

崩壊トーラスのスケーリングと回転数の連分数展開

立命館大学 総合理工学研究機構 黒崎 暁

アブストラクト 臨界KAMトーラスは自己相似構造をもつ。この構造はトーラスの回転数の連分数から近似周期点列を用意し、そのスケール則を用いて調べられている。ここでは2次無理数回転数をもつ臨界KAMトーラスの自己相似構造と近似周期点列の持つスケール則との関係を調べた。スケール則のみをもつ近似列をJacobi-Perron アルゴリズムで用意すると、臨界トーラスの自己相似構造を反映しないことが明らかになった。

1. 研究の動機と目的

近可積分系のカオスと乱数の違いの一つは、近可積分系のカオスには相空間に自己相似状の構造があることである。標準写像の黄金数回転数のトーラスの崩壊時に見られる相空間の構造は自己相似性をもっともきれいに現れる例で、臨界現象との類似という点でも面白いのでよく調べられている [1][3][11]。この臨界トーラスのグラフに現れる自己相似な構造を調べるには、連分数を用いて近似周期点列を用意し、近似周期点列に漸近的に現れる自己相似構造に乗せて調べるのが標準的な方法である。このノートでは連分数でない近似周期点列のもつ自己相似構造がトーラスのそれをうまく反映するかどうかという問題を調べる。またトーラスの摂動に対する安定性が回転数の数論的な性質から定まるのか調べる試みと、高次元（自由度3の系）の場合の考察とに触れる。この節では本研究の動機、目的を述べる。

KAMトーラスの崩壊という現象の微細構造は70年代末から調べられている、少し古い問題である。任意に小さいスケールでの差異がオーダー1の大きさまで反映される点是非線形の力学系の最大の特質の一つである。臨界トーラスからは離れるが、KAMトーラスがロングタイムテイルの起源であることが明確に示されている点は、ベキ的緩和、輸送という観点から非常に重要である。現在この点をもっとも本質的な部分がトーラスからの距離で評価されている [8][9]。自由度2の系の輸送でのトーラスの役割はよく調べられている（例えば文献 [12]）。自由度3以上の高次元系に目を向けると、共鳴の方向による違いなどのより写像の実情に近い評価には、まず自由度3の系の力学を詳細に調べることが必要である、と感じたのが初期の動機である。自由度3の系でトーラスの摂動に対する安定性を数値計算で調べていて [13]、トーラスを近似する周期点列や回転数ベクトルを選ぶことが非常に難しいことを痛感し、このノートで調べる問題を立てた。以下問題設定と目的を述べる。

KAMトーラスのような系の不変集合上の軌道に対して回転数ベクトル $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ が長時間平均で定義でき、これは初期値に依らず、その不変集合を特徴づけるために用いられる。自由度2の場合に対応する2次元面積保存写像、例えば標準写像

$$y' = y + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad x' = x + y' \pmod{1}, \quad (1)$$

では、回転数 $\omega = \lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{x_{n'} - x_n}{n' - n}$, (mod はとらないで評価) の不変曲線 (以下 $\Gamma(\omega)$ と書く) が回転数ベクトル $\omega_1(1, \omega)$, $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ の KAM トーラスに対応する。 $\Gamma(\omega)$ の回転数 ω は十分有理数で近似しにくい無理数になり、その振舞いは数 ω の数論的性質で決定される。とくに回転数 ω が 2 次無理数の場合、つまり既約な 2 次の整数係数多項式の根である場合、トーラスの崩壊点 ϵ_c において $\Gamma(\omega)$ のグラフに任意の小さいスケールまで及ぶスケール不変な構造が観察される。この構造は $\Gamma(\omega)$ の近似周期点列を用いて調べられる [11]。とくに $\Gamma(1/\gamma)$ 、ここで回転数である黄金数の逆数 $1/\gamma = (\sqrt{5} - 1)/2$ は 2 次無理数、については崩壊点 ϵ_c でのグラフの自己相似構造を特徴付けるスケール則がいくつか知られている [1][3]。また $\Gamma(1/\gamma)$ は写像 (1) で最も摂動に強い不変曲線であることが知られている。本研究の最終的な目的はこの数 γ が力学で見せるこれらの興味深い性質、特に most robust torus の回転数である、スケール不変な構造が観察される、の 2 点の自由度 3 以上の系への一般化、もしくはそれが不可能であることを示すことである。

2. 臨界トーラスの自己相似構造と近似列のスケール則

2-1. 2 次無理数の有理近似とスケール不変性——連分数の場合

無理数回転数 ω の連分数 $\{p_n/q_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]\}$ を考える。ここで正整数 a_n は部分商。以降 n は近似の次数を表す。下はよく知られている結果である [2]。

(c1) p_n/q_n は ω の最良近似、つまり $\|\alpha\| = \min |\alpha - n|$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) と書いたとき、 $|q_n \omega - p_n| = \|q_n \omega\|$ で $\|q \omega\| > \|q_n \omega\|$ ($1 \leq q < q_n$)。

(c2) 数列 p_n/q_n は ω に収束し、 $p_n/q_n - \omega$ は n が奇数なら正、偶数なら負。

(c3) $q_n/q_{n-1} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ ($n \geq 1$)。

(c4) ω が 2 次無理数、は ω の連分数が循環連分数、つまりある k が存在して十分大きい n に対して $a_{n+k} = a_n$ 、と必要十分。

(c5)

$$\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) / \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) = -\frac{q_{n+1}}{q_n} \frac{q_n}{q_{n-1}}. \quad (2)$$

さらに (c3)(c4) から 2 次無理数 ω に対してこの右辺の数列の適当な部分列はそれぞれが k 個の定数へ収束する。

この k 個の定数の面積保存写像の力学における意味はつぎのようになる。線形写像 (写像 (1) の $\epsilon = 0$ のとき)

$$y = y' = \omega, \quad x' = x + y' \pmod{1}$$

に対して、回転数 p_n/q_n の周期点は $y \equiv p_n/q_n$ で表される。このうち $x = 0$ を通る周期点の初期値 $(x, y) = (0, \frac{p_n}{q_n})$ とその軌道のうちの最近接点 $(x, y) = (\frac{\pm 1}{q_n}, \frac{p_n}{q_n}) = (x_n, y_n)$ について、上の (c2)(c5) から比 $\frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}$ 、 $-\frac{x_n}{x_{n+1}}$ は共に十分大きい n に対して k 個の定数で特徴付けられる。(後者の負符号は (c2) から。)

この定数の意味を回転数 $1/\gamma = [0, 1, 1, \dots]$ のときを例に述べる。このとき比 $\frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}$ 、 $-\frac{x_n}{x_{n+1}}$ はそれぞれ 1 つの定数 $-\gamma^2$ 、 $-\gamma$ に収束する。つまり原点を回転数 $1/\gamma$ の不変曲線と

直線 $x = 0$ の交点にとりなおした座標 (X, Y) ではスケール変換

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = T_\gamma \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

で再近接点の集合 $\{(X_n, Y_n)\}$ は原点の近傍、つまり n が大きい極限で不変に保たれる。以後このようなときに漸近的にスケール不変になる、とすることにする。(c3-5) から、この漸近定数を持つという性質は回転数が 2 次無理数であれば持っているものである。よって、一般に 2 次無理数回転数の連分数では同様のことが起きる。回転数 ω が周期 k で循環連分数になるとき ($\omega = [0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k, b_1, \dots, b_k, b_1, \dots]$) は同様のスケール変換

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = T_1 \cdots T_k \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

で近似の次数が k 変わるたびに漸近的にスケール不変になる。

2-2. ϵ_c でのスケール則——連分数の場合

図 1 は T^1 上の一様な回転 $\theta' = \theta + 1/\gamma$ の、標準写像の $\Gamma(1/\gamma)$ への位相的共役写像 $x = \theta + u_{\epsilon_c, 1/\gamma}(\theta)$ の関数 $u_{\epsilon_c, 1/\gamma}(\theta)$ に、トーラスの崩壊点 ϵ_c でスケール不変な構造があることを示す。ここで $\epsilon_c \approx -0.9716354 \dots < 0$ は非線形の強さを表すパラメタ ϵ の $\Gamma(1/\gamma)$ が崩壊するときの値を示す。図 1 で $\log h$ に対する周期的な構造が途中で途切れているのは数値計算が有限なせいで、実際は任意の高調波まで続くと考えられる。これは $\theta = 0$ (関数 $u(\theta)$ は奇関数で相空間では $x = 0$ にあたる) と $\Gamma(1/\gamma)$ の交点の近傍で $\Gamma(1/\gamma)$ のグラフを観察すると波数分の 1 でスケールする構造があることを示す [1]。この構造と前節の無摂動系で見られる漸近的なスケール不変性との関係はつぎのようになる。

標準写像に $\epsilon < 0$ で摂動を加えると、無摂動系での回転数 p/q の周期点のうち 2 本の周期点がそれぞれ楕円型、双曲型周期点として残り、 ϵ の値に関わらず楕円型周期点の軌道は直線 $x = 0$ と交わることが知られている。つまり前節の漸近的にスケール不変とよんだ構造は無摂動系の近似周期点列のうち、摂動下で楕円型になるのものに見られる。図 1 は $\Gamma(1/\gamma)$ のグラフがトーラスの崩壊点 ϵ_c でスケールすることを示し、相空間には確かに楕円型周期点 (安定性の島) のなす入れ子構造が見られる [3]。この入れ子構造を特徴付けるスケール変換は前節と全く同様のもので、文献 [3] の数値計算によると標準写像の $\Gamma(1/\gamma)$ の場合の漸近定数はそれぞれ非整数の指数がついて $-\gamma^{2.328836}$, $-\gamma^{0.721124}$ となる。つまり $\Gamma(1/\gamma)$ の場合 ϵ_c でスケール不変な構造が回復するのである。一般に 2 次無理数回転数の場合は同様のことが期待されて、前節で漸近的にスケール不変と呼んだ構造は摂動を加えた非線形写像ではゆがめられてしまうが、不変曲線の崩壊するしきいの点では同様のベキ的なスケール変換が回復すると考えられる。

ところでここまでの議論に最良近似 (c1) は使っていない。無摂動系でのスケール不変性には最良近似が必要ないのは明らかだが、 ϵ_c でのスケール不変性の回復には最良近似であることは必要ないのだろうか。次節はこの点を調べる。

2-3. ϵ_c でのスケール則—Jacobi-Perron アルゴリズムの場合

はじめの動機に戻って高次元の系で臨界トラスに前節のような現象がみられる回転数ベクトルは何かという問題を考える時、その近似列に要求される性質はまだ分かっていない。また前節のような自由度2の系においてすら、慣習で連分数が使われてはいるが、近似列に必要な性質が完全に分かっているわけではない。連分数であることと最良近似列であることは同値なので、もし連分数以外の列で ϵ_c でのスケール則が回復するのであれば、最良近似という性質はスケール不変性にはいらぬことになる、必要な条件がひとつ明確になる。ここでは連分数でないが漸近定数のある近似列として Jacobi-Perron アルゴリズムで黄金数 γ に収束する有理近似列をつくって前節のスケール不変性に必要な条件を探ってみる。

Jacobi-Perron アルゴリズムは連分数のリカージョンを2次元へ一般化したもので、本来 $(\omega_1, \omega_2) \in [0, 1]^2$ に対して有理数ベクトル $(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$ の近似列を与える手順で定められる [5]。golden mean γ の一般化にあたる (k, l) golden mean の場合に漸化式の手順のみを形式的に頂いて、連分数 $[a, a, \dots]$ と対応させると次のようになる。ここで a, k, l は整数。

	J-P algorithm	連分数
	(k, l) golden mean	$\alpha = [a, a, \dots]$
漸化式 ($n \geq 1$)	$\frac{\pi_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{k\pi_n + l\pi_{n-1} + \pi_{n-2}}{kr_n + lr_{n-1} + r_{n-2}}$ $\frac{\pi_n}{r_n} = \left(\frac{p_n}{r_n}, \frac{q_n}{r_n} \right)$	$\frac{p_n}{q_n} = \frac{ap_{n-1} + p_{n-2}}{aq_{n-1} + q_{n-2}}$
初期値	$\pi_0 = (0, 0), \pi_{-1} = (1, 0),$ $\pi_{-2} = (0, 1)$ $r_0 = 1, r_{-1} = r_{-2} = 0$	$p_0 = a, p_{-1} = 1$ $q_0 = 1, q_{-1} = 0$

特性方程式 $x^3 - kx^2 - lx - 1 = 0$ のひとつの実根 λ が単位円の外にあれば、上のリカージョンから得られる有理ベクトル列 $\{(\frac{p_n}{r_n}, \frac{q_n}{r_n})\}$ は $(\lambda - k, 1/\lambda)$ へ収束する。特に $(k, l) = (0, 2)$ の場合、第2成分 $\{\frac{q_n}{r_n}\}$ は $1/\gamma$ へ収束する。(ただし特性方程式は3次の最小多項式ではなく、普通の使い方ではない。) 一般にはこの次数3の特性方程式は複素根をもち、(2)式は周期変動へ漸近する。 $(k, l) = (0, 2)$ の場合には実根のみをもち、数列 $\{\frac{q_n}{r_n}\}$ は表1のように漸近定数 $-\gamma$ をもつ。

前節のように ϵ_c での再近接点の位置を計測できれば一番いいのだが $(k, l) = (0, 2)$ の Jacobi-Perron アルゴリズムで出した近似列の回転数をもつ周期点は、 ϵ_c では非常に不安定な軌道になる。(正確に述べると、 M を周期点で評価したヤコビ行列として residue $R = (2 - \text{Tr} M)/4$ が非常に大きい。 R は線形安定性の指標で $0 < R < 1$ ならその周期点は安定。ただし3、4次の共鳴を除く。[11] 参照) そのような周期点を追跡する技術を持っていないので、代わりに次のスケール則を調べる。 ϵ_n を $\Gamma(1/\gamma)$ の楕円型の近似周期点の residue $R = 1$ となる摂動パラメタの値とすると n が十分大きいとき

$$\epsilon_n - \epsilon_{n-1} \sim \delta^{-n}, \quad \delta = 1.628 \dots, \quad (3)$$

となることが知られている [3]。このスケール則は文献 [3] の立場でトーラスをくりこみで扱うときに非常に重要で、前節のスケール不変性の本質を含む現象であると考えられる。

スケール則 (3) を (0,2) golden mean の近似列の第 2 成分で調べた結果、表 1 のようになった。ここで ϵ_n は $R=1$ になる最小の ϵ にとった。また近似有理数 $\{\frac{q_n}{r_n}\}$ の分母、分子は必ずしも互いに素ではないが、 R の計算には約分する前の周期 r_n を用いた。スケール則 (3) のような定数への漸近は見られない。この非摂動系でスケール不変になる近似列を用いても、必ずしも ϵ_c でスケール不変性が回復するとは限らないという結果から、近似列の漸近定数は臨界トーラスのベキ的スケール則を観察するために必要な条件の一つに過ぎないことが分かる。以上 2 節で述べた問題では約分できる有理数が近似列に入っていない、さらに理想的な列を見つけて解析せねばならないと著者は考える。

表 1

p_n	q_n	r_n	$c1$	ϵ_n	$c2$
1596	609	988	-1.6150040	-0.9483991381049	a
2585	988	1596	-1.6194357	-0.7202775636572	b
4180	1596	2585	-1.6168744	-0.9661171852539	-0.9279284
6766	2585	4180	-1.6185690	-0.8997809438218	-3.7059624
10945	4180	6766	-1.6175907	-0.9622581122266	-1.0617677

$c1 = (\frac{q_{n-1}}{r_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{r_{n-2}}) / (\frac{q_n}{r_n} - \frac{q_{n-1}}{r_{n-1}})$, $c2 = \frac{\epsilon_{n-1} - \epsilon_{n-2}}{\epsilon_n - \epsilon_{n-1}}$ ただし上 8 桁のみ記載。a, b については桁を出すことはしていない。a ~ -1.1 , b ~ -0.4 .

3. トーラスの摂動に対する安定性と diophantine const. の関係

この節ではトーラスの摂動に対する安定性について調べる。数 γ (とその対等な数) の著しい特徴に最大の diophantine const. を与える、つまり不等式 $q||q\alpha|| < c$ が無限に解を持つような定数 c の最大値 $1/\sqrt{5}$ を与える (Hurwitz の定理)、がある。また $\Gamma(1/\gamma)$ は標準写像で最も摂動に対して安定な不変曲線であると考えられている [3][11]。この対応は、筆者には興味深い対応に思われる。文献 [4] によると、系統的に c の大きい順に 2 次無理数を並べる方法が知られており、もし、より大きい diophantine const. を与える数を回転数に持つ不変曲線がより摂動に強いのであれば、その方法は非常に強い結果になるからである。実際にはどうであろうか？

文献 [4] の 2 章によると、 γ の次に大きい c を与えるのは $\omega_2 = \sqrt{2} - 1$ に対等な数で、その次は $\omega_3 = [0, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, \dots]$ に対等な数である。崩壊点 ϵ_c を文献 [11] の手順で数値的に調べると $\epsilon_c(\omega_2) \approx -0.9574\dots$, $\epsilon_c(\omega_3) \approx -0.964\dots$ となった。結論を出すにはより系統だって調べることが必要と思うが、残念ながらトーラスが摂動に対してより安定であることと、より大きい diophantine const. を与えることとは必ずしも対応しないようである。ところで数 $\omega_2 = [0, 2, 2, 2, \dots]$ より数 $\omega_3 = [0, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, \dots]$ では (最良) 近似列の周期の増加率がより小さい。一般に摂動のかかった面積保存写像上での安定性の島の大きさは周期が短い方が大きく、周期点はより摂動に対して安定になる傾向がある。近似列の周期の増加率がより小さい数を回転数に持つトーラスの方が摂動に対して

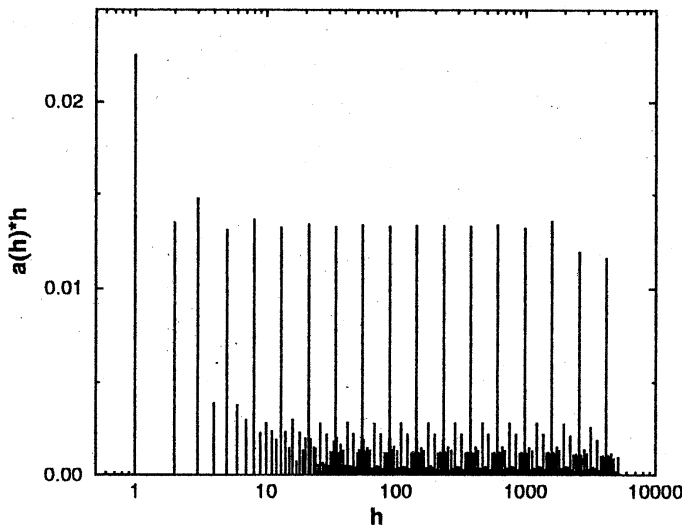


図 1: 位相的共役写像 $u_{\epsilon_c, 1/\gamma}(\theta)$ のフーリエ係数に見られる自己相似性。縦軸は $a(h) = \text{Im}(u(\hat{h}))$ と波数 h の積で、log-linear のプロット。ここで $u(\hat{h}) = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} u(\frac{p}{q}j) e^{2\pi i \frac{p}{q}jh}$ 、 $\Gamma(1/\gamma)$ の周期点 (回転数 $6765/10946$) による近似を行なっている。

より安定である、と曖昧だが単純に考える方が的を得ているのかもしれない。

上の結果は初見では KAM 理論 (例えば文献 [10]) から想像される結果と合わないように感じられるが、よく考えると Hurwitz の定理で用いられている不等式と KAM 理論で用いられている不等式とは少し質が違っている。KAM 理論で使われているものに対応するのは次の Liouville の不等式だろう。「 $n(\geq 2)$ 次代数的数 ω に対して正定数 $c = c(\omega)$ が存在し、すべての有理数 p/q ($q > 0$) に対して $|\omega - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^n}$ が成立する。」ここに $c(\omega)$ は計算可能なので今後はこちらで調べてみようと思う。

4. 自由度 3 の系でのスケール不変性について

1 節で述べたが、本研究の最終的な目標は数 γ の高次元への一般化である。自由度 3 の系に対応する写像の場合に数 γ を一般化したものはベクトル (ω_1, ω_2) になり、その有理近似の持つ性質で特徴づけられる。黄金数 γ の 2 次元への一般化でこれまで提唱されているものには既に述べた (k, l) golden mean、Farey tree の 2 次元への一般化から定まる spiral mean、などがある [5][6]。後者は 2 次元 Farey tree 上で周期的な手順で構成され、ある制約の下では近似列の周期の増加率が最小になる重要な候補である。ただし 2 節に述べる (c5) に対応する性質に好ましくない点があり、定数ではなく無理数周期の周期変動する数列へ漸近する。したがって式 (3) のようなスケール則は観察されていない。力学への応用は文献 [7] などにある。

自由度 3 の系で、自由度 2 の系における 2 次無理数に対応するベクトルとはなにか？という問題については、今のところ 2 節で述べた (c4) の性質の類推から 3 次の代数的数の組合せがよく調べられている。例えば Jacobi-Perron アルゴリズムの (k, l) golden mean の場

合、漸化式が整数組 (k, l) のくりかえしで特徴付けられると、ほとんどの場合で 3 次の代数的数の組合せになる。また γ の一般化でこれまで提唱されているものもすべて同じである。3 次の代数的数に特化して自由度 2 の系で式 (3) のスケール則を調べた報告があり、周期に依存した少し違う形式のスケール則が一例見つけられている [14]。いずれにしろばつとしない。

自由度 3 の系で、2 節のように ϵ_c でスケール不変な構造が回復することがあるのか、考察する。2 節で ϵ_c でのスケール則 (3) に最良近似という性質が必要かそうでないか調べてみた。まだ結論は出ていないが、図 1 で、ちょうどフィボナッチ数 $\dots, 13, 21, 33, 54, \dots$ の波数のところにピークが立っていることなど考えても、有理近似のうち最良近似のものは重要であるように思われる。(フィボナッチ数は $1/\gamma$ の最良近似列の分母と一致する。) もし最良近似列から外れた近似列ではスケール則が見られないとするとどのようなことが起きるだろうか。

有理近似列 $\{(\frac{p_n}{r_n}, \frac{q_n}{r_n})\}$ が ω_1, ω_2 のそれぞれの最良近似をもれなく含むようにとるなら、近似の次数 n の増加に対し ω_1, ω_2 の各々の近似列が共通分母 r_n を保てるのはそれぞれの部分商が漸近的に一致するときである。つまり ω_1 と ω_2 は対等な数になる。また最良近似列で 2 節 (c5) の性質を要求すると ω_1 は 2 次無理数になる。次の主張は容易に示される。「ベクトル $\vec{\omega} = (1, \omega_1, \omega_2)$ で ω_1 と ω_2 は対等な 2 次無理数とする。このとき $\vec{n} \cdot \vec{\omega} = 0$ なる整数ベクトル $\vec{n} \neq 0$ が存在する。」つまり上の仮説のもとでは、 ϵ_c でのスケール則は KAM トーラスでなく、低次元トーラスで観察されることになってしまうのである。

上の「…」を示すにはまず ω_1, ω_2 の仮定から整数 $a_1, a_2, a_3, p, q, r, s$ を次のようにとる。
 $a_1\omega_1^2 + a_2\omega_1 + a_3 = 0$, $\omega_2 = \frac{p\omega_1 + q}{r\omega_1 + s}$, $ps - qr = \pm 1$. 任意に選んだ整数 l, m, n に対して $\Delta = n + m\omega_1 + l\omega_2$ と書く。

- $r = 0$ のとき $\Delta = n + m\omega_1 + \frac{l}{s}(p\omega_1 + q)$, $(n, m, l) = (-q, -p, s)$ でよい。
- $r \neq 0$ のとき、 $\Delta' = \Delta(r\omega_1 + s) = n(r\omega_1 + s) + m\omega_1(r\omega_1 + s) + l(p\omega_1 + q)$
 $= mr\omega_1^2 + (nr + ms + lp)\omega_1 + ns + lq$.

ここで

$$\begin{pmatrix} mr \\ lp + ms + nr \\ ns + lq \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ p & s & r \\ q & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix},$$

とおく。 $\det M = r^2q - rps = -r(ps - qr) \neq 0$ より

$$M \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

の解 $(l, m, n) \neq 0$ があって $\Delta' = 0, r \neq 0$ であるから $(r\omega_1 + s) \neq 0$, よって $\Delta = 0$.

[1] S. J. Shenker and L. P. Kadanoff, J. Stat. Phys. 27 (1982), 631.

[2] 高木貞治、初等整数論講義 (共立出版株式会社、1971)

[3] R. S. MacKay: Physica 7D (1983) 283.

[4] J.W.S. Cassels, An Introduction to Diophantine Approximation (Cambridge, 1957)

- [5] S. Tompaidis, *Experimental Mathematics* **5** (1996), 211.
- [6] S. Kim and S. Ostlund, *Phys. Rev.* **34A** (1986), 3426.
- [7] R. Artuso, G. Casati and D. L. Shepelyansky, *Europhys. Lett.* **15** (1991), 381.
- [8] Y. Aizawa, *Prog. Theor. Phys.* **81** (1989), 249.
- [9] A. Morbidelli and A. Giorgilli, *J. Stat. Phys.* **78** (1995), 1607
- [10] V. I. Arnold, *Russ. Math. Surveys* **18** (1963), 9.
- [11] J. M. Greene, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 1183.
- [12] C. F. F. Karney, *Physica* **8D** (1983), 585.
- [13] S. Kurosaki and Y. Aizawa, *Prog. Theor. Phys.* **98** (1997), 783.
- [14] J. Mao and R. H. G. Helleman, *Phys. Rev. A* **39** (1989), 344.