

遅れ型微分方程式の解の振動について

茨城大学・教養部 小野瀬 宏

広島大学・理学部 草 野 尚

最近、関数微分方程式、殊に、遅れ型微分方程式（以下 RDE という）の解の振動性に関する研究が一部の関心を呼んでいる。研究の主要な方向の一つは、既存の常微分方程式（以下 ODE という）の振動理論とのアナロジーを追求することに向けられている。

本稿では、この方向の高階 RDE に対する結果を筆者の結果を中心に概説する。

1. 有界な解の振動

高階 ODE の有界な解の振動に関しては、Kartsatos や小野瀬の結果が知られている。次の定理はこれを RDE に拡張したものである。

定理 1.1. 次の RDE を考える:

$$(A) \quad x^{(n)}(t) + p(t)f(x(g_0(t)), x'(g_1(t)), \dots, x^{(n-1)}(g_{n-1}(t))) = 0$$

$$p \in C(0, \infty), \quad p(t) \geq 0;$$

$$g_i \in C(0, \infty), \quad g_i(t) \leq t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g_i(t) = \infty, \quad i=0, 1, \dots, n-1;$$

$$f \in C(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{sgn} f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = \operatorname{sgn} y_0.$$

「 n が偶数のとき (A)のすべての有界な解が振動する, n が奇数のとき (A)のすべての有界な解が振動するか, あるいは $t \rightarrow \infty$ のとき単調に 0 に収束する」ための必要十分条件は

$$\int^{\infty} t^{n-1} p(t) dt = \infty$$

である。

この定理を証明するためには, 次の事実を示せばよい。

定理 1.2. 「 n が偶数のとき (A)の有界な非振動解が存在する, n が奇数のとき (A)の有界な非振動解で $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a \neq 0$ なるものが存在する」ための必要十分条件は

$$\int^{\infty} t^{n-1} p(t) dt < \infty$$

である。

定理 1.2 の必要性の部分の証明は易しい。十分性の部分は, Schauder-Tychonoff の不動^点定理を援用して, 積分方程式

$$x(t) = a + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_t^{\infty} (s-t)^{n-1} p(s) f(x^{(i)}(g_i(s))) ds \quad (a \neq 0)$$

がある区間 $[T, \infty)$ で連続かつ有界な解を持つことを示すことによって証明する。(詳細は [6] 参照。)

上記の定理はもっと一般的な RDE

$$x^{(n)}(t) + F(t, x(g_0(t)), x'(g_1(t)), \dots, x^{(n-1)}(g_{n-1}(t))) = 0$$

にも拡張される。その際には, Wong, 小野瀬によって導入された "strongly continuous" なる概念が有用である。([1] 参照。)

2. すべての解の振動

高階非線型 ODE のすべての解が振動するための判定条件が Ličko-Švec, Kiguradze, Ryder-Wend, Kartsatos, 小野瀬らによって与えられている。先ず Ličko-Švec, Kiguradze の結果の RDE への拡張から:

定理 2.1. 次の RDE を考える:

$$(B) \quad x^{(n)}(t) + p(t)|x(g(t))|^{\alpha} \operatorname{sgn} x(g(t)) = 0$$

$$p \in C(0, \infty), \quad p(t) \geq 0;$$

$$g \in C(0, \infty), \quad g(t) \leq t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty.$$

(i) $0 < \alpha < 1$ のとき, (B) の「すべての解が振動する」ための必要十分条件は

$$(2.1) \quad \int^{\infty} [g(t)]^{\alpha(n-1)} p(t) dt = \infty,$$

(ii) $\alpha > 1$ のとき, (B) の「すべての解が振動する」ための十分条件は

$$(2.2) \quad \int^{\infty} [g(t)]^{n-1} p(t) dt = \infty \quad (g'(t) \geq 0).$$

$g(t)$ が $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = \text{const.} > 0$ をみたすならば, (2.2) はすべての解の振動の必要十分条件になる。($g'(t) \geq 0$ を仮定しないでも。)

上の命題における「すべての解が振動する」とは, 「 n が偶数のとき (B) のすべての解が振動する, n が奇数のとき (B) のすべての解が振動するか, あるいは $t \rightarrow \infty$ のとき単調に

0 に収束する」の略式である。

定理 2.1 の (i) は 草野-小野瀬 [4] によって証明された。(ii) の前半については 草野-小野瀬 [3], 後半については 小野瀬 [8] を参照のこと。

一般の $g(t)$ の場合には, (2.2) は (B) の「すべての解の振動」のための必要条件にはならない事ば Sficeo [原稿] によって示された。

次の RDE を考える:

$$(C) \quad x^{(n)}(t) + p(t)f(x(g(t))) = 0$$

$$p \in C(0, \infty), \quad p(t) \geq 0;$$

$$g \in C^1(0, \infty), \quad g(t) \leq t, \quad g'(t) \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty;$$

$$f \in C(R) \cap C^1(R - \{0\}), \quad \operatorname{sgn} f(y) = \operatorname{sgn} y, \quad f'(y) \geq 0, \quad y \neq 0.$$

定理 2.2. 次の性質をもつ関数 ϕ が存在するとき, (C) の「すべての解は振動する」:

$$\phi \in C^1(0, \infty), \quad \phi(y) > 0, \quad \phi'(y) \geq 0;$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dy}{f(y)\phi(y^{\frac{1}{n-1}})} < \infty, \quad \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{dy}{f(y)\phi((-y)^{\frac{1}{n-1}})} < \infty, \quad \varepsilon > 0;$$

$$\int^{\infty} \frac{[g(t)]^{n-1} p(t)}{\phi(g(t))} dt = \infty.$$

この定理は ODE に対する Kamenev の定理を拡張したものである。 $\phi \equiv 1$ としたものは, ODE に対する Ryder-Wend の結果

果の拡張を与え, $f(y) \equiv y$ としたものは ODE に対する Kiguradze の結果の拡張を与える。(証明は 草野-小野瀬 [5].)

$$\text{例. } x^{(4)}(t) + \frac{15}{16 t^{\frac{15}{4}} \log(1+t^{\frac{1}{4}})} x(g(t)) \log[1+|x(g(t))|] = 0$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t} = \text{const.} > 0 \text{ ならば すべての解は振動する.}$$

$$g(t) = t^{\frac{1}{2}} \text{ のとき 非振動解 } x(t) = t^{\frac{1}{2}} \text{ が存在する.}$$

一般的な RDE (A) の「すべての解の振動」の判定基準を求めることは容易ではない。可能なのは, $f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ が同次関数である場合: $f(\lambda y_0, \lambda y_1, \dots, \lambda y_{n-1}) = \lambda^2 f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ か,

(B) (あるいは (C)) との好都合な比較ができる場合: 例えば

$$\liminf_{|y_0| \rightarrow \infty} \frac{|f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})|}{|y_0|^\alpha} > 0, \text{ ぐらいであらうか. ([1], [3].)}$$

3. 強制振動

(C) に“外力項”をつけた RDE

$$(D) \quad x^{(n)}(t) + p(t)f(x(g(t))) = q(t)$$

を考える。 $q \in C(0, \infty)$ とする。(C) の「すべての解が振動する」場合, どのような $q(t)$ に対して (C) の振動性が保存されるか, 即ち (D) の「すべての解が振動する」か, という問題は応用面からも興味のある問題である。

この種の問題を ODE に対して手付けたのは Teufel と Kartsatos である。Kartsatos の考え方, 手法は RDE に対

しても通用する。

定理 3.1. 定理 2.2 の仮定をおく。次の性質をみたす関数 $Q \in C^n(0, \infty)$ が存在するものとする:

$$(I) \quad Q^{(n)}(t) = q(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0; \quad \text{または}$$

$$(II) \quad Q^{(n)}(t) = q(t), \quad \text{定数 } q_1, q_2 \text{ と列 } \lim_{m \rightarrow \infty} t'_m = \lim_{m \rightarrow \infty} t''_m = \infty \text{ が}$$

$$\text{あって, } Q(t'_m) = q_1, \quad Q(t''_m) = q_2, \quad q_1 \leq Q(t) \leq q_2.$$

このとき, (I) ならば, (D) のすべての解は振動するか, あるいは, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ である。 (II) ならば, (D) のすべての解は n が偶数ならば振動, n が奇数ならば振動か, あるいは $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - Q(t)] = -q_1, \text{ or } -q_2$ である。

証明は, $y(t) = x(t) - Q(t)$ とおいて (D) を (C) に似た方程式 $y^{(n)}(t) + p(t)f(y(q(t)) + Q(q(t))) = 0$ に変換し, この方程式の解を詳細に吟味して行く, という方式による。(草野-小野瀬 [5] 参照。)

Kartsatos の考え方を注目したのは Atkinson である。彼は、最近 "On second-order differential inequalities" の中で、Kartsatos の論文

アイデアを生かして 2 階の常微分方程式 (不等式)

$$x'' + H(t, x) \stackrel{(\leq)}{=} q(t)$$

の定性的研究に新しい知見を与えた。この Atkinson の結果の一部は さらに Kartsatos ("On n -th order differential inequalities") によって 高階の常微分方程式 (不等式)

$$x^{(n)} + H(t, x) \stackrel{(<)}{=} q(t)$$

に拡張された。その結果の主なものは勿論 RDE に対しても成立つ。その例を一つ：

定理 3.2. RDE

$$(*) \quad x^{(n)}(t) + H(t, x(q(t))) = 0$$

$$(**) \quad x^{(n)}(t) + H(t, x(q(t))) = q(t)$$

を考える。 $H \in C((0, \infty) \times \mathbb{R})$, $x H(t, x) > 0$ ($x \neq 0$), $H(t, x)$ は x に関して非減少, $q \in C(0, \infty)$, $q(t) \leq t$, $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \infty$ とする。

$q(t)$ は 定理 3.1 の条件 (I) または (II) をみたすものとする。

(*) の「すべての解が振動する」ならば, (**) の解について 定理 3.1 の結論と同じものが成立する。

参考文献

1. 草野: Proc. Carathéodory Symposium (Athens, 1973) (to appear)
2. 草野-小野瀬: Hiroshima Math. J. 2(1972), 1-13.
3. " " : Hiroshima Math. J. 2(1972), 263-270.
4. " " : Proc. Amer. Math. Soc. 40(1973).
5. " " : J. Differential Equations (to appear)
6. " " : Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. (to appear)
7. " " : Hiroshima Math. J. 4(1974) (to appear)
8. 小野瀬: Hiroshima Math. J. 3(1973).