

ツングルのひもの平行性と擬平行性

(註 → p12)

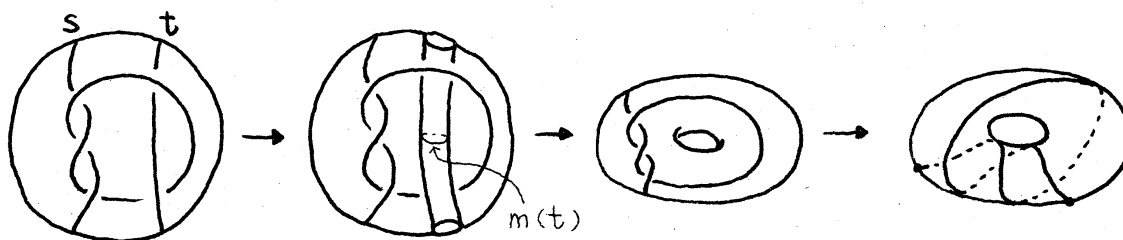
東京大学数理科学研究科 林忠一郎 (Chuichiro Hayashi)

§0. Introduction

多様体は全てコンパクトかつ向き付け可能とする。

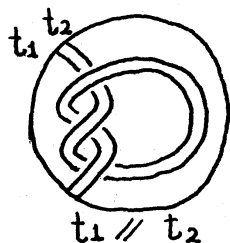
定義 (M, T) が n -もつれ であるとは、 M が連結 3-manifold で、 T が M 内の n 本の disjoint proper arcs であること。 ∂M は連結でなくてもよい。特に M が ball のとき、 (M, T) を n -ツングル とよぶ。

ひもたち $T' = \{t_1, \dots, t_k\} \subset T$ が n -もつれ (M, T) で primitive とは、 $E(M, T) = \text{cl}(M - N(T))$ が disjoint proper discs $D_1, \dots, D_k$ で $\partial D_i \cap m(t) = 1 \text{ point (if } t = t_i) \text{ かつ } \emptyset \text{ (if } t \neq t_i)$ なるものを含むこと。ここに $m(\cdot)$ はメリディアンループのことである。 T は ∂M に「へばりついている」という感覚。



v も $s \in T$ が v も $t \in T$ に ギ-parallel とは、 v も s が、
もつれ $(E(M, \{t\}), T - \{t\})$ において primitive なこと。 $s \rightarrow t$
と書く。前頁の図を見て欲しい。

v もたち $t_1, t_2 \in T$ が parallel とは、 $E(M, T)$ が proper disc
 D で、 $\partial D \cap m(t_1) = 1 \text{ pt}$, $\partial D \cap m(t_2) = 1 \text{ pt}$ かつ、他の v ものメ
リディ、アンループと ∂D が交わらないものを含むこと。



$t_1 // t_2$ と書く。 $t_1 // t_2 \Rightarrow t_1 \leftrightarrow t_2$ となること
に注意せよ。ここに $t_1 \leftrightarrow t_2$ は、 t_1 と t_2 が互い
にギ-parallel なことを表わす。

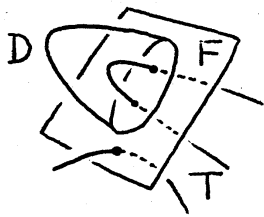
【問】 $t_1 \leftrightarrow t_2 \Rightarrow t_1 // t_2$ は成り立つか？

上の問は、ある条件下で成り立つことが示せた。例えば2-
タンクルでは成立する。それについては §2 を見て欲しい。
ところが、上の問は一般には成立しないこともわかった。そ
れを §1 で見てゆく。

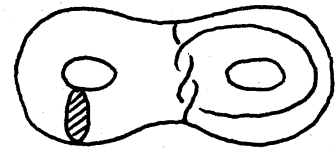
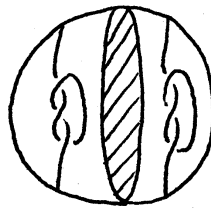
§ 1. 反例

3-タンクルにおける §0 の問の反例を与える。

定義 (M, T) を n -もつれとする。 F を ∂M の subsurface か又は
 M 内に proper に埋めこまれた surface とする。 F が T-incom-
pressible とは、 $F \cap (UT) = \emptyset$ かつ D を M 内に埋めこまれた
disc で、 $D \cap (UT) = \emptyset$ かつ $D \cap F = \partial D$ とすると、 ∂D は F
上で UT と交わらない disc をはる。 UT は T の和集合。



F は T -compressible



splittable

n -もつれ (M, T) が splittable とは ∂M が T -compressible なこと。

補題 1.1 (B, T) , $T = \{t_1, t_2\}$ は 2-タングル. $i=1, 2$ について, $E(B, \{t_1\})$ は S^3 内の $\text{genus} = g_1$ の結び目 K_1 の外部に同相で, $E(B, T)$ が proper に埋めこまれた surface F で, $\text{genus } F = (H_1(F) \text{ 上の intersection form の rank})/2 < g_1$, $\partial F \cap m(t_1) = 1 \text{ pt}$ なるものを含むとする。

このとき, タングル (B, T) は non-splittable である。

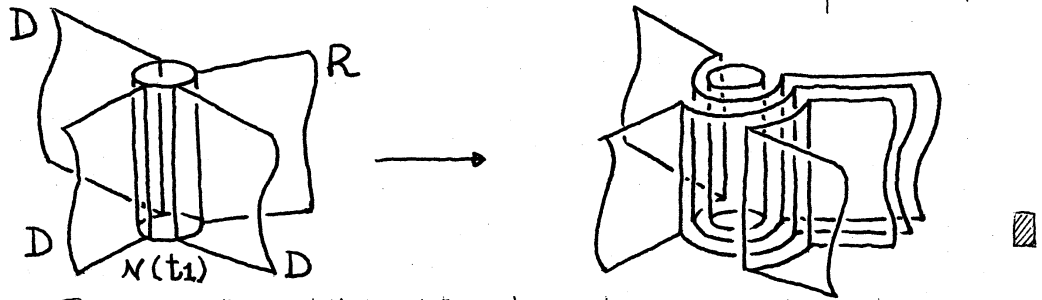
<pf> D を タングル (B, T) を split する disc として, 矛盾を導く。 D は B を 2 つの ball B_1 と B_2 に分ける。 $B_1 \cap t_1$ とする。 $F \cap E(B_1, \{t_1\})$ の component H で, $\partial H \cap m(t_1) = 1 \text{ pt}$ なるものをとる。 H をもとに結び目 K_1 の $\text{genus} < g_1$ の Seifert surface を構成できる。これは矛盾。 $\square$

次の補題は ギ-parallelity は推移律を満たすことを含む。

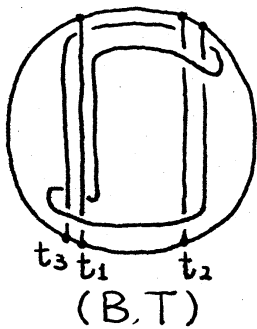
補題 1.2 (M, T) を n -もつれとする。 v もたち $T_1, T_2 \subset T$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ と v も $t \in T$ について, t はもつれ $(E(M, T_1 \cup T_2), T - T_1 \cup T_2)$ において primitive, T_1 はもつれ $(E(M, T_2), T - T_2)$ において primitive とする。このとき t はもつれ

$(E(M, T_2), T - T_2)$ において primitive である。

<pf> t の $(E(M, T_1 \cup T_2), T - T_1 \cup T_2)$ における primitivism を D とし、 T_1 の $(E(M, T_2), T - T_2)$ における primitivism を R とする。 D は R に交わらないようにとり直すことができる。
 ∂D と T_1 の π もたちのメリディアンループたちの交点付近において、 D に R の discs たちのコピーを次々につぎ足していくことにより、 t の $(E(M, T_2), T - T_2)$ における primitivism を得る。



例1 左下図の3-タンクルは、 $t_1 \leftrightarrow t_2$ だが、 $t_1 \parallel t_2$ でない。

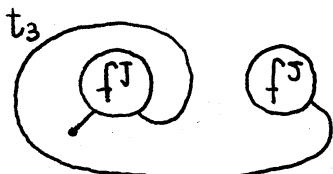
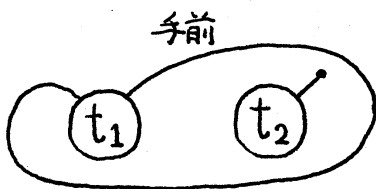


$t_1 \leftrightarrow t_2$ を見るために、次の観察をする。

t_3 は $\partial E(B, \{t_1, t_2\})$ にへばりついている。

実際、 $\exists D_1 \subset E(B, T)$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \partial D_1 \cap (m(t_1) \cup m(t_2)) = 3 \text{ pts} \\ \partial D_1 \cap m(t_3) = 1 \text{ pt} \end{cases}$$

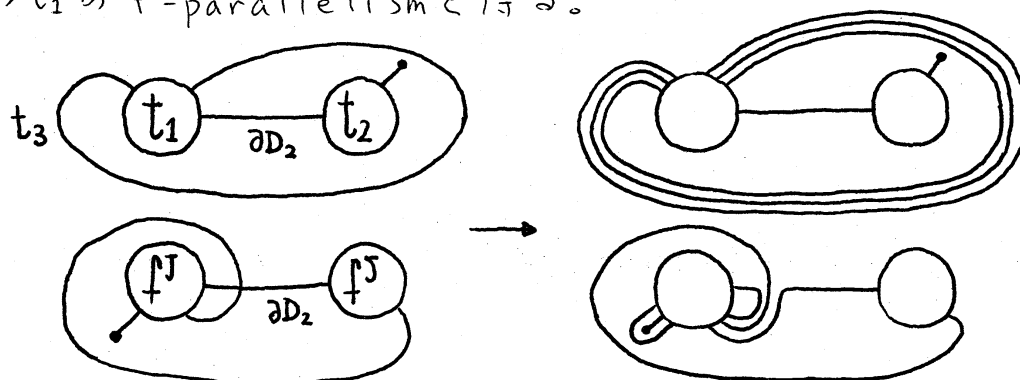


そこで t_3 を $\partial E(B, \{t_1, t_2\})$ 上の模様と
 うことにする。その絵を画くために、

$m(t_1)$ と $m(t_2)$ に沿って $\partial E(B, \{t_1, t_2\})$ を切
 る。模様としての t_3 の絵も切断される。

左図がそれ。

さて、 $t_2 \rightarrow t_1$ のギ-parallelismを作る。まず t_3 を無視したときの t_1 と t_2 の間の parallelism D_2 を考える。 ∂D_2 は左下図のようになる。さらに ∂D_2 を t_3 に沿って isotopy で動かして t_3 と交わらないようにできる。この isotopy を t_3 に沿ってある方向に行うと $\partial D_2 \cap m(t_2) = 1 \text{ pt}$ が保たれる。右下図のようになる。この ∂D_2 の isotopy は D_2 全体に拡張できるから、 $t_2 \rightarrow t_1$ のギ-parallelismを得る。



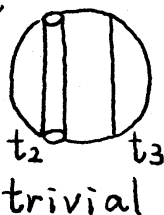
途中、 ∂D_2 の isotopy を t_3 に沿って逆方向に行うと、 $t_1 \rightarrow t_2$ のギ-parallelismを得る。

次に $t_1 \parallel t_2$ でないことを示す。まず (B, T) が non-splittable なことを見る。それには $(B, \{t_1, t_3\})$ と $(B, \{t_2, t_3\})$ が non-splittable なことを見てゆけばよいが、両方とも同様に示せるので、 $(B, \{t_2, t_3\})$ の方を考える。 t_3 は $\partial E(B, \{t_1, t_2\})$ にへばりついていて、 $t_1 \rightarrow t_2$ なので、Lemma 1.2 によつて $t_3 \rightarrow t_2$ である。そこで Lemma 1.1 を用いると、 $(B, \{t_2, t_3\})$ が non-splittable であることがわかる。

ここで $t_1 \parallel t_2$ であると仮定して、 $E(B, \{t_3\})$ が trivial 結

び目の外部が, torus 結む目の外部に同相になることを見る。
 しかしこれは $E(B, \{t_3\})$ が実際には 8 字結む目の外部とな
 っていることに矛盾する。 t_1 と t_2 の parallelism を P とし,
 t_3 の $(E(B, \{t_1, t_2\}), \{t_3\})$ における primitivism D_1 で $\partial D_1 \cap$
 $(m(t_1) \cup m(t_2)) = 3 \text{ pts}$ なるものをとっておいたことを思い出
 す。この交点数を増やさずに D_1 を P と交わらないものにと
 り直す。つまり、 D_1 と P の交わりを弧たちのみに isotop して
 おいて、 α を $D_1 \cap P$ のうち P 上 outermost な arc とし、それ
 の切りとる outermost disc を P_1 とする。 α として、 $\partial P_1 \cap m(t_1)$
 $= \emptyset$ なるものがとれる。 α は D_1 を 2 つの disc に分解するが、
 $m(t_3)$ と交わらない方を Q とする。 D_1 において Q を P_1 におき
 かえて $D_1 \cap P$ の交わりを減らせる。ここで気を付けたいのは、
 $\partial P_1 \cap m(t_2) = 1 \text{ pt}$ のときには、 $\partial Q \cap (m(t_2) \cup m(t_1)) \neq \emptyset$ なる
 ことである。もしも $\emptyset$ とすると、 $P_1 \cup Q$ により t_2 は primitive
 であることになり、 (B, T) が non-splittable であることに反
 ずるからである。このようにして $D_1 \cap P = \emptyset$ になったら、交
 点 $\partial D_1 \cap m(t_1)$ ごとに P をつぎ足すことにより、 $t_3 \rightarrow t_2$ の ∇ -
 parallelism で $m(t_2)$ との交点が 3 以下のものがとれる。

0, 1 pt



2 pts

or $(k, 2)$ -torus

3 pts

or $(k, 2)$ -torus
or $(k, 3)$ -torus

trefoil

しかし、そのような t_3 の外部は trivial knot か torus knot のものに同相になっ、てしまう。前頁の図を見て欲しい。 ■

例2



左図の3-タングルにおいても

$t_1 \leftrightarrow t_2$ だが、 $t_1 \parallel t_2$ ではない。

証明は例1と全く同様にできる。

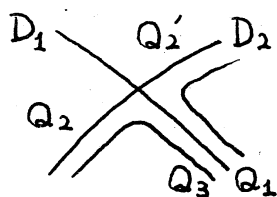
§2. parallelity の証明

定理2.1 (M, T) を n -もっれとする。 $t_1, t_2 \in T$ について、もっれ $(E(M, \{t_1\}), T - \{t_1, t_2\})$ が non-splittable のとき、 $t_1 \leftrightarrow t_2$ ならば、 $t_1 \parallel t_2$ である。

<pf> $t_1 \rightarrow t_2$, $t_2 \rightarrow t_1$ の $\mathbb{Z}$ -parallelism をそれぞれ D_1, D_2 とする。特に D_1 は $\partial D_1 \cap m(t_2)$ が最小のものをとっておく。以下この交点数を評価するのが目標である。

$\partial D_1, \partial D_2$ を変えない切り貼りによって、 $D_1 \cap D_2$ を arcs のみにすることができる。

α を $D_1 \cap D_2$ の D_1 上 outermost な arc の ν とする。 Q_1 を α の切りとる outermost disc とし、 α は D_2 を Q_2 と Q_2' の2つの discs に分けるとする。 $Q_1 \cup Q_2$ か $Q_1 \cup Q_2'$ の少なくともいずれか一方が $E(B, \{t_1, t_2\})$ 内の non-separating な disc になっ、てい、る。例えば $Q_3 = Q_1 \cup Q_2$ の方が non-separating だとする。 Q_3 を少し isotopy で動かして、 D_2 と disjoint にしておく。

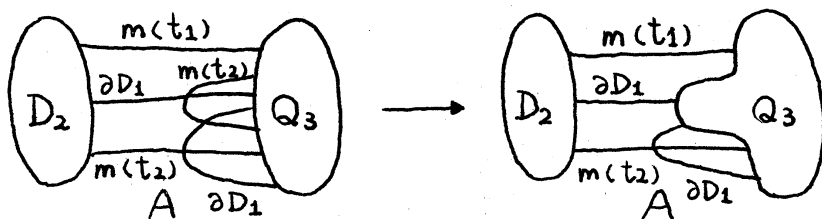


$\#(\partial Q_3 \cap \partial D_1) < \#(\partial D_2 \cap \partial D_1) \dots$ となる。ついでにことに注意せよ。以下 Q_3 を $\star$ の条件を保つ

たまた $\partial Q_3 \cap m(t_2) = 1 \text{ pt}$ となるように変形する。

まず Q_3 と D_2 の位置関係を調べる。 Q_3 に交点 $\partial Q_3 \cap m(t_2)$ ごとに D_2 のコピーをうぎ足して $\text{disc } Q_4$ を得る。 $Q_4 \cap D_2 = \emptyset$ となるようにしておく。 Q_4 がもつれ $(E(M, \{t_1\}), T - \{t_1, t_2\})$ の splitting disc にならなければいけないので、 ∂Q_4 は $\partial E(M, \{t_1\})$ から $\text{disc } Q_5$ を切りとり、 $Q_5 \cap \partial(U(T - \{t_2\})) \subset \partial t_1$ である。さらに D_2 の存在により、 $Q_5 \cap \partial(U(T - \{t_2\})) = \partial t_1$ or $\emptyset$ である。したがって、 ∂Q_3 と ∂D_2 は $\partial E(M, \{t_1, t_2\})$ 上平行であり、それらのはさむアニュラス A について $A \cap \partial(U(T - \{t_1, t_2\})) = \emptyset$ となっていることがわかる。

$\text{arcs } A \cap m(t_2)$ のうち、両端も ∂Q_3 に持つものがあるとし、そのうち A 上 outermost なもののひとつを β とする。 β と $A \cap \partial D_1$ の各 arc との交わりを考えるのだが、交わりも「高々 1 点」ずつである。そうでないと $\partial D_1 \cap m(t_2)$ の最小性に反する。



したがって Q_3 を isotopy で動かすことにより、交点 $\partial Q_3 \cap m(t_2)$ を減らすことができる。上図を見て欲しい。このよう

なことを繰り返して、 $m(t_2) \cap A$ を ∂D_2 と ∂Q_3 をつなぐただ
1本にすることが出来る。こうして $\star$ を保ち、たまた $\partial Q_3 \cap$
 $m(t_2) = 1$ pt を得る。

これを繰り返して、 $t_2 \rightarrow t_1$ の ∇ -parallelism として、 D_1 と
交わらないもの R をとれる。 R と D_1 について D_2 と Q_3 に対
してしたのと同様の議論をすることにより、 $\partial D_1 \cap m(t_2) = 1$
pt を得る。これは D_1 が t_1 と t_2 の間の parallelism になっ
てい
ることを意味する。 ▣

系 2.2 (M, T) , $T = \{t_1, t_2\}$ を 2- もつれ、 M は handlebody と
する。このとき、 $t_1 \leftrightarrow t_2$ ならば、 $t_1 \parallel t_2$ である。

<pf> ∂M の T -compression discs を disjoint から non-para
ll el に入るだけ入れる。 $t_1 \rightarrow t_2$ や $t_2 \rightarrow t_1$ の ∇ -parallelism
 D_1, D_2 は、上記の discs Q と disjoint にとれる。 M を Q で切
る。 t_1 と t_2 が別々の component に入っているとき、補題 1.1
の証明と同様にして、 T が (M, T) において primitive なこと
がわかり、 $t_1 \parallel t_2$ である。以下、 t_1 と t_2 が同じ component N
に入っているときを考える。 N 内で $t_1 \parallel t_2$ を示せばよい。

N が genus ≥ 1 の handlebody の場合を考える。このとき、
 $\partial E(N, \{t_2\})$ が incompressible であることを示す。そうすれば
定理 2.1 により $t_1 \parallel t_2$ となる。

(N, T) は non-splittable である。つまり、 $\mathcal{A}(\partial E(N, T)) -$

$N(m(t_1) \cup m(t_2))$ は $E(N, T)$ 内で incompressible である。
 さらに $t_2 \rightarrow t_1$ であるから、 $\mathcal{C}(\partial E(N, T) - N(m(t_2)))$ は compressible である。よって、Handle Addition Theorem によつて、 $(N, \{t_2\})$ は non-splittable である。

Handle Addition Theorem [Jaco] [Wu]

M を 3次元多様体、 ∂M は M 内で compressible とする。 J を ∂M 上のループとし、 $\mathcal{C}(\partial M - N(J))$ が incompressible であるとする。このとき、 M に J に沿つて 2-handle を接着した多様体は incompressible な境界をもつ。

尚、これは ∂M の代りに ∂M の subsurface を考えても成り立つ。

$\mathcal{C}(\partial E(N, \{t_2\}) - m(t_2))$ は $E(N, \{t_2\})$ 内で incompressible であるので、 $\partial E(N, \{t_2\})$ が compressible であると仮定すると、Handle Addition Theorem によつて ∂N が incompressible となり、矛盾する。したがつて $\partial E(N, \{t_2\})$ が $E(N, \{t_2\})$ 内で incompressible であることが示された。これで定理 2.1 を使うことができる。

次に N が ball の場合を考える。 $\partial E(N, \{t_2\})$ が incompressible であるときには、定理 2.1 により $t_1 \parallel t_2$ なので、compressible な場合を考える。このときタングル $(N, \{t_2\})$ は trivial

であり、 $E(N, \{t_2\})$ はソリッドトラスである。 $t_1 \rightarrow t_2$ だから $E(N, \{t_1, t_2\})$ は $\text{genus} = 2$ の handlebody であり、さらに $t_2 \rightarrow t_1$ だから $E(N, \{t_1\})$ はソリッドトラスである。ゆえに Gordon の定理によつて、 (N, T) において T は primitive となり、 $t_1 \parallel t_2$ であることが示された。

定理 [Gordon]

(M, T) を n -もつれ、 M を handlebody とする。

$\forall T' \subset T$ に対し、 $E(M, T')$ が handlebody ならば

(M, T) において、 T は primitive である。 ▣

私は次の問題を何か月か考えているが、未だに解けないでいる。

問題 (M, T) を n -もつれとする。 $\exists T' \subset T$ に対し、もつれ $(E(M, T'), T - T')$ は non-splittable とする。このとき、全ての pair $s, t \in T'$ に対し $s \leftrightarrow t$ であれば、全ての pair $x, y \in T'$ について、 $x \parallel y$ である か？

参考文献

[CGLS]: Culler, M.; Gordon, C.; Luecke, J.;
Shalen, P. (1987) Dehn surgery on knots.
Ann. of Math. 125: 237 - 300;
Correction, ibid., 127 (1988): 663

[Gordon]: Gordon, C. (1987) On primitive sets of loops in the boundary of a handlebody.

Topology and its Appl. 27: 285 - 299

[Jaco]: Jaco, W. (1984) Adding a 2-handle to 3-manifold: an application to Property R.

Proc. Amer. Math. Soc. 92: 288 - 292

[Wu]: Wu, Ying-Qing (?) A generalization of the Handle Addition Theorem.

accepted in Proc. Amer. Math. Soc.

④ 京都大学で発表した「超単純結び目のタングル分解について」の内容は既に [CGLS] においてなされていることがわかりました。「タングルの ν もの平行性と擬平行性」は '92.7月に行なわれた 第39回トポロジーシンポジウムで発表したものです。尚、「超単純結び目の……」の要約は、トポロジーシンポジウムの予稿集に掲載されていることを、一応お知らせします。