

極小部分多様体の安定性について

富山大 教育 森 博

§1.

M^m を orientable m 次元 Riemann 多様体, $\bar{M}^n$ を n 次元 Riemann 多様体, $x: M^m \rightarrow \bar{M}^n$ を minimal immersion とする。いま $D \subset M^m$ を closure compact な領域 (i.e. D は M^m の open, connected subset で, その closure $\bar{D}$ は compact である) で, その境界 ∂D が, 区分的に滑らかであるとする (もちろん D が, M^m に等しい場合も考えることができる)。 ∂D を固定する trivial でない任意の変分 φ_t (ただし $\varphi_0 = x$) について

$$\frac{d}{dt} \text{Volume } \varphi_t(D) \Big|_{t=0} = 0$$

であるが,

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Volume } \varphi_t(D) \Big|_{t=0} > 0$$

が、常に成り立つとき、 D は、安定しているという。

ここでの目的は、上記のような D の安定性に関する結果を述べることである。

1973年 M. do Carmo と J. L. Barbosa の両氏は、次の興味ある結果を得た。

定理 1 ([1]). $x: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi: M^2 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ 内の minimal surface と、その Gauss map を表わすものとする。 $D \subset M^2$ を closure compact な領域で、その境界が、有限個の区分的に滑らかな曲線から成り立っているものとする。

このとき、 $\text{Area } \phi(D) < 2\pi$ ならば、 D は安定である。

続いて、1974年 J. Spruck 氏が、定理 1 の拡張を試み、J. Spruck と D. Hoffman の両氏によって得られた Sobolev の不等式 [5] を利用して、次の結果を得た。

定理 2 ([18]). $x: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^n (n \geq 3)$ を minimal immersion とし、 D を上記の性質を有するものとする。このとき、正定数 C_1 があり、 $\int_D |K| dV < C_1$ ならば D は安定である。

ただし、 K は、 M の Gauss 曲率、 dV は M の area element を表わす。(こゝに、 $C_1 = \frac{1}{54\pi}$)

定理3 ([18]). $x: M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \geq 3, n \geq 4$) を *minimal immersion* とし、 D を上記の性質を有するものとする。このとき、 m のみに依存する正定数 $C_2(m)$ があり、

$(\int_D \|B\|^m dV)^{\frac{1}{m}} < C_2(m)$ ならば、 D は、安定である。ただし、 B は M^m の第二基本形式で、 $\|B\|$ は、その *norm* を表わし、 dV は、 M^m の *volume element* を表わす。

$$(こゝに、C_2(m) = 2^{-m} \frac{m-2}{(1+m)^{1+\frac{1}{m}}} \omega_m^{\frac{1}{m}})$$

注意、Spruck 氏は、定理2の定数 C_1 を n に依存する正定数のように書いてありますが、[5] の Sobolev の不等式を検討してみると、上記のような定数になることがわかる。

ここで、ambient space $\bar{M}^n$ が、一般の Riemann 多様体である場合を考えてみることにする。

定理4 ([10]). $\bar{M}^n$ ($n \geq 4$) を完備、単連結で、断面曲率が $-\epsilon^2 \leq K_\delta \leq -\delta\epsilon^2$ ($0 \leq \epsilon, 0 < \delta \leq 1$) を満たす n 次元 Riemann 多様体とし、 M^m ($m \geq 3$) をその m 次元 *minimal submanifold*、 $D \subset M^m$ を *closure compact* な領域で、境界 ∂D が、区分的に滑らかであるとする。 D 上の関数 f を、 $f(p) = \text{Max. } \{0, \|B\|^2(p) - m\delta\epsilon^2\}$ ($p \in D$) によって定める。このとき、 m のみに依存する正数 $d_1(m)$ があって、

10
 $\left(\int_D f^{\frac{m}{2}} dV\right)^{\frac{1}{m}} < d_1(m)$ ならば、 D は安定である。(ここに、 $d_1(m)$ は、定理3の定数 $C_2(m)$ に等しい。)

注意、定理4において、 $\phi=0$ の場合、定理3に帰着する。

定理5 ([10]). M^n ($n \geq 4$) を断面曲率 $\bar{K}_0$ が、 $0 < \bar{K}_0 \leq \phi^2$ ($\phi > 0$) を満たし、injectivity radius の M における下限 $\bar{R}(M^m)$ が、 $\bar{R}(M^m) \geq \frac{\pi}{\phi}$ を満たす n 次元 Riemann 多様体とし、 M^m ($m \geq 3$) をその minimal submanifold とし、 D を定理4と同じ性質をもつものとする。このとき、 m にのみ依存する正定数 $d_2(m)$ があって、 $\left[\int_D (\|B\|^2 + m\phi^2)^{\frac{m}{2}} dV\right]^{\frac{1}{m}} < d_2(m)$ ならば、 D は安定である。(ここに、 $d_2(m) = \frac{1}{\pi} 2^{\frac{1-m}{2}} \frac{m-2}{(m+1)^{1+\frac{1}{m}}} \omega_m^{\frac{1}{m}}$)

更に、3次元単位球面 S^3 内の minimal surface の領域の安定性について、次のことが、成立する。

定理6 ([11]). M^2 を3次元単位球面 S^3 内の minimal surface で、その Gauss 曲率 K が、 $K \leq \frac{a-4}{a-2}$ ($a \geq 4$) を満たしているものとする。 D を定理1と同じ性質をもつものとする。このとき $\int_D (1-K) dV < \frac{1}{2\sqrt{\pi}a}$ ならば、 D は、安定である。

定理6の応用として、Plateau問題の解に関するある結果が得られる。まず、 $x: D(\mathbb{R}^2 \text{の単位球面}) \rightarrow S^3$ が、 $C^2(\bar{D})$ 写像で、 D において、harmonicかつconformalとし、 $x|_{\partial D}$ は、 ∂D から、 S^3 内の C^2 級 Jordan curve Γ への、homeomorphismを与えたとする。 K を D から、写像 x の singularitiesを除いた所で、定義される曲面の Gauss 曲率とする。すると Gauss-Bonnet の公式と R.D. Gulliver 氏[3]の結果を用いると次のことが、成立する。

系([11]) $x: D(\mathbb{R}^2 \text{の単位球体}) \rightarrow S^3$ を S^3 内の C^2 級 Jordan curve Γ に対する Plateau 問題の解とする。上記の K が、 $K \leq \frac{a-4}{a-2}$ ($a \geq 4$) を満たすものとする。このとき、 $\text{Area } x(D) + \int_{\Gamma} k(s) ds < 2\pi + \frac{1}{27\pi a}$ ならば、 (D, x) は、安定である。ここには $\int_{\Gamma} k(s) ds$ は、 Γ の total curvature を表わす。

§2.

以下定理5の証明の概略を述べることにする。

$\bar{M}^n$ を n 次元 C^∞ Riemann 多様体とし、その Riemann 計量と Riemann 接続をそれぞれ $\langle, \rangle$, ∇ とする。 $M = M^n$ を n 次元 orientable C^∞ 多様体、 $x: M \rightarrow \bar{M}^n$ を minimal

immersion とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ∇ をそれぞれ x によって、
 induce された M の Riemann 計量, Riemann 接続とする。 TM, NM
 をそれぞれ M の tangent bundle, normal bundle とし、
 TM_p, NM_p ($p \in M$) をそれぞれ点 p における M の tangent
 space, normal space とする。このとき、 M の第二基本形
 式 B は、対応 $B: TM \times TM \rightarrow NM$ で、 $B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$
 $= (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$, $X, Y \in TM$, によって与えられる。ここに、
 $(\cdot)^\perp$ は、 M の tangent vector を M の normal space
 へ射影することを表わす。

次に第二変分公式を導くために、いくつかの定義をする。
 まず、 $E \in NM_p$ に対して、 $\|B(E)\|^2 = \sum_{i,j} (\langle B(e_i, e_j), E \rangle)^2$
 とおく。ここに、 $\{e_i\}$ は、 TM_p の orthonormal basis である。
 更に、 $\|B\| = (\sum_k \|B(E_k)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ とおく。ここに $\{E_k\}$ は、
 NM_p の orthonormal basis である。 $\|B\|$ は、orthonormal
 bases の取り方に依らないという意味において、well-defined
 である。 $\|B\|$ を第二基本形式 B の norm と呼ぶ。

$\Gamma(NM)$ を NM の C^∞ cross-sections の作る vector space
 とし、Laplace operator $\Delta: \Gamma(NM) \rightarrow \Gamma(NM)$ の定義を
 M の normal connection $\nabla^\perp$ を用いて、

$$(\Delta V)(p) = \sum_j \left\{ \nabla_{e_j}^\perp \cdot \nabla_{e_j}^\perp V - (\nabla_{\nabla_{e_j} e_j}^\perp V) \right\}(p)$$

$\nu \in NM_p$ によって与える。ここで $\{e_j\}$ は TM_p の orthonormal basis である。

$\bar{R}$ を $\bar{M}^n$ の curvature tensor とするとき、

$$\bar{R}(X) = \sum_j \bar{R}e_j X e_j, \quad X \in T\bar{M}_p$$

と定める。ここで、 $\{e_j\}$ は TM_p の orthonormal basis とする。

$D \subset M^m$ を closure compact な領域で、その境界 ∂D は、区分的に滑らかであるとする。 $E \in \mathcal{F}(TM)$ を $E|_D$ は、 D 上の normal vector field, $E|_{\partial D} \equiv 0$ とし、 $\mathcal{F}_t$ を $(\bar{M}^n$ 内の) D の近傍において、 E によって生成される flow とし、

$A(t) = \text{Volume } \mathcal{F}_t(D)$ とおく。このとき第二変分公式は、次の式で表わされる。

$$\left. \frac{d^2 A}{dt^2} \right|_{t=0} = - \int_D \{ \langle E, \Delta E \rangle + \|B(E)\|^2 - \langle \bar{R}(E), E \rangle \} dV$$

そこで、 $E = u\nu$ (ν は、 D 上の unit normal vector field, u は、 $\bar{D}$ 上の C^∞ function で、 ∂D 上で vanish する) において、上の変分公式を書き直すと、次の lemma が成立する。

Lemma 1. $\bar{M}^n, M^m, D$ は定理 5 の仮定を満たすとする。

このとき、
$$\left. \frac{d^2 A}{dt^2} \right|_{t=0} \geq - \int_D \{ u \Delta u + (\|B\|^2 + mb^2) u^2 \} dV$$

$$= \int_D \{ |\nabla u|^2 - (\|B\|^2 + m b^2) u^2 \} dV$$

が、成立する。ここに ∇u は u の gradient vector field である。

定理5の正定数 $d_2(m)$ の存在は、次の Lemma から、わかる。

Lemma 2. M^n , M , D は、定理5と同じとする。 h を $\bar{D}$ 上で、non-negative C^1 級関数で、 ∂D 上で、vanish するものとする。このとき、

$$\left[\int_D h^{\frac{2m}{m-2}} dV \right]^{\frac{m-2}{2m}} \leq d_2^{-1} \left(\int_D |\nabla h|^2 dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

が、成立する。ただし、次の条件を満たすものとする。

$$(i) \theta \left[\frac{\text{Vol}(\text{supp } h)}{(1-\alpha) \omega_m} \right]^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{2}, \quad (ii) 2\rho \leq R(M^m)$$

$$\text{ここに、} \rho = \frac{1}{\theta} \sin^{-1} \left[2\theta \left(\frac{\text{Vol}(\text{supp } h)}{(1-\alpha) \omega_m} \right)^{\frac{1}{m}} \right],$$

$$d_2 = d_2(m, \alpha) = \frac{1}{\pi} 2^{1-m} \alpha (1-\alpha)^{\frac{1}{m} \frac{m-2}{m}} \omega_m^{\frac{1}{m}}, \quad \alpha \text{ は、}$$

$0 < \alpha < 1$ なる free parameter, ω_m は $\mathbb{R}^m$ の単位球体の体積とする。

注意. $d_2(m, d)$ は $d = \frac{m}{m+1}$ のとき 最大値をとり、更に定理5の $d_2(m)$ に等しい。この仮定 " $\bar{D}$ 上で C^1 級である" を " $h \in H_1^0(D)$ " に代えても成立する。ここに $H_1^0(D)$ は Sobolev space である。また容易に、定理5の条件から、lemma 2の条件 (i), (ii) が、満たされることがわかる。J. Spruck と D. Hoffman の両氏の得た Sobolev の不等式の証明に gap がありますが、上記の Lemma 2は、その gap を補正した後に適用することにより、得たものである。

定理5の証明

D が 安定であることを示すには、Lemma 1によって、

仮定 $\left(\int_D (\|B\|^2 + mb^2)^{\frac{m}{2}} dV \right)^{\frac{1}{m}} < d_2(m)$ から、

$$(1) \quad \int_D (\|B\|^2 + mb^2) u^2 dV < \int_D |\nabla u|^2 dV$$

for all $u \neq 0$ in $H_1^0(D)$

であることを示すとよい。このことを背理法を用いて示す。
つまり、

$$(2) \quad \int_D |\nabla u|^2 dV \leq \int_D (\|B\|^2 + mb^2) u^2 dV$$

for some $u \neq 0$ in $H_1^0(D)$

であると仮定して矛盾を導く。Sobolev space $H_0^1(D)$ の性質から不等式 (2) における u が " $u \geq 0$ on $\bar{D}$ " であるとしてよい。すると lemma 2 の注意から、

$$(3) \left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}} dV \right)^{\frac{m-2}{2m}} \leq d_2(m)^{-1} \left(\int_D |\nabla u|^2 dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

(2), (3) と Hölder の不等式から、

$$\begin{aligned} \left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}} dV \right)^{\frac{m-2}{2m}} &\leq d_2(m)^{-1} \left(\int_D (\|B\|^2 + m\ell^2) u^2 dV \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq d_2(m)^{-1} \left[\left(\int_D (\|B\|^2 + m\ell^2)^{\frac{m}{2}} dV \right)^{\frac{2}{m}} \left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}} dV \right)^{\frac{m-2}{m}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

従って、

$$\left(\int_D (\|B\|^2 + m\ell^2)^{\frac{m}{2}} dV \right)^{\frac{1}{m}} \geq d_2(m)$$

となり、矛盾が生ずる。故に定理 5 が示されたことになる。

§3.

定理 5 の例を述べることにする。まず、ambient space $\bar{M}^n$ を標準的な Riemann 計量を持つ $(m+1)$ 次元単位球面 S^{m+1} ($n=m+1$) とする。 $\bar{M}^{m+1}$ は明らかに、 $\ell=1$ に対して、定理 5 の仮定を満たしている (i.e. $K_0 \equiv 1$ かつ $R(M) \equiv \pi$)。

次に、 $0 < \alpha < 1$ なる実数 α に対して、

$$\Sigma_\alpha^m = \{x = (x', \dots, x^{m+1}) \in S^m : x^{m+1} \geq \alpha\}$$

とおく。ここに S^m は m 次元単位球面とする。このとき、 Σ_α^m は S^{m+1} の compact orientable, n 次元 totally geodesic submanifold で、境界 $\partial \Sigma_\alpha^m = \{x = (x', \dots, x^{m+1}) \in S^m : x^{m+1} = \alpha\}$ を持つ。他方 $\text{Vol } \Sigma_\alpha^m$ は α に関する単調減少、連続関数で、 $\alpha \rightarrow 1$ のとき $\text{Vol } \Sigma_\alpha^m \rightarrow 0$ である。

従って、定理5の条件、つまり、

$$\left(\int_{\Sigma_\alpha^m} (\|B\|^2 + m)^{\frac{m}{2}} dV \right)^{\frac{1}{m}} = m^{\frac{1}{2}} (\text{Vol } \Sigma_\alpha^m)^{\frac{1}{m}} < d_2(m)$$

を満たす α が存在する。故に、ある α ($0 < \alpha < 1$) が存在し、
 2. “ S^{m+1} 内に、境界を持つ compact orientable, m 次元 totally geodesic (それ故 minimal) submanifold Σ_α^m が、安定である” が成立する。次に別の例を構成するため、
 $\mathbb{R}^{m+2}$ を $\mathbb{R}^{p+1}$ と $\mathbb{R}^{q+1}$ の直積と考え、

$$\Sigma_\alpha^p(r) = \{x = (x', \dots, x^{p+1}) \in S^p(r) : x^{p+1} \geq \alpha\}$$

$$\Sigma_\beta^q(\rho) = \{y = (y', \dots, y^{q+1}) \in S^q(\rho) : y^{q+1} \geq \beta\}$$

とおく。ここに $p+q=m$; $r, \rho > 0$, $r^2 + \rho^2 = 1$; $0 < \alpha, \beta < 1$ であり、 $S^p(r)$ は $\mathbb{R}^{p+1}$ の原点を中心とする半径 r の球面とし、 $S^q(\rho)$ についても同様とする。

このとき $M := \Sigma_\alpha^p(r) \times \Sigma_\beta^q(\rho)$ は S^{m+1} 内の compact

orientable submanifold で、その境界は、

$$(\partial \Sigma_\alpha^p(r) \times \Sigma_\beta^q(\rho)) \cup (\Sigma_\alpha^p(r) \times \partial \Sigma_\beta^q(\rho)) \text{ である。}$$

ところで、 M の第二基本形式 B は、固有値として、

$$\frac{\rho}{r} \text{ (multiplicity } p) \text{ と、 } -\frac{r}{\rho} \text{ (multiplicity } q) \text{ を持つから、}$$

M が、minimal であるための必要十分条件は、 $r = \sqrt{\frac{p}{m}}$, $\rho = \sqrt{\frac{q}{m}}$ である。よって、 M が、minimal であるならば、

$\|B\|^2 = m$ となる。従って、先程の例の構成と議論から、定理 5 の条件、つまり、

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Sigma_\alpha^p(\sqrt{\frac{p}{m}}) \times \Sigma_\beta^q(\sqrt{\frac{q}{m}})} (\|B\|^2 + m)^{\frac{m}{2}} dV \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= (2m)^{\frac{1}{2}} \text{Vol } \Sigma_\alpha^p(\sqrt{\frac{p}{m}}) \cdot \text{Vol } \Sigma_\beta^q(\sqrt{\frac{q}{m}}) < d_2(m) \end{aligned}$$

を満たす、 α, β が、存在する。故に、ある α, β

$(0 < \alpha, \beta < 1)$ が、存在して、“ S^{m+1} 内に、境界を持つ、

compact orientable m 次元 minimal submanifold

$\Sigma_\alpha^p(\sqrt{\frac{p}{m}}) \times \Sigma_\beta^q(\sqrt{\frac{q}{m}})$ が、安定である。”が、成立する。

この minimal submanifold は、明らかに、totally geodesic でない。

References

- [1] J. L. Barbosa and M. do Carmo, On the size of a stable minimal surface in R^3 , preprint (1973).
- [2] S. S. Chern, Minimal submanifolds in a Riemannian manifold, Mimeographed Lecture Notes, Univ. of Kansas, 1968.
- [3] R. D. Gulliver II, Regularity of minimizing surfaces prescribed mean curvature, Ann. of Math., Vol.97 (1973), 275 - 305.
- [4] E. Heinz and S. Hildebrandt, Some remarks on minimal surfaces in Riemannian manifolds, Comm. Pure and Appl. Math., Vol.23 (1970), 371 - 377.
- [5] D. Hoffman and J. Spruck, Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds, Comm. Pure and Appl. Math., Vol.27 (1974), 715 - 727.
- [6] ———, A correction to [5], Comm. Pure and Appl. Math., Vol.28 (1975), 765 - 766.
- [7] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Vol.II, Interscience, New York, 1969.
- [8] H. B. Lawson, Jr., Minimal varieties in constant curvature manifolds, Ph. D. thesis, Stanford Univ., 1968.
- [9] ———, Minimal Varieties in Real and Complex Geometry, Univ. of Montréal Press, Montréal, 1973.
- [10] H. Mori, Notes on the stability of minimal submanifolds of Riemannian manifolds, preprint (1975).

- [11] H. Mori, A note on the stability of minimal surfaces of 3-dimensional unit sphere, preprint (1976).
- [12] C. B. Morrey, Jr., Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer - Verlag, New York, 1966.
- [13] R. Osserman, A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem, Ann. of Math., Vol.91 (1970), 550 - 569.
- [14] T. Ōtsuki, A remark on the Sobolev inequality for Riemannian submanifolds, Proc. Japan Acad., Vol.51 (1975), 785 - 789.
- [15] S. Sasaki, Differential Geometry in the large (in Japanese), Shibundō, Tokyo, 1957.
- [16] ———, On the total curvature of a closed curve, Japan J. Math., Vol.29 (1959), 118 - 125.
- [17] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math., Vol.88 (1968), 62 - 105.
- [18] J. Spruck, Remarks on the stability of minimal submanifolds of R^n , preprint (1974).