

# 偏微分方程式に対する指数漸近解析

神戸大学 (Kobe University) 片岡 武 (Kataoka, T.)  
マサチューセッツ工科大学(MIT) Akylas, T. R.

## 要旨

A notable feature of ship waves at small Froude numbers ( $F \ll 1$ ) is that the wave amplitudes are exponentially small with respect to  $F$ . Moreover, as  $F \rightarrow 0$  the assumption of linearization is not appropriate. Thus, the role of nonlinear effects in ship wave patterns at small  $F$  hinges on exponential ('beyond-all-orders') asymptotics. This outstanding theoretical issue is addressed here in the context of a simple partial differential equation with a quadratic nonlinear term. To understand how nonlinearity affects this ship wave pattern, we develop an exponential asymptotics technique applicable to a partial differential equation. The asymptotic predictions generally are supported by direct numerical computations.

## 1. 緒言

物体(船)や底面地形を過ぎる流れにより放射される水波のことを、広く航跡波と呼ぶ。Kelvin(1887)<sup>(1)</sup>が半角 $19.45^\circ$ のくさび領域内に形成される航跡波の「線形解」を提示して以来、長い研究の歴史があるが、理論面での進展は本質的には線形理論にとどまっている<sup>(2)</sup>。本研究の目的は、航跡波の「非線形解」を求めることである。第一歩として今回は、水波の Euler 方程式系をフルに解くのではなく、線形分散関係が一致し、非線形項が単純な 2 次非線形項で表されるような 2 次元数値モデル方程式に基づき、航跡波の非線形解を求める。

航跡波は、フルード数  $F$  の小さい場合、指数に  $-F^{-1}$  を含む指数関数に比例して小さくなることが知られている<sup>(4)</sup>。本研究ではこの領域を考えている。このようなフルード数  $F$  の小さい領域においては、線形解がほとんど成り立たないことも指摘されており、「指数漸近解析」と呼ばれる非線形理論により取り扱う必要がある<sup>(5, 6)</sup>。従来の方法では、物理座標を 2 次元複素平面へと拡張し、虚軸上の特異点周りの解析によって、指数関数的に小さい項を求めていた。ただしこの従来手法では、波の伝播方向が 2 次元となるような物理現象に対しては複素拡張が非常に困難となる問題点を抱えている<sup>(7)</sup>。

そこで本報告では、1次元数値モデルの際に使用した、フーリエ空間における指数漸近解析手法を、2次元モデルに拡張することを試みる。フーリエ変換により、物理空間における虚軸上の特異点は、波数空間上では実軸に沿っての指数関数的な減衰にとって代わる。したがって解析は実軸上にとどまり、本手法は波の伝播方向が2次元となるような問題に対しても適用可能である。実際に本手法により、2次元モデル方程式の航跡波解を求めることができる<sup>(8)</sup>。将来的にはここで確立した解析手法を、水平方向2次元の水波問題へ適用することを念頭に置いている。

## 2. 問題

本研究で取り扱う2次元数値モデル方程式は、 $u(x, y)$  に対する以下の非同次偏微分方程式

$$\mu^2 u_{xxxx} + u_{xx} + u_{yy} - \varepsilon(u^2)_{xx} = f_{xx} + f_{yy}, \quad (1)$$

である。これは、定常 fKP 方程式の外力項  $f_{xx}$  に、 $f_{yy}$  を加えることによって等方的としたものである。放射条件：

$$u(x, y) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (2)$$

との境界値問題を考える（説明図を図1に示した）。ここで、 $\mu$ ,  $\varepsilon$  ( $\ll 1$ ) はいずれも与えられた小さな定数、外力  $f(x, y)$  は与えられた局所的関数であり、フーリエ変換は次式で定義される：

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{f} \end{Bmatrix}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} u \\ f \end{Bmatrix}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} u \\ f \end{Bmatrix} \exp(-ikr \cos(\theta - \varphi)) r dr. \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{x} = (x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$  は2次元空間座標ベクトル、 $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = k(\cos\varphi, \sin\varphi)$  ( $k$ : 波数ベクトルの大きさ) は2次元波数ベクトルを表す。放射条件(2)より、航跡波は外力の背後 ( $x \rightarrow \infty$ ) にのみ現れ、次の形に表すことができる。

$$u \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=1}^2 R_m(\theta) \sin[k_m(\theta) \cos(\varphi_m - \theta) r + \psi_m(\theta)] \quad (r \gg 1). \quad (4)$$

つまり、波長  $2\pi/k_m(\theta)$  の波が角度  $\theta$  方向に放射される (図 1). 下添え字  $m$  は波の種類を表し、 $m=1,2$  はそれぞれ縦波、横波を表す. 本研究の目的は、この放射波の振幅  $R_m(\theta)$  と位相のずれ  $\psi_m(\theta)$  (および波数  $k_m(\theta)$ ) を、以下の仮定の下で求めることである.

仮定:  $f(\mathbf{x})$  は滑らかな局所的関数と仮定する. このときフーリエ変換  $\hat{f}(\mathbf{k})$  は、次のように指数関数的に減衰する性質をもつ:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) \sim A(\varphi) k^\alpha \exp(-\beta k) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (5)$$

ただし  $A(\varphi)$  は  $\varphi$  の複素関数、 $\alpha, \beta(>0)$  は実定数である.

モデル方程式 (1) の物理的意味を説明しておく. (1) は水波の方程式から系統的に導くことはできない (したがってモデル方程式である). ただし、パラメータ  $\mu$  を水波問題におけるフルード数の 2 乗:

$$\mu = F^2 \quad (6)$$

とし、外力項を適切に設定すれば本モデル方程式 (1) で  $\varepsilon = 0$  とした線形解  $u(\mathbf{x})$  は、深い水における航跡波の水面変位と一致し、いわゆるケルビン波パターンを形成する<sup>(8)</sup>. したがって、本モデル方程式 (1) の ‘モデル化’ は非線形項に集約されている. ここでは水波の非線形性の複雑さを避けるために、単一の 2 次非線形項 ((1) の  $\varepsilon$  を含む項) を採用している.

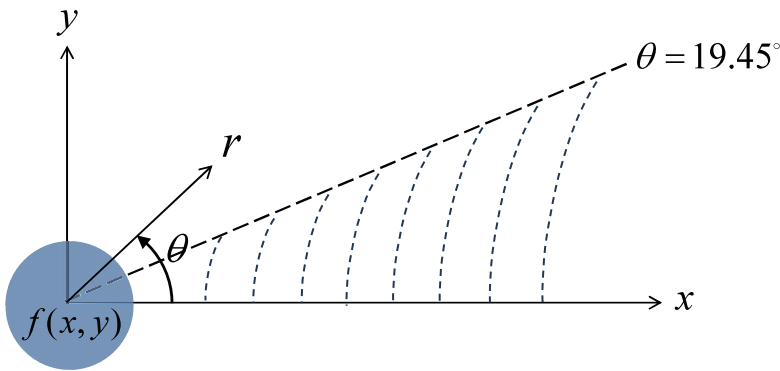


Figure 1. Two-dimensional model problem mimicking the generation of ship waves due to flow past a forcing  $f(x, y)$ . The dashed lines represent wave crests, and the dash-dot line represents the Kelvin wedge. Only the region for  $y > 0$  is shown.

### 3. 指数漸近解析

指数漸近解析 (Exponential asymptotics) と呼ばれる解析法を概説する. モデル方程式(1)にフーリエ変換(3)を施すと,  $\hat{u}(\mathbf{k})$  に対する式

$$(1 - \mu^2 k^2 \cos^4 \varphi) \hat{u}(\mathbf{k}) - I(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}), \quad (7)$$

が導かれる. ここで,  $I(\mathbf{k})$  は 2 次元のたたみこみ積分:

$$I(\mathbf{k}) = \varepsilon \cos^2 \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\mathbf{p}) \hat{u}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (8)$$

で表される非線形項である. なお,  $\hat{u}(\mathbf{k})$  は  $k = 1/(\mu \cos^2 \varphi)$  上に単極をもち, この単極の留数が航跡波の振幅を決めるため, (7)からその留数を求めることが解析の中心となる.

詳細は文献[8]に譲り, 要点のみを述べる. まず求めたい留数の単極が  $k = O(1/\mu)$  に存在することから,

$$\boldsymbol{\kappa} = \mu \mathbf{k} \quad (9)$$

を導入する. (5)にならって, 解を

$$\hat{u}(\mathbf{k}) \sim \frac{U(\boldsymbol{\kappa})}{\mu^\alpha} \exp(-\beta k) \quad (10)$$

の形に置く. ただし  $U(\boldsymbol{\kappa})$  はゆっくりと変化する振幅関数であり,  $\exp(-\beta k)$  が変化の速い指数関数的に減衰する項を表す. (10)を(7)に代入すると,  $U(\boldsymbol{\kappa})$  に対する式:

$$(1 - \kappa^2 \cos^4 \varphi) U(\boldsymbol{\kappa}) - I_1(\boldsymbol{\kappa}) = A \kappa^\alpha, \quad (11)$$

が得られ,  $I_1(\boldsymbol{\kappa})$  は最終的に, 積分範囲が有限の ‘1 次元’ たたみ込み積分に帰着できる.

$$I_1(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{\varepsilon}{\mu^{\alpha+3/2}} \sqrt{\frac{8\pi}{\beta \kappa}} \cos^2 \varphi \int_0^\kappa \sqrt{\lambda(\kappa - \lambda)} U(\boldsymbol{\lambda}) U(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\lambda}) d\lambda. \quad (12)$$

また, ここに含まれる係数  $\varepsilon / \mu^{\alpha+3/2}$  が 1 となる条件より,

$$\varepsilon = \mu^{\alpha+3/2}. \quad (13)$$

積分方程式(11)は与えられた  $\varphi$  に対して  $0 < \kappa < 1/\cos^2 \varphi$  の範囲で陽的に解くことができる. その結果,

$$U(\boldsymbol{\kappa}) \sim \frac{AC(\varphi)}{\kappa - 1/\cos^2 \varphi} \left( \kappa \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) \quad (14)$$

の形で解が得られ、 $\hat{u}(\mathbf{k})$  のフーリエ逆変換を実行すれば、航跡波解(4)の振幅  $R_m$  および位相のずれ  $\psi_m$  が

$$R_m = 2(\cos^2 \varphi_m)^{\alpha+1} C(\varphi_m) R_m^{\text{lin}}, \quad (15a)$$

$$\Psi_m = \Psi_m^{\text{lin}}, \quad (15b)$$

と得られる。ただし、

$$R_m^{\text{lin}} = \frac{(2\pi)^{3/2} A \exp(-\beta k_m)}{\mu^{\alpha+3/2} |g''(\varphi_m)|^{1/2} (\cos^2 \varphi_m)^{\alpha+2}}, \quad (16a)$$

$$\Psi_m^{\text{lin}} = \frac{\pi}{4} \text{sgn}(g''(\varphi_m)), \quad (16b)$$

は線形解であり、 $k_m$  と  $g(\varphi)$  は、

$$k_m = \frac{1}{\mu \cos^2 \varphi_m}, \quad g(\varphi) = \frac{\cos(\varphi - \theta)}{\cos^2 \varphi}, \quad (17)$$

と表される。 $\varphi_m$  は  $g'(\varphi)=0$  の解として与えられる。

#### 4. 理論解と数値解の比較例

外力項のフーリエ変換が、

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{A}{2} \left( \frac{\tanh(\pi k/2)}{k} \right)^{1/2} \text{sech} \frac{\pi k}{2} \quad (18)$$

の場合をとりあげ、線形理論解(16)、非線形理論解(15)、モデル方程式(1)の直接数値解を比較して示す。(18)は  $\alpha = -1/2$ 、 $\beta = \pi/2$  の場合に相当する。実は  $\alpha = -1/2$  の場合、3節の解析はさらに先があり、非線形理論解は(15)よりもやや複雑な形をとる。ここではその説明は割愛し(詳細は文献[8])、 $\mu = 0.2$ 、 $A = 0.3$  のときの結果を図2に示した。全体的に見て、波のパターンはいずれもよく一致している。波の振幅に関しては、非線形理論解は数値解とよい一致を示しているのに対し、線形解は直接数値解を大幅に過小評価していることが分かる。つまり、線形理論が役に立たないのである。

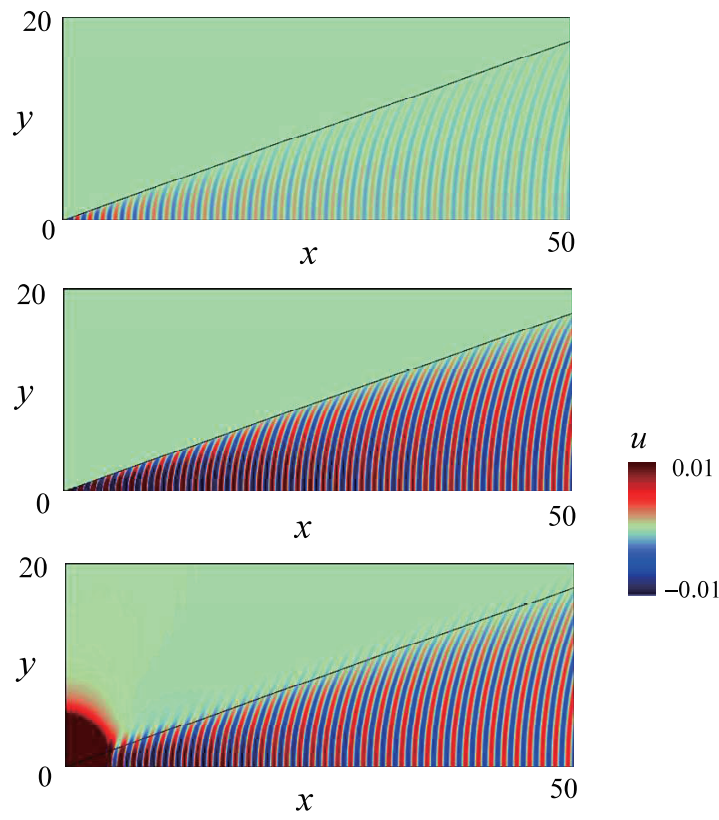


Figure 2. Contour plots of the wave response for  $\mu = 0.2$  to the forcing term (18) with  $A = 0.3$  according to the linear theory (16) (top), the asymptotic nonlinear theory (middle) and direct numerical solution (with  $\varepsilon = \mu$ ) of (1) (bottom). The solid lines show the Kelvin wedge  $\theta = 19.45^\circ$ .

5. 結言

2次元モデル方程式(1)を基として、フルード数の小さい場合を想定した $\mu \ll 1$ の場合を対象とし、外力の背後に定常的に放射される航跡波の非線形理論解を求めた．直接数値解と比較した結果、波のパターン、振幅ともに直接数値解とよく一致した．一方、線形理論解は、直接数値解と比較して波のパターンは一致するが、振幅は大幅に過小評価するという結果となった．つまり線形解は非線形解から大きく逸脱しており、航

跡波が強い非線形性をもつことが確認できた。

今後は、本研究で導入した波数空間における偏微分方程式に対する指数漸近解析を、水波方程式に対して適用し、非線形理論解を求める予定である。

## 参考文献

- (1) Whitham, G. B., “*Linear and Nonlinear Waves*,” Wiley (1974) Sec. 13.9.
- (2) Thomson, W. [Kelvin], “On ship waves”, *Proc. Inst. Mech. Engineers*, **38** (1887) pp. 409-434.
- (3) Kataoka T., Akylas T. R., “Nonlinear effects in steady radiating waves: An exponential asymptotics approach”, *Physica D*, **435** (2022) 133272.
- (4) Dagan G., “Waves and wave resistance of thin bodies moving at low speed: the free-surface nonlinear effect”, *J. Fluid Mech.*, **69** (1975) pp. 405– 416.
- (5) Chapman S. J., Vanden-Broeck J. -M., “Exponential asymptotics and gravity waves”, *J. Fluid Mech.*, **567** (2006) pp. 299– 326.
- (6) Lustri C. J., McCue S. W., Binder B. J., “Free surface flow past topography: a beyond-all-orders approach”, *Euro. J. Appl. Math.*, **23** (2012) pp. 441– 467.
- (7) Vanneste, J., “Balance and spontaneous wave generation in geophysical flows”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **45** (2013) pp. 147–172.
- (8) Kataoka, T., Akylas, T. R., “Nonlinear Kelvin wakes and exponential asymptotics”, *Physica D*, **454** (2023) 133848.