

CM 型の退化について

愛知工業大学 柳井裕道 (Hiromichi Yanai)

CM 型の rank の概念は, 虚数乗法によって得られるアーベル拡大の大きさを測るために, 久保田 [K] によって導入された. それは, 対応する CM 型のアーベル多様体 A の Mumford-Tate 群 の次元に他ならない.

rank の値が maximal (即ち $= \dim A + 1$) のとき, その CM 型は非退化であると言う. その時 A の Hodge ring は divisor の class で生成され, したがって Hodge 予想が成立している ([H], [R2]).

本稿では, rank が maximal でない (退化) CM 型を系統的に得る一つの方法を述べる. また, このような場合の moduli の体についても触れる.

1. CM 型アーベル多様体の Hodge 群と rank

以下, (Mumford-Tate 群の代りに) Hodge 群を用いた定式化を行う.

有限次代数体 F に対し Γ_F で F の複素数体 $\mathbb{C}$ への埋め込み全体を表す. F に対応する $\mathbb{Q}$ 上の algebraic torus を $T_F (= \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{m/F}))$ とすると, その指標群 $X(T_F)$ は Γ_F で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Z}[\Gamma_F]$ と (右) $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 加群として同型である. $2d$ 次 CM 体 K に対し $S \cup \rho S = \Gamma_K, S \cap \rho S = \emptyset$ を満たす Γ_K の部分集合 S を K の CM 型と言う. (ρ は complex conjugation.)

A を $\text{type}(K, S)$ の虚数乗法を持つ d 次元アーベル多様体とする $([S-T], [L])$.

指標群の間の homomorphism $\phi^* : X(T_K) \longrightarrow X(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$ を, $\sigma \in \Gamma_K$ に対して

$$\phi^*(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\text{for } \sigma \in S) \\ -1 & (\text{for } \sigma \notin S) \end{cases}$$

で定め, 対応する algebraic torus の homomorphism を $\phi : \mathbb{G}_m \longrightarrow T_K$ とする.

$\mathbb{C}$ 上 $\text{Im } \phi$ を含む T_K の algebraic subgroup/ $\mathbb{Q}$ で最小のものを A の Hodge 群 と言い $Hg = Hg(A)$ で表す $([H])$. (それは $\text{type}(K, S)$ で定まる.)

久保田 [K] で定義された CM type S の rank は $\dim Hg + 1$ に等しい. rank に関して次の事が知られている $([H], [K], [L], [R1], [R2])$.

(a) $\text{rank } S \leq d + 1$.

(b) 任意の素数 p に対し, $\text{rank } S =$ 適当な定義体上 A の torsion points で生成される拡大の中の

独立な $\mathbb{Z}_p$ 拡大の個数.

(c) $\text{rank } S = d + 1$ (このとき S は非退化であると言う),

$\iff A$ の任意個の積 A^n 上の Hodge cycle は divisor の class で生成される,

$\implies A$ 上の Hodge cycle は divisor の class で生成される,
(*)

$\implies A$ に対し Hodge 予想, Tate 予想が成立する.
(#)

注意 (*) の逆は K がアーベル体の時には成立する (Lenstra). 一般の場合には不明. (#) の逆は, 一般には成り立たない ([Sh]).

2. 退化 CM 型の構成

K の $2d_1$ 次真部分 CM 体 K_1 に対し, $\pi: \mathbb{Z}[\Gamma_K] \rightarrow \mathbb{Z}[\Gamma_{K_1}]$ を canonical surjection とする.

Γ_K 等の部分集合 S に対し, $t(S) = \sum_{\sigma \in S} \sigma$ で対応する加群の元を表す.

K の CM 型 S が次の条件を満たすとする.

条件 $a + b = [K : K_1], a \geq 0, b \geq 0$ なる整数 a, b と, K_1 の CM 型 S_1 が存在して,

$$\pi(t(S)) = at(S_1) + bt(S_1).$$

この時, 次の不等式が成立する.

定理

$$d + 1 - \text{rank } S \geq d_1 + 1 - \text{rank } S_1.$$

さらに $a = b$ の時,

$$d + 1 - \text{rank } S \geq d_1.$$

これより, S_1 が退化かまたは $a = b$ ならば S は退化となる. 特に, S_1 がさらに小さい部分体の CM 型の引戻しになっているとき (この時, S_1 は単純でないと言う) それは退化であって, 従って S も退化となる. $ab \neq 0$ と取って置けば, 多くの場合 S は単純 (即ち, 対応するアーベル多様体が単純) となる.

A の次元 d が素数の時, 単純な CM 型はすべて非退化であることがわかっている ([T], [Y1]). 上の定理は, d が合成数で部分 CM 体がたくさんあるなら退化 CM 型が多く存在することを示している。(これについては [Do] を参照のこと.)

注意/訂正 今までに知られている退化 CM 型の例 (Mumford, Serre, Greenberg, Ribet 等による) の大部分 (講演の時, 「全部」と言ったのは誤りです) はこの定理の条件を満たしているが, [R1] にある Lenstra の例はそうならないようである.

定理の証明の方針は次の通り.

CM 体 K に対し, K^+ でその最大実部分体を表す. Hg_1 を CM 型 S_1 に関する Hodge 群とする.

ν_{K/K^+} 等に対応する algebraic torus の norm 写像を表し, $T_K^+ = \text{Ker}(\nu_{K/K^+}) \subset T_K$,

$T_{K_1}^+ = \text{Ker}(\nu_{K_1/K_1^+}) \subset T_{K_1}$ とする.

$T = \nu_{K/K_1}^{-1}(Hg_1) \cap T_{K^+}$ とおくと, $Hg \subseteq T \subseteq T_K^+$ で

$$\dim(T_K^+/T) = \dim(T_{K_1}^+/Hg_1)$$

となる. これより定理の前半が言える.

$a = b$ の時は, $T = \text{Ker}(\nu_{K/K_1}) \cap T_K^+$ において同様の議論を行えばよい.

3. Moduli の体

上記 1 の (b) で述べたように, 一般に rank が小さければ torsion で生成される体も小さくなっているが, moduli の体についても同様の傾向がある.

A を $\text{type}(K, S)$ の simple で principal なアーベル多様体とし, θ を $K \xrightarrow{\sim} \text{End } A \otimes \mathbb{Q}$ なる同型, $\mathcal{C}$ を A のひとつの polarization とする. (K', S') を (K, S) の reflex (dual ともいう) とする. 三つ組 $(A, \theta, \mathcal{C})$ の moduli の体を M_S で表す.

I_F, P_F でそれぞれ F の fractional ideal と principal ideal の群を表すことにする.

$I_{K'}$ の元 $\mathbf{a}$ で, $\prod_{\sigma \in S'} \mathbf{a}^\sigma = (\alpha), \alpha \in K^\times, \alpha \bar{\alpha} = N_{K'/\mathbb{Q}} \mathbf{a}$ なる α が存在するもの全体を $I_{K'}(S)$ とすれば, M_S は ideal 群 $I_{K'}(S)$ に対応する K' の不分岐アーベル拡大である ([S-T], [L]).

以下 K はアーベル CM 体とし, $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) (= \Gamma_K)$ とする. このとき S が単純なら $K = K', S' = \{\sigma^{-1} | \sigma \in S\}$ である. A の Hodge 群 Hg の annihilator の群を $Hg^\perp = \{x \in X(T_K) | x = 1 \text{ on } Hg\} \subset X(T_K) = \mathbb{Z}[G]$ とする.

命題 $\mathbf{a} \in I_K, x \in Hg^\perp$ に対し, $\mathbf{a}^x \in I_K(S)$.

これより, rank が小さければ $Hg^\perp$ が大きく, 従って moduli の体は小さい (傾向がある) ことがわかる. 与えられた CM 型について, 実際に moduli の体の大きさを決めることは一般には難しいが, 円分体の場合に若干の例がある ([Y2]).

REFERENCES

- [Do] B. Dodson, The structure of Galois groups of CM-fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **283**, no.1 (1984), 1-32.
- [H] F. Hazama, Hodge cycles on Abelian varieties of CM-type, *Res. Act. Fac. Sci. Engrg. Tokyo Denki Univ.* **5** (1983), 31-33.

- [K] T.Kubota, On the field extension by complex multiplication, *Trans. Amer. Math. Soc.* **118**, no.6 (1965), 113–122.
- [L] S.Lang, “Complex Multiplication,” Springer, 1983.
- [R1] K.A.Ribet, Division fields of abelian varieties with complex multiplication, *Mémoire S.M.F.* no.2 (1980), 75–94.
- [R2] ———, Hodge classes on certain types of abelian varieties, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 523–538.
- [S-T] ——— and Y.Taniyama, “Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory,” Publ. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1961.
- [Sh] T.Shioda, Algebraic cycles on abelian varieties of Fermat type, *Math. Ann.* **258**, (1981), 65–80.
- [T] S.G.Tankeev, Cycles on simple abelian varieties of prime dimension, *Math. USSR Izv.* **20**, no.1 (1983), 157–171.
- [Y1] H.Yanai, On the rank of CM-types, *Nagoya Math. J.* **97** (1985), 169–172.
- [Y2] ———, On degenerate CM types, to appear.