

付着の影響のある基板上の薄膜の形状決定問題に関する 数値解析

東京大学大学院数理科学研究科 剣持 智哉 *

Tomoya Kemmochi
The Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1. はじめに

本稿では, 以下の最小化問題を考える:

$$\underset{u \geq \psi}{\text{minimize}} E[u] := \frac{C}{2} \int \kappa^2 ds + \sigma \int ds - \gamma \int_{\{u=\psi\}} ds, \quad (1)$$

ただし,

- $u: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数,
- $\psi: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた関数,
- C, σ, γ は正定数,
- κ は u のグラフの曲率,
- ds は u のグラフの線素,

である. u に対する境界条件は様々のものが考えられるが, ここでは周期境界条件を課す (ψ も周期的であると仮定する). 関数 ψ はシリコンなどの基板の形状を表現しており, 関数 u はその上に張られる薄膜の形状を表している. 問題 (1) は, その膜の定常状態の形状を決定する問題のモデル化である. エネルギー汎関数 E から最後の項を除いた汎関数

$$\frac{C}{2} \int \kappa^2 ds + \sigma \int ds$$

は弾性エネルギーと呼ばれ, 古くは Euler の時代から研究されている [5, 7, 10]. 本研究で扱うエネルギーは, 弾性エネルギーに対して障害物と付着の影響を考慮に入れたエネルギーであり, 問題 (1) は [9] によって提唱された問題である. この問題に対する数学的な解析結果は [8] のみであるが, [8] で扱われているのは $C \downarrow 0$ としたときの特異極限に関する解析であって, 解の存在などは

* Email: kemmochi@ms.u-tokyo.ac.jp

わかっていない。前述のような材料科学的な背景から、数値シミュレーションが重要であるのは言うまでもないが、その数値解の解析のためには、オリジナルの問題 (1) の解の存在がわかっていることが望ましい。また、問題 (1) は変分問題であるから、一見すると数値シミュレーションだけなら容易であるように見えるが、実際にはそうではない。最小化問題に対してよく用いられる手法は、Euler-Lagrange 方程式を導いて有限要素法などで解く、という手法であるが、汎関数 E の Euler-Lagrange 方程式を求めることは、弱形式であっても容易ではない。なぜならば、曲率や線素による強い非線形性がある上に、付着の影響を表す項によってある種の不連続性のようなものが生じてしまっているからである。さらに、汎関数 E は非凸であるため、最適解の一意性も期待できない。したがって、数値計算に対しても何かしらの工夫が必要である。そこで、本研究の目標は以下の 3 つに分けられる。

- (A) 問題 (1) の解の存在証明.
- (B) 問題 (1) の解の数値計算.
- (C) 数値解の収束解析.

我々は、汎関数 E を離散化し、その近似最適解の収束を示すことで課題 (A) に対して部分的な結果を得た。この収束から、解が存在する限りにおいて課題 (C) も達成される。これらの解析において重要となるのが、汎関数に対する Γ 収束の概念である。また、この離散化をそのまま用いることで、数値計算も可能となった。

本稿の構成について簡単に述べておく。まず、第 2 節では Γ 収束の概念について述べる。この概念は汎関数に対する収束の概念であり、本研究のような非線形性や不連続性を伴う問題に対して広く用いられている。しかしながら、数値解析においてはあまりメジャーな概念ではないように思われるため、本稿で概要を述べておく。第 3 節では数学的な結果について述べ、第 4 節で数値例を紹介する。本稿では数値例を中心に紹介することとし、数学的な解析結果については概要のみを述べるに留める。第 3 節の結果の詳細な証明は [6] を参照されたい。最後に、第 5 節でいくつか注意点を述べる。

2. Γ 収束と数値解析

Γ 収束の概念は De Giorgi によって 1970 年代に導入され、様々な変分問題に応用されてきた。詳しい性質などは例えば [4] を参照されたい。ここでは、 Γ 収束の定義と、重要な性質である基本定理を紹介し、その数値解析への応用について述べる。

定義 1 (Γ 収束). X を距離空間、 $F, F_\varepsilon: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を X 上の汎関数とする。このとき、汎関数の列 $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon \downarrow 0}$ が F に Γ 収束するとは、次の 2 条件が成り立つことをいう：

- (U) 任意の $x \in X$ に対して、 X において $x_\varepsilon \rightarrow x$ となる点列 $\{x_\varepsilon\}_\varepsilon$ であって、

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon[x_\varepsilon] \leq F[x]$$

を満たすものが存在する。

(L) 任意の $x \in X$ と, X において $x_\varepsilon \rightarrow x$ となる任意の点列 $\{x_\varepsilon\}_\varepsilon$ に対して,

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} F[\varepsilon][x_\varepsilon] \geq F[x]$$

が成り立つ.

□

定理 1 (Γ 収束の基本定理). X を距離空間, F を X 上の汎関数, $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon \downarrow 0}$ を F に Γ 収束する汎関数の列とする. 各 F_ε は最適解 $\bar{x}_\varepsilon$ を持ち, しかも点列 $\{\bar{x}_\varepsilon\}$ は集積点 $\bar{x}$ を持つと仮定する. このとき, $\bar{x}$ は F の最適解であって,

$$F[\bar{x}] = \inf_{x \in X} F[x] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon[\bar{x}_\varepsilon]$$

が成り立つ.

□

一般に, 単に汎関数の列とその最適解の列があり, 最適解の列が集積点を持つ, というだけでは, その集積点がある汎関数の最適解になるとは限らない. しかしながら, 汎関数が Γ 収束する, という仮定があれば, 集積点も最適解になることがわかるのである. つまり, Γ 収束の基本定理は, 最適解の存在がわかっていない汎関数に対して最適解の存在を保証する定理になっている.

また, Γ 収束の基本定理は数値解析に応用することもできる. 実際, 汎関数 F の最適解を数値計算したいとして, 以下の段階を踏めば良い.

- Step 1. 汎関数 F を有限次元空間上で離散化する (F_h とおく).
- Step 2. 汎関数列 $\{F_h\}_h$ がある汎関数 F に Γ 収束することを示す.
- Step 3. 汎関数 F_h の最適解の存在を示す ($\bar{x}_h$ とおく).
- Step 4. 点列 $\{\bar{x}_h\}_h$ が集積点を持つことを示す ($\bar{x}$ とおく).

こうすることで, 汎関数 F の最適解 $\bar{x}$ の存在と, 近似最適解 $\bar{x}_h$ の $\bar{x}$ への収束を示すことができる. 繰り返しになるが, 単に $\{\bar{x}_h\}_h$ が集積点 (極限点) を持つことを示しただけでは, 汎関数 F の最適解への収束は得られない. Γ 収束を示すことによって, 数値計算をしたい最適解への収束が得られるのである.

この手法のメリットは, オリジナルの解 $\bar{x}$ と近似解 $\bar{x}_h$ との誤差のノルムなどを評価する必要が無い, という点である. 非線形性が強くなれば強くなるほど, 誤差の評価は難しくなるが, Γ 収束の手法であればその難しさを克服できる. 一方で, 誤差を評価しないために, 収束のオーダーはわからない. したがって, 「オーダーはともかく, まずは収束することを示したい」という状況において有効な手法であるといえる. また, 収束部分列の存在しかわからない, という欠点もあるが, オリジナルの問題の解の一意性を別の論法で示せているならば, 部分列ではなく列全体の収束を示すことができる. むしろ, 問題 (1) のような, 元々の問題に対して解の一意性が期待できない場合でも扱える, というメリットとして解釈することもできる. 実際, この手法で数値解析をした研究は, あまり多くはないが存在する. 紙面の都合で全ては挙げないが, 例えば [1] などがある. 本研究においてもこの手法を採用する. この手法を適用できる問題は, まだまだたくさんあるように思う.

3. 汎関数の離散化と離散最適解の収束解析

まずは問題 (1) を, 前述の手法で扱えるように定式化する. $H_\pi^1 = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = v(1)\}$, $H_\pi^2 = \{v \in H^2(0, 1) \cap H_\pi^1 \mid v' \in H_\pi^1\}$ とおき, $X^2 = \{v \in H_\pi^2 \mid v \geq \psi\}$ とおく. 汎関数 E を,

$$E[v] = \begin{cases} \frac{C}{2} \int \kappa^2 ds + \sigma \int ds - \gamma \int_{\{v=\psi\}} ds, & v \in X^2, \\ +\infty, & v \in H_\pi^1 \setminus X^2 \end{cases}$$

として, H_π^1 上に拡張する. このとき, 問題 (1) は, 次のように定式化される:

$$\underset{v \in H_\pi^1}{\text{minimize}} E[v]. \quad (2)$$

しかし, H_π^1 全体での最適解の存在は, 物理的なパラメータ $(C, \sigma, \gamma, \psi)$ に対する条件なしでは得られていない (定理 4, 5). そこで, $S > 0$ に対して

$$X_S = \{v \in H_\pi^1 \cap W^{1,\infty}(0, 1) \mid \|v\|_{W^{1,\infty}} \leq S\}$$

とおき, 問題 (2) X_S 上に制限する.

$$\underset{v \in X_S}{\text{minimize}} E[v]. \quad (3)$$

一般に, 物理的なパラメータに対する条件なしでは, 大域最適解の存在は成り立たないと考えている. この点に関しては, 第 4 節と第 5 節でも少し触れる.

次に, 汎関数 E を離散化する. $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$, $x_j = jh$, $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ とする. 周期的な折れ線の空間 V_h を,

$$V_h = \{v_h \in C_\pi^0[0, 1] \mid v_h|_{I_j} \in \mathcal{P}^1\}$$

で定める. ただし, $C_\pi^0[0, 1]$ は $[0, 1]$ 区間上の周期的な連続関数の空間, $\mathcal{P}^1$ は 1 次多項式の空間である. $v_h \in V_h$ に対して, $v_j = v_h(x_j)$ と書き, l_j, θ_j を図 1 (a) のように定める. 更に, 関数 $\zeta \in C^1(\mathbb{R})$ を図 1 (b) のように定め, $\delta > 0$ に対して $\zeta_\delta(t) = \zeta(t/\delta)$ とおき,

$$\zeta_{\delta,j} = \zeta_\delta(v_j - \psi_j), \quad v_h \in V_h$$

とおく. ただし, $\psi_j = \psi(x_j)$ である. ζ_δ は, 付着の影響による不連続性を正則化するものであり, δ 小さな正の数である.

以上の記号のもとで, 離散的な汎関数を次で定める:

$$E_{h,\delta,\rho}[v] = \begin{cases} B_h[v] + T[v] - A_{h,\delta}[v] + P_{h,\rho}[v], & v \in V_h, \\ +\infty, & v \in H_\pi^1 \setminus V_h, \end{cases}$$

$$B_h[v] = \frac{C}{2} \sum_{j=1}^N \theta_j^2 \frac{l_j^3 + l_{j+1}^3}{l_j l_{j+1} (l_j + l_{j+1})^2}, \quad T[v] = \sigma \sum_{j=1}^N 2l_j,$$

$$A_{h,\delta}[v] = \gamma \sum_{j=1}^N \zeta_{\delta,j-1} \zeta_{\delta,j} \cdot 2l_j, \quad P_{h,\rho}[v] = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^N |(v_j - \psi_j)_-|^2 h.$$

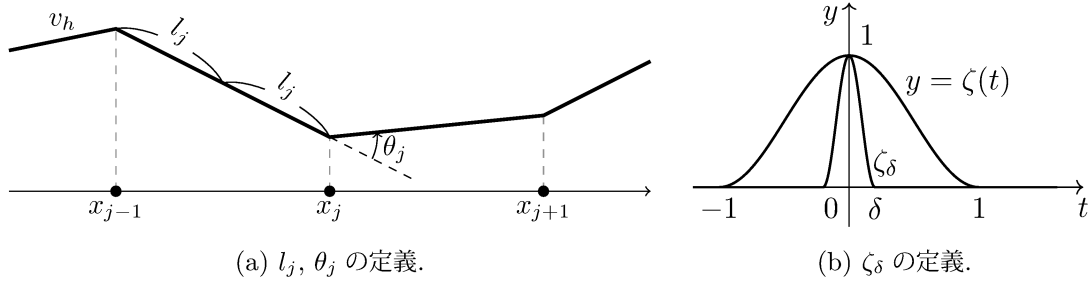


図 1 離散化のための記号の定義.

ただし, $\rho > 0$ はペナルティパラメータであり, $x_- = \max\{0, -x\}$ である. 離散的な最適化問題を, 以下で定式化する.

$$\underset{v \in H_\pi^1}{\text{minimize}} E_{h,\delta,\rho}[v]. \quad (4)$$

また, 連続問題と同様に, これも X_S 上に制限する.

$$\underset{v \in X_S}{\text{minimize}} E_{h,\delta,\rho}[v]. \quad (5)$$

汎関数 $E_{h,\delta,\rho}$ は V_h 上で連続であり, $X_S \cap V_h$ はコンパクトであるから, 問題 (5) の解の存在はすぐにわかる.

このとき, 次の結果を得た.

定理 2 (離散的な汎関数の Γ 収束). $S > 0$ とする. $h, \delta, \rho \downarrow 0$ のとき, 汎関数 $E_{h,\delta,\rho}$ は E に X_S において Γ 収束する. □

定理 3 (離散最適解の集積点). $c_0 > 0$ を定数として, δ を, $\delta \leq c_0 h$ をみたすようにとる. $S > 0$ に対し, $\bar{v}_{h,\delta,\rho}^{(S)} \in V_h$ を問題 (5) の解とする. このとき, 点列 $\{\bar{v}_{h,\delta,\rho}^{(S)}\}_{h,\delta,\rho}$ は, $\overline{X_S}$ において集積点を持つ. ただし, $\overline{X_S}$ は H_π^1 における X_S の閉包である. □

いずれの収束も S に関して一様とはならない, という点に注意しておく. 定理 2, 3 と, Γ 収束の基本定理を合わせれば, 次がわかる.

定理 4. $c_0 > 0$ を定数として, δ を, $\delta \leq c_0 h$ をみたすようにとる. $S > 0$ に対し, $\bar{v}_{h,\delta,\rho}^{(S)} \in V_h$ を問題 (5) の解, $\bar{v}^{(S)} \in H_\pi^1$ を, 点列 $\{\bar{v}_{h,\delta,\rho}^{(S)}\}_{h,\delta,\rho}$ の集積点とする. このとき, $\bar{v}^{(S)}$ は問題 (3) の解である. したがって, 離散最適解の列 $\{\bar{v}_{h,\delta,\rho}^{(S)}\}_{h,\delta,\rho}$ から, オリジナルの解 $\bar{v}^{(S)}$ へ収束する部分列が取れる. □

定理 3 だけでは, 定理 4 の $\bar{v}^{(S)}$ は $\bar{v}^{(S)} \in \overline{X_S}$ であることしかわからない. しかしながら, Γ 収束の基本定理によって, 実は $\bar{v}^{(S)} \in X^2$ であることがわかり, このことから $\bar{v}^{(S)} \in X_S$ も従う.

もし予め離散最適解の $W^{1,\infty}$ ノルムが S に依らない定数で抑えられているならば, 定理 4 から, 大域最適解の存在がわかることになる. そのための十分条件として, 次を得た. 条件 (6) は, 例えば C が σ, γ に比べて十分に大きければ成立する.

定理 5. $c_0 > 0$ を定数として, δ を, $\delta \leq c_0 h$ をみたすようにとる. $S > 0$ に対し, $\bar{v}_{h,\delta,\rho}^{(S)} \in V_h$ を問

題 (5) の解とする. もし, 物理的なパラメータが

$$\frac{1}{\sqrt{2C\sigma}} \left[\sigma + 4\gamma \left(\frac{T[\psi]}{\sigma} + c_0 \right) \right] + \arctan(|\psi|_{W^{1,\infty}(0,1)} + 2c_0) \leq \bar{\phi} \quad (6)$$

を満たすならば, $C, \sigma, \gamma, \psi, c_0, \bar{\phi}$ のみに依存する定数 $M > 0$ が存在して,

$$\|v_{h,\delta,\rho}^{(S)}\|_{W^{1,\infty}} \leq M$$

が成り立つ. したがって, 問題 (4) と (2) の解が少なくとも 1 つ存在し, それぞれ $\bar{v}_{h,\delta,\rho}, \bar{v}$ とすると, 点列 $\{\bar{v}_{h,\delta,\rho}\}_{h,\delta,\rho}$ から $\bar{v}$ に収束する部分列が取れる. $\square$

一般の物理的パラメータでは, 大域最適解の存在は示せないのではないかと考えている. この件に関しては, 次節でもう一度触れる.

4. 数値例

問題 (4) も (5) も有限次元の最適化問題であるから, 既存の最適化手法で計算することができる. ここでは簡単のため問題 (4) を解くこととし, 解法として準 Newton 法を用いた. 準 Newton 法の停止条件としては, $\mathbb{R}^N$ 上の関数として,

$$\left\| \frac{\nabla E_{h,\delta,\rho}}{E_{h,\delta,\rho}} \right\|_{\infty} \leq 10^{-5}$$

が成り立ったら停止することとした. 準 Newton 法は局所最適解を計算する手法であるから, 以下の計算結果も局所最適解にすぎない. そこで, 複数の局所最適解の中で最もエネルギーを小さくするものを大域最適解であるとみなした.

4.1. 波状の障害物

障害物として, $\psi_1(x) = 0.03 \sin(24\pi x)$ という, 比較的周波数の大きな正弦関数を考える. 物理的なパラメータとして, 以下の 2 種類を考える.

	$C/2$	σ	γ
パラメータ 1	0.0005	0.01	1
パラメータ 2	0.0003	0.01	2

また, 離散化のパラメータは, $N = 100, 200, 400$ に対して, $h = \delta = 1/N, \rho = h/100$ とした. このとき, 図 2 のような 6 つの代表的な局所最適解が得られた. これら以外にも, 図 2 の中のいくつかを組み合わせたものも局所最適解になりうるが, エネルギーが一致していないものを組み合わせる限り, 大域最適解にはならない (例えば, 左半分がタイプ B, 右半分がタイプ C, という解が考えられるが, そのエネルギーはタイプ B とタイプ C の間の値を取るはずである).

各パラメータ, 各局所最適解に対するエネルギーの値を表 1 に示しておく. パラメータ 2 においては, 全て付着してしまうタイプ F が大域最適解となった. これは付着項の係数 γ がほかと比べ

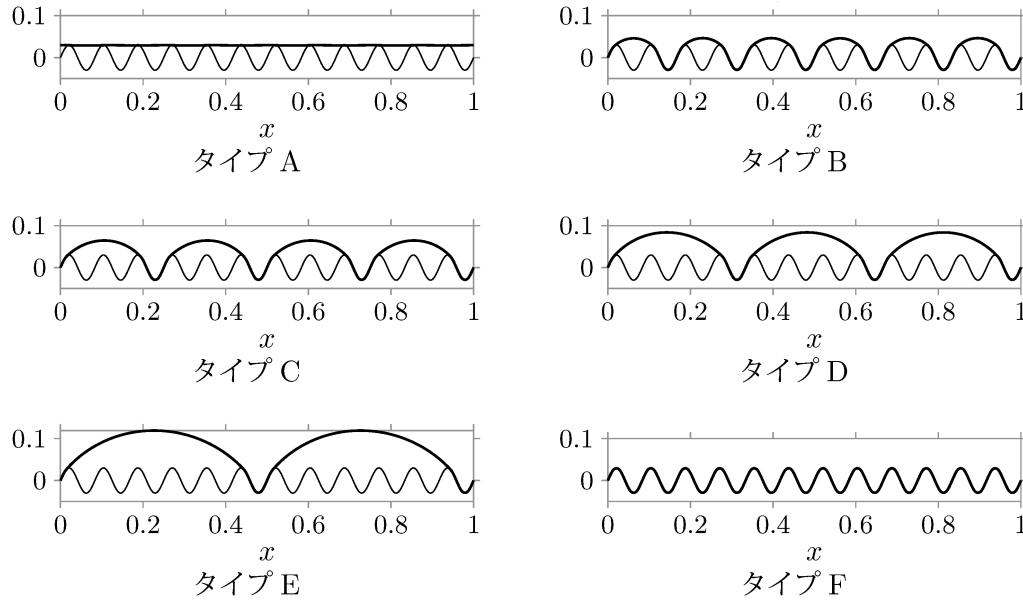


図2 障害物 ψ_1 に対する局所最適解の代表例. いずれも細線が障害物, 太線が局所最適解であり, $N = 400$ の場合をプロットしている. 物理的なパラメータは, いずれもパラメータ 1.

で大きいからである. 一方, パラメータ 1 では, タイプ F でも, 自明な局所最適解であるタイプ A でもなく, タイプ B が大域最適解となった. これは非自明な大域最適解である. タイプ C や D が大域最適解となるようなパラメータを見つけることはできなかったが, 存在すれば非常に面白い例になると考えられる.

	タイプ A	タイプ B	タイプ C	タイプ D	タイプ E	タイプ F
パラメータ 1	-0.0900541	-0.2465327	-0.2007124	-0.1404174	-0.1036022	0.2670607
	-0.0794536	-0.2064951	-0.1570993	-0.1187022	-0.0808694	0.4065035
	-0.0627887	-0.1648750	-0.1270884	-0.0986503	-0.0655316	0.5285373
パラメータ 2	-0.2105891	-1.3705604	-0.9284880	-0.6811337	-0.4637541	-2.2685733
	-0.1785572	-1.3498736	-0.8945974	-0.6749780	-0.4460241	-2.1895721
	-0.1388582	-1.3196272	-0.8848577	-0.6623300	-0.4400052	-2.1441625

表1 各パラメータ, 各局所最適解に対するエネルギーの値. 各セル内において, 上段から $N = 100$, $N = 200$, $N = 400$ の場合を記している. また, 各物理的パラメータにおいて, エネルギーが最小となっているものを太字で表している.

4.2. ほとんど特異的な障害物

障害物として,

$$\psi_2(x) = \frac{\varepsilon^2 x^2 (1-x)^2}{\varepsilon^2 + (2x-1)^2}, \quad \varepsilon = 0.01$$

という, 滑らかではあるものの, 局所的に曲率が高くなってしまふ, という関数を考える. 物理的なパラメータとして, 以下の3種類を考える.

	$C/2$	σ	γ
パラメータ 1	0.1	1	1
パラメータ 2	0.1	1	0.01
パラメータ 3	0.001	1	5

また, 離散化のパラメータは, $N = 100, 200, 400$ に対して, $h = \delta = 1/N$, $\rho = h/1000$ とした. このとき, 図 3 のような 4 つの局所最適解が得られた.

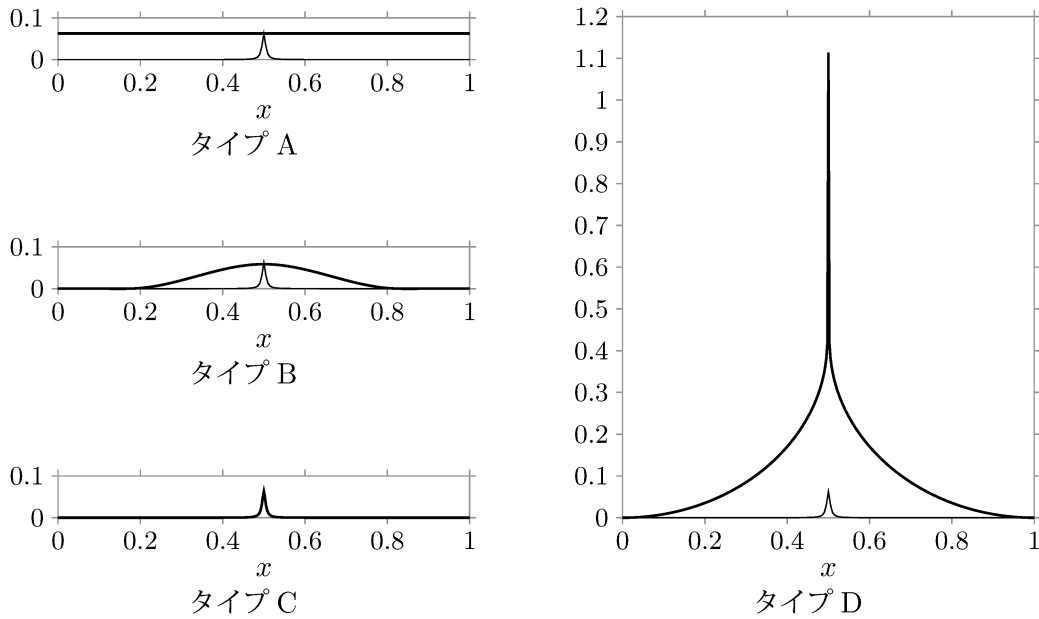


図 3 障害物 ψ_2 に対する局所最適解. いずれも細線が障害物, 太線が局所最適解であり, $N = 400$ の場合をプロットしている. 物理的なパラメータは, タイプ A と D がパラメータ 2, タイプ B がパラメータ 1, タイプ C がパラメータ 3 である.

特筆すべきは, タイプ D のように, 特異性があるかのような局所最適解が存在することである. しかも, このタイプの解の $W^{1,\infty}$ セミノルムは, N に対して比例しているような振る舞いをする (表 2). この原因はわかっていないが, 関数のグラフではなく平面内の曲線に対する最適化問題だとして解いたとき, ループのある解が存在していて, その解に対応しているのではないかと想像している. 今回のパラメータではタイプ D は大域最適解とはなっていないが, もしかしら, タイプ D が大域最適解となるようなパラメータが存在するかもしれない. もし存在すれば, 前節の最後に述べた「一般の物理的なパラメータでは, 大域最適解の存在は示せないのではないか」という予想が正しいということになる.

各パラメータ, 各局所最適解に対するエネルギーの値を表 3 に示しておく. タイプ B の局所最適解は, γ が大きいほど付着しやすくなるため, 山の“裾野”が狭くなる (図 4). 逆に, γ が小さいと裾野は広くなり, ある程度小さくなるとタイプ B の局所最適解が存在しなくなる (表 3, パラメータ 2).

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 400$
パラメータ 1	67.991211	138.22525	278.70029
パラメータ 2	68.027096	138.25028	278.71791

表 2 タイプ D の局所最適解の $W^{1,\infty}$ セミノルムの挙動.

	タイプ A	タイプ B	タイプ C	タイプ D
パラメータ 1	1.0	0.7915842		4.6643686
	1.0	0.8262222	×	4.7157447
	1.0	0.8501729		4.7457190
パラメータ 2	1.0			4.9166234
	1.0	×	×	4.9479670
	1.0			4.9612867
パラメータ 3	1.0	-3.2773058	-4.0788871	
	1.0	-3.2958225	-3.9828137	×
	1.0	-3.2943217	-3.6601521	

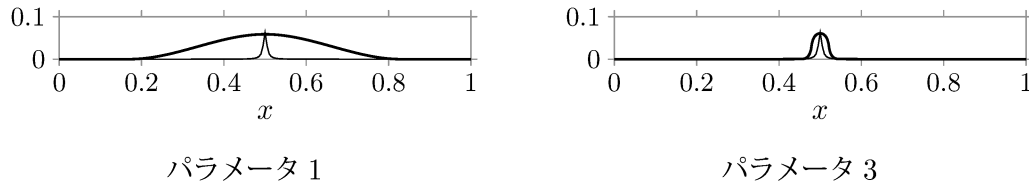
表 3 各パラメータ, 各局所最適解に対するエネルギーの値. 各セル内において, 上段から $N = 100$, $N = 200$, $N = 400$ の場合を記している. また, 各物理的パラメータにおいて, エネルギーが最小となっているものを太字で表している. × 印はそのタイプの局所最適解が存在しないことを示す.

図 4 パラメータ 1, 3 に対するタイプ B の最適解.

5. 終わりに

本研究では, 問題 (1) の最適解の数値計算と収束解析だけでなく, 問題 (1) の最適解の存在証明も目標の 1 つであった. しかしながら, 現在のところ, 定理 4 のように, 「傾きが有界」という条件付きでしか得られておらず, 大域最適解の存在は特別な場合でしか示せていない (定理 5). 一方で, 数値実験の結果, 図 3 のタイプ D のような, 傾きが発散しているような振る舞いをする局所最適解も見つかった. もしタイプ D が大域最適解となるようなパラメータを見つけることができれば, 一般には問題 (1) の大域最適解が存在しない, ということになる. したがって, そのようなパラ

メータを見つけること,あるいは大域最適解の存在を証明することは,興味深い課題である.

謝辞

本研究は, 文部科学省博士課程教育リーディングプログラム (数物フロンティア・リーディング大学院), および科研費 (No. 15J07471) の助成を受けました. また, 東京大学の三浦達哉氏には, この問題の提案をしていただいた上, ディスカッションなどの協力をいただきました. 特に, 第 4.2 小節の特異的な局所最適解を見つけるきっかけを与えていただきました. ここに感謝の意を表します.

参考文献

- [1] S. Baldo and G. Bellettini, Γ -convergence and numerical analysis: an application to the minimal partition problem. *Ricerche Mat.*, 40(1):33–64, 1991.
- [2] A. M. Bruckstein, R. J. Holt, and A. N. Netravali, Discrete elastica. *Appl. Anal.*, 78(3–4):453–485, 2001.
- [3] A. M. Bruckstein, A. N. Netravali, and T. J. Richardson, Epi-convergence of discrete elastica. *Appl. Anal.*, 79(1–2):137–171, 2001.
- [4] D. Dal Maso, *An Introduction to Γ -Convergence*. Birkhäuser, Boston, 1993.
- [5] L Euler. Additamentum I de curvis elasticis, methodus inveniendi lineas curvas maximi minimi proprietate gaudentes. Bousquent, Lausanne, 1744. In *Opera Omnia I*, Vol. 24, 231–297.
- [6] T. Kemmochi, *Numerical analysis of elastica with effects of obstacle and adhesion*. in preparation.
- [7] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edn. Dover Publications, New York, 1944.
- [8] T. Miura, Singular perturbation by bending for an adhesive obstacle problem. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 55:19(1), 2016.
- [9] O. Pierre-Louis, Adhesion of membranes and filaments on rippled surfaces. *Phys. Rev. E*, 78:021603, 2008.
- [10] D. A. Singer, Lectures on elastic curves and rods. In: *Curvature and Variational Modeling in Physics and Biophysics*, vol. 1002, pp. 3–32. Am. Inst. Phys., Melville, 2008.