d) \in I - I_\phi$$

$$J = \sum_{(i,d) \in I - I_\phi} \mathcal{O} W_{i,d}$$

となる。 $A(x)$, $U(x)$ の定義により、 $U(x) A(x)$ が定義可能で、 $w_{i,d}/j(x)$ が補題の条件をみたすことが簡単にわかる。

次に、 J から UGM° への対応を考える。1 次元の場合は、微分方程式を「解く」として得られたわけだが、今度は無限連立方程式になるので、技術的に準備を要する。

次の簡単な命題が鍵になる。

命題 $J \in \mathcal{M}$ に対して $W_{j,\alpha} \in J \ ((j,\alpha) \in J - J_\emptyset)$ は今まで通りとする。このとき

$$W_{j,\alpha} = \partial_0^j \{ \partial_{x'}^\alpha - \sum_{\mu+j < 0} \partial_0^\mu \gamma_{j,\alpha}^{(\mu)} W_{0,0} \}$$

と書き直すと $\mu+j < 0$ の場合

$$\gamma_{j,\alpha}^{(\mu)} = \gamma_{j-1,\alpha}^{(\mu)} = \dots = \gamma_{-\mu-1,\alpha}^{(\mu)} = w_{(-\mu-1,\alpha)/-1}^{(\mu)}(x)$$

となる。

以下、次の記号を用いる。

$$R^{(\alpha)}(x, \partial_0) := \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \partial_0^\mu w_{(-\mu-1,\alpha)/-1}^{(\mu)}(x) \quad \alpha \in \mathbb{N}^{r-1}$$

$$R_j^{(\alpha)}(x, \partial_0) := \sum_{\mu+j < 0} \partial_0^\mu w_{(-\mu-1,\alpha)/-1}^{(\mu)}(x)$$

この記号を用いると

$$W_{0,0}^{-1} = R^{(0)}$$

$$W_{j,\alpha} = \partial_0^j \{ \partial_{x'}^\alpha - R_j^{(\alpha)} W_{0,0} \}$$

となる。一般に $R^{(\alpha)}$ は $\mathcal{E}$ の元にならないことには注意された。 (次の注で説明する。 $\mathcal{E}^\infty$ の元になる)

注) 無限階擬微分作用素の全体 $\mathcal{E}^\infty$ は

$$\mathcal{E}^\infty = \{ P(x, \partial) = \sum_{\alpha \in J} \partial_x^\alpha a_\alpha(x) ; a_\alpha(x) \in \mathcal{O} \}$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ について $m \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$|\alpha| < m \text{ のとき } a_\alpha(x) \in \mathcal{M}^m \quad \left\{ \right.$$

とする。 $\mathcal{E}^\infty$ は環にはならない。 $\alpha_0 < 0$ のとき $a_\alpha(x) \equiv 0$

となる $\mathcal{E}^\infty$ の作用素全体を $\mathcal{D}^\infty$ と表すと、 $\mathcal{D}^\infty$ は Leibniz 則

によって環になり、 $\mathcal{E}^\infty$ は右 $\mathcal{D}^\infty$ -加群になる。

後で用いるが、 $P(x, \partial) \in \mathcal{E}^\infty$ に対して

$$P(x, \partial)_+ = \sum_{\substack{\alpha \in J \\ \alpha_0 \geq 0}} \partial_x^\alpha a_\alpha(x) \in \mathcal{D}^\infty$$

とする。

前の命題から導き出した $R^{(u)}$ たちを用いて、 $\mathcal{M}$ から UG $\mathcal{M}^\circ$ への対応が構成できる。

定理 2

$$W = \{ W(x_0, x', \partial_0) = \sum_{(\mu, \alpha) \in J - J_0} \frac{x'^\alpha}{\alpha!} \partial_0^\mu w_{\mu, \alpha}(x_0) \in \mathcal{E}^\infty$$

$$: w_{\mu, \alpha}(x_0) \in C[[x_0]] \}$$

$$w_{0,0} = 1$$

とすると、次の事実が成り立つ。

1) $\mathcal{M}$ と $\mathcal{W}$ とは 1対1に対応する. $J \in \mathcal{M}$ に対して, 前の記号を用いて

$$W = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{r-1}} \frac{x'^{\alpha}}{\alpha!} R^{(d)}(x_0, 0, \partial_0) \in \mathcal{W}$$

に対応させる.

2) (1) で構成した $W \in \mathcal{W}$ に対して, さらに

$$U = \sum_{j \in \mathbb{N}^c} C \varphi_j \in UGM^0 \quad (\varphi_j \equiv W e_{(j, 0)})$$

に対応させると, 定理1で述べた, $\mathcal{M}$ から UGM^0 への対応を得る.

注) $W \in \mathcal{E}^0$ より, $W e_{(j, 0)} \in \mathcal{W}$ となる.

また, (2) で構成した $U = \sum_{j \in \mathbb{N}^c} C \varphi_j$ は, 厳密には UGM^0 の定義で示した $\sum_{(i,j) < 0} c_{ij} = \delta_{ij}$ ($(i,j) < 0$) の条件をみたさないが, この条件をみたすように φ_j を取りかえることが可能である.

以上で, $\mathcal{M}$ と UGM^0 との対応関係が完全に(構成的に)ついた. 次に時間発展について述べる.

時間パラメタを $t = (t_{j\alpha} ; (j\alpha) \in I_t)$ とする. $\therefore$
 て. $I_t = I - (I_p \cup (0; \infty))$ である. $U_0 \in UGM^\circ$ に対して,
 UGM° 上の時間発展を.

$$U_t = \exp \left(\sum_{(j\alpha) \in I_t} t_{j\alpha} \partial_0^j \partial_{x^\alpha} \right) U_0 = \left(\sum_{(i\alpha)/j} (t) \right)$$

として定める. α について発展させた場合と同様に.

$(\sum_{(i\alpha)/j} (t))_{i,j \in \mathbb{N}^c}$ は逆行列を持ち. U_t の右から乗することかて
 きる.

$$\left(\sum_{(i\alpha)/j} (t) \right)_{\substack{(j\alpha) \in I \\ j \in \mathbb{N}^c}} = \left(\sum_{(i\alpha)/j} (t) \right) \cdot \left(\sum_{(i\alpha)/j ; i,j < 0} \right)^{-1}$$

とすると. 各 $j \in \mathbb{N}^c$ に対して. $\forall m \in \mathbb{N}$ について $m \in \mathbb{Z}$ が存在

して. $i + |\alpha| < m$ のとき. $\text{ord}_t \sum_{(i\alpha)/j} (t) \geq m$. $\therefore$ て.

$$\text{ord}_t \text{ は } \text{ord}_t(t_{\alpha_0} t_{\alpha_1} \cdots t_{\alpha_{k-1}}) = |\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{k-1}|.$$

したがって. $(\sum_{(i\alpha)/j} (t))$ は UGM° の frame といえる
 いか. "infinitesimal" には UGM° と考えられ. Whonshian の
 方法など、今までの議論は全て適用できる.

この U_t に対応する $\mathcal{M}$ の元 $J_t = \sum_{(j\alpha) \in I - I_p} \mathcal{O} W_{j\alpha}$ に関する

時間発展の方程式は

$$\frac{\partial W_{j\alpha}}{\partial t_{i\beta}} + W_{j\alpha} \partial_0^j \partial_{x^\alpha} \in J_t \quad ((i\beta) \in I_t)$$

となる。上式の左辺を $W_{j,\alpha}$ たちで割り算した剰余項 $\in \mathcal{E}_\phi$ が、0 になるという意味である。

次に、この発展方程式を、定理 2 で定めた $W \in \mathcal{W}$ に関する方程式に書き直そう。

$W_{j,\alpha} = \partial_0^j \{ \partial_{x'}^\alpha - R_j^{(\alpha)} W_{0,0} \}$ を代入して、 $t = t_{ij\beta}$ と略記すると、

$$W_{0,0,t} + W_{0,0} \partial_0^i \partial_{x'}^\beta = \sum_{k \geq 0} w_{0,0/k} W_{i+k,\beta}$$

$$-\partial_0^j R_{j,t}^{(\alpha)} W_{0,0} - \partial_0^j R_j^{(\alpha)} [W_{0,0,t} + W_{0,0} \partial_0^i \partial_{x'}^\beta] + \partial_0^{i+j} R_{i+j}^{(\alpha+\beta)} W_{0,0} \in \mathcal{J}$$

となる。上式を代入して、 $W_{i+k,\beta} \in R_\nu^{(\beta)}$ で表せば、

$$\begin{aligned} & -\partial_0^j R_{j,t}^{(\alpha)} W_{0,0} + \partial_0^{i+j} R_{i+j}^{(\alpha+\beta)} W_{0,0} - \partial_0^j [R_j^{(\alpha)} \sum_{k \geq 0} w_{0,0/k} \partial_0^{i+k} (-R_{i+k}^{(\beta)}) \\ & + \partial_0^{-j} \sum_{l \geq 0} \binom{i+j}{l} (w_{(-j+1, \alpha)/1} w_{0,0/k})^{(l)} \partial_0^{i+j+k-l} R_{i+j+k-l}^{(\beta)}] W_{0,0} \\ & \in \mathcal{J}_t \end{aligned}$$

ところがこの式は $\mathcal{E}_\phi$ に入るので 0 になる。左から ∂_0^{-j} 、右から $W_{0,0}^{-1}$ をかけて、 $j \rightarrow -\infty$ とすれば

$$-R_t^{(\alpha)} + \partial_0^i R^{(\alpha+\beta)} - R^{(\alpha)} (W_{0,0} \partial_0^i R^{(\beta)})_+ = 0$$

$(W_{00} \partial_0^i R^{(\beta)})_+$ については 8 頁参照。 また、同じ注より、

$R^{(0)} (W_{00} \partial_0^i R^{(\beta)})_+$ は意味を持つ。 これから

$$\frac{\partial W}{\partial t_{i\beta}} = \partial_0^i \frac{\partial^\beta W}{\partial x'^\beta} - W (W_{00} \partial_0^i R^{(\beta)})_+ = 0$$

を得る。 これは、高次元 KP 方程式系という。