

Carleson measures on bounded domains in $\mathbb{C}^n$

東京電機大 鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)

1.

単位円 $D := \{ |z| < 1 \}$ 内の有界正則関数の interpolation の問題に関する Carleson の結果は, D 内の正の measure μ に対する次の評価式な重要な役割を果たしている:

$$(1) \quad \int_D |f(z)|^p d\mu \leq C_p \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta$$

この評価式は, また, maximal function, H^p -空間, Douglas algebra 等においても重要な役割を果たしている。

いま, $T := \{ |z| = 1 \}$, $z_0 = e^{i\theta_0} \in D$ に対して

$$I(z_0) := \{ e^{i\theta} \mid |\theta - \theta_0| < 1 - |z_0| \}$$

とおく, $I \subset T$ に対して

$$S(I) := \{ z \in D \mid I(z) \subset I \}$$

とおく。この時, finite positive measure μ on D が条件:

$$(2) \quad \mu(S(I)) \leq C |I|^\beta \quad \text{for } \forall \text{ arc } I \subset T$$

をみたすとき, μ を order β の Carleson measure ($\beta = 1$ のとき単に Carleson measure) という。

(1) と (2) との関係については次の定理が成り立つ。

定理 1. (Carleson) finite measure μ on D に対して,
(1) が成り立つための必要十分条件は μ が Carleson measure であることである。

また, Carleson measure と BMO との関係において,
次の定理が成り立つ。

定理 2. (Fefferman and Stein) $f \in L^1(T)$ が BMO であるための必要十分条件は

$$d\mu_f := |\nabla u(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} d\bar{z} dz \quad (u: f \text{ の harmonic extension})$$

が D の Carleson measure であることである。

定理 1, 定理 2 の一般領域への拡張, 多変数への拡張は後々述べているがここでは多変数への拡張を述べる。

2.

$\mathbb{C}^n$ の多重円板 D^n における Carleson measure を次の様に定義する:

T^n を D^n の Silov 境界とし, connected open set $U \subset T^n$ に対して

$$S(U) := \{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D^n \mid I_{z_1} \times \dots \times I_{z_n} \subset U \}$$

(I_{z_k} は 1 変数におけるもの) とおき, finite positive measure μ on D^n が条件:

$$(3) \quad \mu(S(U)) \leq C|U|^\beta \quad \text{for } \forall \text{ connected open set } U \subset T^n$$

を満たすとき, μ を order β の Carleson measure ($\beta=1$ のとき, 単に, Carleson measure) という。

この時, 定理 1 の多変数への拡張は次の様になる。

定理 3. (Chang) finite positive measure μ on D^n に対して, 評価式

$$(4) \quad \int \dots \int_{D^n} |u(z)|^p d\mu(z) \leq C_p \int \dots \int_{T^n} |f(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})|^p d\theta_1 \dots d\theta_n$$

for $\forall f \in L^p(T^n)$

(u は f の pluriharmonic extension)

が成り立つための必要十分条件は μ が Carleson measure であることである。

定理 3 の証明には Hörmander の定理の証明法が用いられるが, Hörmander の定理は強擬凸領域における Carleson の定理を与えるものでもある。

3.

D を $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) の有界領域で, この境界 ∂D は C^2 級とある. $S^p(D)$ ($1 < p < \infty$) を D で定義された非負実調和函数 u の全体とある:

$$(5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D} u(y + \varepsilon N(y))^p d\omega(y) < \infty$$

($N(y)$ は y における単位内法線, $d\omega$ は ∂D 上の面素).

明らかに, u が調和で, $|u|$ が (5) を満たせば, $|u| \in S^p(D)$ である.

この時, 次の定理が成り立つ.

定理 4. (Hörmander) finite positive measure μ on D に対

して

$$(6) \quad \int_{|x-y| < \delta} d\mu(x) \leq C_1 \delta^{n-1} \quad (y \in \partial D, \delta > 0)$$

($x := (x_1, \dots, x_n)$ に対して, $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$)

が成り立てば,

$$(7) \quad \int_D u^p d\mu \leq C_2 p \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_{\partial D} u^p d\omega \quad \text{for } u \in S^p(D)$$

(ここで, 或る p に対して, $\overline{D}$ で連続で, D で正なる調和函数 u に対して (7) が成り立てば, (6) が成り立つ).

この定理は 1 変数の種々の事柄にも応用できる.

D が $\mathbb{C}^n$ の C^2 級の境界 ∂D をもつ有界の強擬凸領域とある。すなわち, D の近傍で強多重調和な C^2 級の函数 $\varphi(z)$ (complex Hessian $\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \bar{\xi}_j \cdot \xi_k > 0$) が存在して, $D = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \varphi(z) < 0\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \varphi(z) = 0\}$, $\nabla \varphi \neq 0$ の ∂D . この時, $z_0 \in \partial D$ における実接平面を π_{z_0} とある;

$$\pi_{z_0} = \{(z, \bar{z}) \mid \operatorname{Re} \sum \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} (z_j - z_{0j}) = 0\}.$$

この π_{z_0} に含まれる複素接平面を $\pi_{z_0}^{\mathbb{C}}$ と表す。この時,

$K(z_0, \gamma)$: $\pi_{z_0}^{\mathbb{C}}$ 上の, 中心を z_0 , 半径を γ とある球

$$A(z_0, t) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K(z_0, \sqrt{t})) < t\}$$

$$B(z_0, t) := A(z_0, t) \cap \partial D.$$

$PS^p(D)$: 条件(5)を満たす D で定義された非負多重調和全体。

この時, 次の定理が成り立つ。

定理5 (Nörmander) finite positive measure μ on D に対して

$$(8) \quad \int_{A(z_0, t) \cap D} d\mu \leq C_1 t^m \quad \text{for } \forall z_0 \in \partial D, t > 0$$

が成り立てば,

$$(9) \quad \int_D u^p d\mu \leq C_2 \int_{\partial D} u^p d\omega \quad \text{for } \forall u \in PS^p(D)$$

が成り立つ。更に, f が D で正調和, H^p に入れば, 次の式が

成り立つ

$$(9)' \quad \int_D |f|^p d\mu \leq C_2 \int_{\partial D} |f|^p d\omega$$

(或る p に対して $(9)'$ が成り立てば (8) が成り立つ)。

ここで, $z \in D$ に対して, $\tilde{z} \in \partial D$ を $d(\tilde{z}, z) = \inf \{d(z, w) \mid w \in \partial D\}$ (= z を $d(z)$ と表す) なるものとし,

$$I(z) := \{w \in \partial D \mid d(w, \tilde{z}) < d(z)\}$$

とおき, ∂D 上の任意の開集合 U に対して

$$S(U) := \{z \in D \mid I(z) \subset U\}$$

とおく。この時, 条件 (8) は次のことと同値である:

$$(8)' \quad \mu(S(U)) \leq C \omega(U)$$

$((8), (8)')$ をみたす measure μ を Carleson measure という)。

4.

定理2に関連して次の定理が成り立つ。

定理6. (Hastings, Chang, Merryfield) $f \in L^\infty(T^n)$ に

対して

$$d\mu_f := |\nabla u(z)|^2 \log \frac{1}{|z_1|} \cdots \log \frac{1}{|z_n|} d\bar{z}_1 dz_1 \cdots d\bar{z}_n dz_n$$

(u は f の pluriharmonic extension) は poly disk D^n 上の

Carleson measure である。

こゝで

$$G := \mathbb{R}_+^n := \{t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_j > 0, j=1, 2, \dots, n\}$$

$$\mathcal{H} := \mathbb{R}^n \times G := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in \mathbb{R}^n, t \in G\}$$

$$R(x; a) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y_j - x_j| \leq a_j, j=1, \dots, n\}$$

とおき、任意の開集合 $I \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$S(I) := \{(x, t) \in \mathcal{H} \mid R(x, t) \subset I\}$$

とおく。この時、finite positive measure μ on $\mathcal{H}$ が条件

$$\mu(S(I)) \leq C |I|^\beta \quad \text{for } \forall \text{ open set } I \subset \mathbb{R}^n$$

を満たすとき、 μ を order β の Carleson measure on $\mathcal{H}$ ($\beta=1$ のときは単に Carleson measure) という。

この時、定理 6 は次の様により言い換えることができる。

定理 6' (Chang, Merryfield) $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$d\mu_f := |\nabla_1 \cdots \nabla_n u(x, t)|^2 t \, dt \, dx$$

(u は f の pluriharmonic extension) は Carleson measure on $\mathcal{H}$ である

また

$$\Gamma_a(x) := \{(y, t) \in \mathcal{H} \mid |y_j - x_j| \leq a_j t_j, j=1, \dots, n\}$$

$\mathcal{H}$ 上の連続関数 u に対して

$$N_a(u)(x) := \sup\{|u(y, t)| \mid (y, t) \in \Gamma_a(x)\}$$

とおくとき, 次の定理の系として得られる:

定理 7 (Merrifield) u を n -harmonic on $\mathcal{H}$ とし, f を次の様な $\mathbb{R}^n$ 上の関数とする, 即ち, 或る定数 k_f に対して $\|f - k_f\|_{L^2} < \infty$. また, $\sup f$ 上で $N_a(u) \leq \lambda$ とする定数 $\lambda > 0$ が存在する. この時, もし, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 又は $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$ for $\forall t \in \mathcal{G}$ ならば, 次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{H}} |\nabla_1 \cdots \nabla_n u(x, t)|^2 |\Phi_a(\cdot, t) * f(x)|^2 t \, dt \, dx \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^n} N_a(u)^2(x) |f(x)|^2 \, dx + C \lambda^2 \|f - k_f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ただし, Φ_a は次の様な関数である: ϕ を $C_0^1(\mathbb{R})$ の関数で, ϕ は偶関数で, 非負で, $[0, 1]$ において減少で, $\text{supp } \phi = [-1, 1]$ であり $\int_{-1}^1 \phi(x) \, dx = 1$. この時,

$$\Phi_a(x, t) := \prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j t_j} \phi\left(\frac{x_j}{a_j t_j}\right).$$

文 献

- [1] L. Carleson: An interpolation problem for bounded analytic functions, *Amer. Jour. Math.*, 80(1958) 921-930.
- [2] L. Carleson: Interpolation by bounded analytic functions and corona problem, *Ann. of Math.* 76(1962) 547-559.
- [3] S. Y. A. Chang: A characterization of Douglas subalgebras, *Acta Math.*, 137(1976) 81-89.
- [4] S. Y. A. Chang: Carleson measure on the bidisk, *Ann. of Math.*, 109 (1979) 613-620.
- [5] W. W. Hastings: A Carleson measure theorem for Bergman spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 52(1975) 237-241.
- [6] L. Hörmander: L^p -estimates for (pluri-) subharmonic functions, *Math. Scand.*, 20(1967) 65-78.
- [7] D. E. Marshall: Subalgebras of L^∞ containing H^∞ , *Acta Math.*, 137(1976) 91-97.
- [8] K. G. Merryfield: On the area integral, Carleson measures and H^p in the polydisk, *Indiana Univ. Math. Jour.*, 34(1985) 663-685.