

非線型方程式を解くための数値的方法

京大 数研 占 部 実

目 次

1. 方程式を数値的に解くための反復法	1
2. Newton 法	1 1
3. Newton 法の数値例	2 7
文 献	3 2

このノートでは、ベクトルと行列に対するノルムとして、次の様に定義されたものを使う。

$$|x| = \max_i |x_i|, \quad |A| = \max_i \sum_j |a_{ij}|,$$

ここに、 x はベクトル $x=(x_i)$

A は行列 $A=(a_{ij})$.

1. 方程式を数值的に解くための反復法

非線型方程式の数値解法はいろいろあるが、その中のほとんどは Newton 法を含めて、次に述べる反復法に基礎を置いている。

まず、与えられた方程式を次の形に書き換える。

$$(1.1) \quad x = f(x)$$

ここに x と $f(x)$ はベクトルである。次に、適当な近似解 $x=x_0$ から出発して

$$(1.2) \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

によつて、つぎつぎに x_n ($n=1, 2, \dots$) を計算する。適当な n に対する x_n をとれば、与えられた方程式の近似解を得る。

このような方法は、列 $\{x_n\}$ が収束するとき、実際に成功する。 $\{x_n\}$ が収束するかどうかは $f(x)$ の性質に関係すると同時に、出発値 x_0 の選び方にも関係する。実用的で便利な $f(x)$ と x_0 に対する条件は、Collatz [1] による次の定理によつて与えられる。

定理 1.1.

$f(x)$ は領域 D で定義され、

$$(1.3) \quad 0 \leq K_0 < 1$$

なる定数 K_0 に対し、 $f(x)$ は Lipschitz 条件：

$$(1.4) \quad |f(x') - f(x'')| \leq K_0 |x' - x''| \quad \text{for } x', x'' \in D$$

を満足すると仮定する。 x_0 を不等式：

$$(1.5) \quad |x - f(x_0)| \leq \frac{K_0}{1 - K_0} |f(x_0) - x_0|$$

を満足するすべての点の集合 S が D に含まれるような、 D に属する任意の点とする。

この時、列 $\{x_n\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) は (1.2) によつて、 D で実際につくられ、且つ、 D に属するある $\bar{x}$ に収束する。 $\bar{x}$ は方程式 (1.1) の解であり、且つ、これは領域 D 内の (1.1) の一意解である。

証明

初めに、列 x_n ($n=0, 1, 2, \dots$) が実際につくられ、且つ、

$$(1.6) \quad x_n \in S \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(1.7) \quad |x_{n+1} - x_n| \leq K_0^n |x_1 - x_0| \quad (n=1, 2, \dots)$$

となることを帰納法によつて証明しよう。

(1.5) からわかるように、 $x_1 = f(x_0) \in S \subset D$ 、それ故に、 $x_2 = f(x_1)$ は実際につくられ、且つ、(1.4) により、

$$|x_2 - x_1| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq K_0 |x_1 - x_0|.$$

となる。これは x_1, x_2 が実際につくられ、且つ、(1.6) と (1.7) が $n=1$ に対して成立することを示している。次に $x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ がつくられ、且つ、(1.6) と (1.7) が $n=1, 2, \dots, m$ に対し成立すると仮定しよう。この時 (1.3) により、 $0 \leq K_0 < 1$ だから (1.7) から、

$$|x_{m+1} - x_1| \leq |x_{m+1} - x_m| + |x_m - x_{m-1}| + \dots + |x_2 - x_1|$$

$$\leq (K_0^m + K_0^{m-1} + \dots + K_0) |x_1 - x_0|$$

$$\leq \frac{K_0}{1 - K_0} |x_1 - x_0|$$

となる。上の不等式は $x_{m+1} \in S$ を示している。この時、 $S \subset D$ より

$x_{m+1} \in D$ 、それ故に $x_{m+2} = f(x_{m+1})$ は実際につくられ、且つ、(1.4)

により、

$$|x_{m+2} - x_{m+1}| = |f(x_{m+1}) - f(x_m)|$$

$$\leq K_0 |x_{m+1} - x_m|$$

となり、これは (1.7) により、

$$|x_{m+2} - x_{m+1}| \leq K_0^{m+1} |x_1 - x_0|$$

となり、 $n=m+1$ に対して (1.7) が成立することを示している。

この結果は x_{m+2} が実際につくられ、且つ、(1.6) と (1.7) は $n=m+1$ に対して成立することを示している。これは帰納法を完結させ、初めの主張を証明している。

次に、列 $\{x_n\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) が収束することを証明しよう。(1.7)

から $m < n$ なる任意の (正の整数) m, n に対し、

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{m+1} - x_m|$$

$$\leq (K_0^{n-1} + K_0^{n-2} + \dots + K_0^m) |x_1 - x_0|$$

$$\leq \frac{K_0^m}{1 - K_0} |x_1 - x_0|.$$

$|K_0| < 1$ より、これは

$$|x_n - x_m| \longrightarrow 0 \quad \text{as } n, m \longrightarrow \infty$$

を示す。これは列 $\{x_n\}$ が基本列であること、即ち、列 $\{x_n\}$ が収束することとを意味する。

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

と置くと、(1.6) から、 $\bar{x} \in S \subset D$ 。この時、 $f(\bar{x})$ は定義され、且つ、(1.4) により

$$\begin{aligned} |\bar{x} - f(\bar{x})| &\leq |\bar{x} - x_{n+1}| + |f(x_n) - f(\bar{x})| \\ &\leq |\bar{x} - x_{n+1}| + K_0 |x_n - \bar{x}|, \end{aligned}$$

これから、 $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$(1.8) \quad \bar{x} = f(\bar{x}).$$

これは $\bar{x}$ が方程式 (1.1) の解であることを示している。

最後に、上の $\bar{x}$ が領域 D における方程式 (1.1) の一意解であることを証明しよう。 $\bar{x}'$ が領域 D における他の1つの解としよう。この時、

$$(1.9) \quad \bar{x}' = f(\bar{x}').$$

(1.9) から (1.8) を引くと (1.4) により

$$|\bar{x}' - \bar{x}| = |f(\bar{x}') - f(\bar{x})| \leq K_0 |\bar{x}' - \bar{x}|,$$

これから

$$(1 - K_0) |\bar{x}' - \bar{x}| \leq 0.$$

これは、(1.3) により $1 - K_0 > 0$ だから、 $\bar{x}' = \bar{x}$ を示す。これは $\bar{x}$ が領域 D における (1.1) の一意解であることを示している。これで証明は完結する。

Q. E. D.

x_0 に対する条件、特に、 $S \subset D$ なる条件は出発する近似解 x_0 の精度に関係する。実際、 x_0 が精度が高いならば、量

$$(1.10) \quad |f(x_0) - x_0| = |x_1 - x_0|$$

が小さいであろうから、集合 S は小さい半径をもつ球であろう。もし x_0 が D の内点であるならばこの球は D に含まれるであろう。

$S \subset D$ なる条件が常に満足されるという条件は、 x_0 が D 内にある、精度の高い近似であることを意味する。

方程式 (1.1) が領域 D 内で唯一つの解しか持たないということは、反復法 (1.2) によつて得られた解 $\bar{x}$ が出発する近似値 x_0 の選び方に関係しないことを意味する。

しかしながら、定理 1.1. においては、 $f(x)$ の実際の計算に起こる誤差を考慮に入れていない。それ故に、定理 1.1. の結論は実際の計算に対しては一般には正しくない。実際の計算においては、反復法 (1.2) によつて得られた列 $\{x_n\}$ は定理 1.1. で述べられた正確な列ではなくて、やや異なる列 $\{x_n^*\}$ である。

$$(1.11) \quad x_{n+1}^* = f^*(x_n^*) \quad (n=0, 1, 2, \dots; x_0^* = x_0)$$

が反復法 (1.2) の実際の過程で、且つ、

$$(1.12) \quad |f^*(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

と仮定しよう。ここで、 $f^*(x)$ は $f(x)$ の実際に使う式であり、 ε は $f(x)$ の実際の計算に起る誤差の限界である。実際の反復法 (1.11) に関しては、著者 [1] による次の定理がある。

定理 1.2.

$f(x)$ が定理 1.1. の条件を満足すると仮定する。 x_0 を不等式

$$(1.13) \quad |x - f^*(x_0)| \leq \frac{K_0}{1 - K_0} |f^*(x_0) - x_0| + \frac{2\varepsilon}{1 - K_0}$$

を満足するすべての x の集合 Σ が D に含まれるような、 D に属する任意の点とする。

この時、実際の反復法 (1.11) は D 内で無限に続けられ、且つ、有限回の反復の後に、数値的収束の状態に達する。この状態では、列 $\{x_n^*\}$ はある有限個の値を取りながら振動する。(その結果、この状態は ONC 状態 (the state of oscillatory numerical convergence の省略) と呼ばれるでしょう。) 与えられた方程式 (1.1) の求める近似解は ONC 状態内の x_n^* のどの一つによつても与えられ、且つ、その誤差の限界は

$$(1.14) \quad \delta_0 = \frac{\varepsilon}{1 - K_0}$$

によつて与えられる。

証明

始めに、定理 1.1. の集合 S が

$$(1.15) \quad |x - f^*(x_0)| \leq \frac{K_0}{1 - K_0} |f^*(x_0) - x_0| + \delta_0$$

なる x より成る集合 Σ_0 に含まれることを証明しよう。実際に、 x を S に含まれる任意の点としよう。この時、(1.15) と (1.12) により、

$$\begin{aligned} |x - f^*(x_0)| &\leq |x - f(x_0)| + |f(x_0) - f^*(x_0)| \\ &\leq \frac{K_0}{1 - K_0} |f(x_0) - x_0| + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{K_0}{1 - K_0} \left[|f(x_0) - f^*(x_0)| + |f^*(x_0) - x_0| \right] + \varepsilon \\
&\leq \frac{K_0}{1 - K_0} |f^*(x_0) - x_0| + \frac{\varepsilon}{1 - K_0} .
\end{aligned}$$

(1.5) により、これは $x \in \Sigma_0$ を示す。 x が S に含まれる任意の点であるから、これは

$$(1.16) \quad S \subset \Sigma_0$$

を意味する。

既に (1.13) と (1.15) からわかるように、 $\Sigma_0 \subset \Sigma$ だから、仮定により、

$$(1.17) \quad S \subset \Sigma_0 \subset \Sigma \subset D.$$

$S \subset D$ なる関係は定理 1.1 の仮定が今の場合にすべて満足されることを示す。故に、定理 1.1 により、与えられた方程式 (1.1) は D 内で一意解をもち、列 $\{x_n\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) は (1.2) により、

$$(1.18) \quad x_n \in S \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(1.19) \quad x_n \longrightarrow \bar{x} \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty$$

となるようにつくられることがわかる。

既に (1.15) と (1.17) からわかるように $x_1^* = f^*(x_0) \in \Sigma_0 \subset \Sigma$ であるから、 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ が Σ 内に含まれると仮定しよう。この時、 $x_m^* \in \Sigma \subset D$ だから、 $x_{m+1}^* = f^*(x_m^*)$ は実際につくられ、

$$|x_1^* - x_1| = |f^*(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon,$$

$$|x_2^* - x_2| = |f^*(x_1^*) - f(x_1)|$$

$$\leq |f^*(x_1^*) - f(x_1^*)| + |f(x_1^*) - f(x_1)|$$

$$\leq \varepsilon + K_0 |x_1^* - x_1|$$

$$\leq (1 + K_0)\varepsilon,$$

$$|x_3^* - x_3| \leq \varepsilon + K_0 |x_2^* - x_2|$$

$$\leq (1 + K_0 + K_0^2)\varepsilon,$$

⋮

$$(1.20) \quad |x_{m+1}^* - x_{m+1}| \leq (1 + K_0 + K_0^2 + \dots + K_0^m)\varepsilon$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{1 - K_0} = \delta_0.$$

(1.18) より $x_{m+1} \in S$ だから、 x_{m+1}^* は S の δ_0 -近傍内にある。

(1.16) により、 x_{m+1}^* は $\sum_0$ 、即ち、 $\sum$ の δ_0 -近傍内にある。帰納法により、これは列 $\{x_n^*\}$ ($n=1, 2, \dots$) が $\sum$ 内で実際につくられることを証明する。

実際の計算で得られた x_n^* は、しかしながら有限個の数字によつて表わされる数である。それ故に、 x_n^* が取ることができる値は、 x_n^* がすべて、有限集合 $\sum$ 内にあるから、無限になることはできない。これはある異なる有限整数 m_0 と n_0 の組に対して $x_{m_0}^* = x_{n_0}^*$ が必ず起こることを示す。この時、反復法 (1.11) において、任意の正の整数 n に対して

$$x_{m_0+n}^* = x_{n_0+n}^*$$

これはもし $m_0 > n_0$ ならば、状態 $x_{n_0}^*, x_{n_0+1}^*, \dots, x_{m_0-1}^*$ が反復法

において、第 $(n_0 - 1)$ 段階後にくり返されることを示す。これは反復法 (1.11) が常に、有限回の反復の後に ONC 状態に達することを証明する。

今、 x_n^* を ONC 状態内の任意の値としよう。この時、ある正の整数 m に対し、

$$x_{n+im}^* = x_n^* \quad (i = 1, 2, \dots)$$

しかしながら、(1.20) より

$$|x_{n+im}^* - x_{n+im}| \leq \delta_0.$$

故に、ある正の整数 i に対し

$$|x_n^* - x_{n+im}| \leq \delta_0.$$

この時、 $i \rightarrow \infty$ とすると、(1.19) から

$$|x_n^* - \bar{x}| \leq \delta_0.$$

これは x_n^* の誤差の限界が δ_0 によつて与えられることを示す。これは証明を完結する。 Q.E.D.

定理 1.2. からわかるように、方程式 (1.1) の解を反復法 (1.11) によつて計算する時、普通、多くの近似値を得るがこれらの多くの値から特別のものを選ぶ理論的基礎もない。言い換えれば、与えられた方程式の近似解として、ONC 状態内の値の中から任意のものを取りることができる。

例として、方程式

$$(1.21) \quad z = \frac{8}{9} e^{2\pi i/3} z$$

を考えよう。ここに z は複素数。すべての計算が3桁まで実行されると仮定しよう。この時、 $\frac{8}{9} e^{2\pi i/3}$ は $-0.444 + 0.770i$ によつて置き換えられる。もし、反復法を $z_0 = 0.010$ から出発するならば、次の表を得る。

n	z_n^*	n	z_n^*
0	0.010	15	0.002-0.002i
1	-0.004+0.008i	16	0.001+0.003i
2		17	-0.002
3		18	0.001-0.002i
4		19	0.002+0.002i
5		20	-0.003+0.001i
6		21	-0.002i
7		22	0.002+0.001i
8	-0.001-0.003i	23	-0.002+0.002i
9	0.002	24	-0.001-0.003i
10	-0.001+0.002i		
11	-0.002-0.002i		
12	0.003-0.001i		
13	+0.002i		
14	-0.002-0.001i		

表 1

表1からわかるように、 $z_{24}^* = z_8^*$ 。これは今の反復法において、 $z_8^*, z_9^*, \dots, z_{23}^*$ がくり返され、且つ、これらが ONC 状態内にあることを示す。故に、与えられた方程式 (1.21) の近似解として、 $z_8^*, z_9^*, \dots, z_{23}^*$ の中からどれか一つを取ることができる。この例において、

$$\epsilon = \sqrt{2} \times 10^{-3}, \quad K_0 = 8/9$$

故に、 $\delta_0 = 9\sqrt{2} \times 10^{-3}$ 。 $z_8, z_9, \dots, z_{23}$ の真の誤差は $\sqrt{10} \times 10^{-3}$,

$2 \times 10^{-3}, \dots, \sqrt{8} \times 10^{-3}$ で、これらの最大値は $\sqrt{10} \times 10^{-3} \doteq 3.2 \times 10^{-3}$.

誤差の限界 δ_0 はそれ故に、真の誤差の限界より少し大きい。

2. Newton 法

実際の計算で生じる“丸め誤差”をも考慮したとき、Newton 法の過程はどう考えられるだろうか。この節ではこの問題を筆者の論文 [2] をもとにして述べてみよう。

Newton 法とは、任意の与えられた方程式

$$(2.1) \quad \phi(x) = 0$$

の解を求めるために、この方程式を定理 1.1. の条件を満足するような (1.1) の形の方程式に変換する方法である。

すなわち、 x_0 を方程式 (2.1) の任意の近似解とし、 h を $\bar{x} = x_0 + h$ が丁度 (2.1) の正確解となるような補正量とする。

$\phi(x)$ が x について連続微分可能であれば、

$$(2.2) \quad \phi(x_0 + h) \doteq \phi(x_0) + J(x_0)h \doteq 0,$$

ただし $J(x)$ は $\phi(x)$ の x に関する Jacobi 行列。従つて $\det J(x_0) \neq 0$ であれば、

$$(2.3) \quad h \doteq -J^{-1}(x_0) \phi(x_0)$$

故に、 x_1 を

$$x_1 = x_0 - J^{-1}(x_0) \phi(x_0)$$

とすればこれは初期値 x_0 よりもより正確な近似解であろうと考えられる。

この操作をくりかえすことにより、

$$(2.4) \quad x_{n+1} = x_n - J^{-1}(x_n) \phi(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

という反復を得るが、これはまさに Newton 法にほかならない。

しかしながら、実際の計算においては、 $J^{-1}(x)$ はしばしばその近似 $H(x)$ でおき換えられる。それ故ここでは $J^{-1}(x)$ の近似として $H(x)$ を使った反復

$$(2.5) \quad x_{n+1} = x_n - H(x_n) \phi(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

をも同じく Newton 法と呼ぶことにしよう。ただし (2.4) と (2.5) とを区別する必要があるときには、(2.4) の反復法を proper Newton method

(2.5) の反復法を general Newton method と呼ぶ事にする。 $H(x)$ は今後ずっとその定義域内の任意の元 x', x'' に関し Lipschitz 条件

$$(2.6) \quad |H(x') - H(x'')| \leq L|x' - x''|$$

をみたすものとする。

さて、 $\phi(x)$ は convex closed bounded な領域 D で定義されており、かつ D 内の元 x に関し 2 回連続微分可能であるとする。

D 内の任意の x', x'' に関し

$$(2.7) \quad \phi(x') - \phi(x'') = J(x'')(x' - x'') + R(x', x''),$$

ただし、

$$(2.8) \quad |R(x', x'')| \leq M_0 |x' - x''|^2$$

が成立する。ここで

$$(2.9) \quad f(x) = x - H(x) \phi(x),$$

とおけば、(2.7) より、 D 内の任意の x', x'' に関し

$$\begin{aligned}
f(x') - f(x'') &= x' - x'' - H(x'') [\phi(x') - \phi(x'')] \\
&\quad - [H(x') - H(x'')] \phi(x') \\
&= [E - H(x')J(x'')] (x' - x'') \\
&\quad - H(x'')R(x', x'') - [H(x') - H(x'')] \phi(x').
\end{aligned}$$

従つて、(2.6) 及び (2.8) より

$$\begin{aligned}
(2.10) \quad |f(x') - f(x'')| &\leq \left\{ |E - H(x')J(x'')| + M_0 |x' - x''| |H(x'')| \right. \\
&\quad \left. + L |\phi(x')| \right\} |x' - x''|.
\end{aligned}$$

ここで

$$(2.11) \quad \begin{cases} \max_{x \in D} |E - H(x)J(x)| = \kappa, \\ \max_{x \in D} (M_0 |H(x)|) = M, \end{cases}$$

とおけば、(2.10) より

$$(2.12) \quad |f(x') - f(x'')| \leq K(x', x'') |x' - x''|$$

ただし

$$(2.13) \quad K(x', x'') = \kappa + M |x' - x''| + L |\phi(x')|.$$

ここで D 内の任意の x', x'' に関し

$$(2.14) \quad K(x', x'') \leq K_0 < 1$$

という仮定をする。注意すべきことは、この仮定は何ら強い制限を設けた事にはならないということである。なぜならば、 $H(x)$ が $J^{-1}(x)$ に充分近くまた領域 D が与えられた方程式 (2.1) の解の近傍として充分小さく選んでありさえすれば、不等式 (2.14) は常に成立するからである。

不等式 (2.12) 及び (2.14) は (2.5) の形の反復が定理 1.1 の条件を充た

しているという事を示している。従つて、定理 1. 1. 及び定理 1. 2. の結論は、
Newton 法に対しても適用できる。

Newton 法によつて計算された近似解の誤差の限界は次の定理によつて
与えられる。

定理 2. 1.

函数 (2.9) の計算において生ずる誤差の限界を ε とする。このとき、
(2.1) の解が Newton 法 (2.5), 殊に

$$(2.15) \quad x_{n+1}^* = f^*(x_n^*) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

によつて求められたとすれば、ONC 状態における近似解 x_n^* の誤差の
限界 $\hat{\delta}$ は次の式で与えられる。

$$(2.16) \quad \hat{\delta} = \frac{1}{2M} [(1 - \kappa) - \sqrt{(1 - \kappa)^2 - 4\varepsilon M}] \doteq \frac{\varepsilon}{1 - \kappa}$$

ここに κ 及び M は (2.11) で与えられる定数である。

証明に移る前に不等式 (2.14) から

$$(2.17) \quad \det H(x), \det J(x) \neq 0 \quad \text{for any } x \in D$$

が従うという事に注意しよう。実際

$$(2.18) \quad H(x) J(x) = E - U(x)$$

とおくと、(2.11) のはじめの式より

$$(2.19) \quad |U(x)| \leq \kappa \quad \text{for any } x \in D,$$

更に (2.13) 及び (2.14) より

$$(2.20) \quad \kappa < 1$$

となる。

もし $\det [H(x) J(x)] = 0$ が D 内のある元 x にたいし成立したと

すれば (2.18) より

$$\det [E - U(x)] = 0 \quad \text{for some } x \in D.$$

従つてこのとき non-zero ベクトル u で

$$[E - U(x)] u = 0,$$

i.e.

$$u = U(x)u$$

となるものが存在する。

このとき (2.19) より

$$|u| \leq \kappa |u|$$

i.e.

$$(1 - \kappa) |u| \leq 0.$$

ところが (2.20) より $\kappa < 1$ であるから $|u| = 0$ 従つて $u=0$ であるがこれは矛盾である。すなわち (2.17) が成立する。

さて定理 2.1. の証明にとりかかろう。

定理 2.1. の証明

$x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m-1}^*$ を ONC 状態にある値とし $x_{n+m}^* = x_n^*$ と仮定する。定理 1.2. により

$$(2.21) \quad |x_{n+i}^* - \bar{x}| \leq \delta_0 = \frac{\varepsilon}{1 - K_0} \quad (i=0, 1, 2, \dots, m-1),$$

が成立する。ここに $\bar{x}$ は方程式

$$x = f(x)$$

の正確解である。(2.17) により $\det H(x) \neq 0$ だから、明かにこの方程式は与えられた方程式 (2.1) と同値である。

さて、(1.18) 及び (1.19) より $\bar{x} \in S$, 従つて (1.16) により $\bar{x} \in J_0$.

Σ は Σ_0 の δ_0 - 近傍だから

$$|x - \bar{x}| \leq \delta_0$$

となるような x の集合 V_1 は Σ に含まれている。このことから (2.21)

を考慮すれば

$$x_{n+i}^* \in V_1 \quad (i=0, 1, 2, \dots, m-1)$$

が従う。ここで

$$K_1 = \sup_{x \in V_1} K(\bar{x}, x)$$

とおけば (2.13), (2.14) より

$$(2.22) \quad K_1 = \kappa + M\delta_0 \leq K_0 < 1.$$

さて、(2.12) より領域 V_1 において逐次的に

$$\begin{aligned} |x_{n+1}^* - \bar{x}| &\leq |f^*(x_n^*) - f(\bar{x})| \\ &\leq |f^*(x_n^*) - f(x_n^*)| + |f(x_n^*) - f(\bar{x})| \\ &\leq \epsilon + K_1 |x_n^* - \bar{x}|, \end{aligned}$$

$$|x_{n+2}^* - \bar{x}| \leq \epsilon + K_1 |x_{n+1}^* - \bar{x}|$$

$$\leq \epsilon(1 + K_1) + K_1^2 |x_n^* - \bar{x}|,$$

$\vdots$

$$|x_{n+m}^* - \bar{x}| \leq \epsilon(1 + K_1 + K_1^2 + \dots + K_1^{m-1}) + K_1^m |x_n^* - \bar{x}|.$$

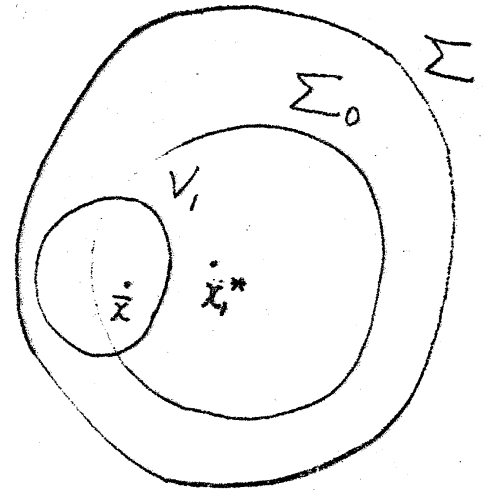


Fig. 1

仮定より $x_{n+m}^* = x_n^*$ だから最後の不等式から

$$|x_n^* - \bar{x}| \leq \frac{\varepsilon}{1 - K_1}.$$

明らかにこの不等式は、 x_n^* を $x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m-1}^*$ のうちのいずれでおき換えようとも常に成立する。従つて

$$(2.23) \quad |x_{n+i}^* - \bar{x}| \leq \delta_1$$

ここに

$$(2.24) \quad \delta_1 = \frac{\varepsilon}{1 - K_1}.$$

もし $K_1 = K_0$ なら明かに $\delta_1 = \delta_0$ であるから、(2.23) は (2.21) より以上に正確な誤差の限界を与えることはない。しかしながらこの場合には (2.22) より

$$\kappa = K_0 - \frac{\varepsilon M}{1 - K_0},$$

従つてこれを (2.16) に代入して

$$\hat{\delta} = \delta_0.$$

故に定理はこの場合たしかに成立している。

次に $K_1 < K_0$ であれば $\delta_1 < \delta_0$ だから (2.23) は (2.21) よりもより正確な誤差の限界を与えている。この場合には

$$(2.25) \quad \begin{cases} K_p = \kappa + M\delta_{p-1}, \\ \delta_p = \frac{\varepsilon}{1 - K_p} \end{cases}$$

$$(p = 1, 2, \dots),$$

とおけば

$$(2.26) \quad \delta_0 > \delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots; \quad K_0 > K_1 \geq K_2 \geq \dots$$

及び

$$(2.27) \quad |x_{n+i}^* - \bar{x}| \leq \delta_p \quad (p=0, 1, 2, \dots).$$

を得る。(2.26)における等号は $M=0$ のときに限り成立する。ともかく、

(2.26) より

$$\hat{\delta} = \lim_{p \rightarrow \infty} \delta_p, \quad \hat{K} = \lim_{p \rightarrow \infty} K_p$$

が存在すること、及び (2.27) より

$$(2.28) \quad |x_{n+i}^* - \bar{x}| \leq \hat{\delta}$$

が成立することがわかる。 $\hat{\delta}$ 及び $\hat{K}$ に関しては (2.25) より

$$\hat{K} = \kappa + M\hat{\delta}, \quad \hat{\delta} = \frac{\varepsilon}{1 - \hat{K}}.$$

これらの不等式から $\hat{K}$ を消去して

$$(2.29) \quad \hat{\delta} = \frac{\varepsilon}{(1-\kappa) - M\hat{\delta}},$$

すなわち

$$(2.30) \quad M\hat{\delta}^2 - (1-\kappa)\hat{\delta} + \varepsilon = 0.$$

$M = 0$ のときには明かに

$$(2.31) \quad \hat{\delta} = \frac{\varepsilon}{1 - \kappa}$$

となり

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{2M} [(1-\kappa) - \sqrt{(1-\kappa)^2 - 4\epsilon M}] = \frac{\epsilon}{1-\kappa}$$

であるから不等式 (2.28) 及び等式 (2.31) からこの場合定理は成立する。

$M \neq 0$ のとき、この場合には 2 次方程式 (2.30) を解いて

$$(2.32) \quad \hat{\delta} = \frac{1}{2M} [(1-\kappa) \pm \sqrt{(1-\kappa)^2 - 4\epsilon M}] .$$

ところが (2.26) から

$$\hat{\delta} < \delta_0 = \frac{\epsilon}{1-K_0} .$$

このことは $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $\hat{\delta} = 0(\epsilon)$ を意味する。よつて (2.32) より

$$\hat{\delta} = \frac{1}{2M} [(1-\kappa) - \sqrt{(1-\kappa)^2 - 4\epsilon M}] .$$

(2.28) の評価と併せれば定理を得る。

Q.E.D.

(2.11) からわかるように、proper Newton method にあつては

$\kappa = 0$ だから、(2.16) より ONC 状態にある x_n^* の誤差の限界はほとんど ϵ に等しい。ところが、 ϵ のもともとの意味からして、誤差が ϵ

を越えないというほど正確な近似解は期待すべくもないのであるから、

proper Newton method は我々が期待できる限りでは最も正確な近似解を与える方法の 1 つであるということがわかる。

ここまでは専ら ONC 状態にある x_n^* のみをとり扱ってきた。ところで計算が電子計算機で為される場合には、ONC 状態に到るまで反復を続けるためにはそれまでのすべての x_n^* ($n=0, 1, 2, \dots$) を記憶しておかねばならないため非常に不便である。それ故電子計算機による計算では実際には、

しばしば適当な正数 α を選び

$$(2.33) \quad |x_{n+1}^* - x_n^*| \leq \alpha$$

のような基準でもつて反復が止められている。

もし x_n^* が ONC 状態にある値であれば、定理 2.1.により

$$|x_n^* - \bar{x}|, \quad |x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq \hat{\delta},$$

それ故

$$|x_{n+1}^* - x_n^*| \leq 2\hat{\delta}.$$

従つて、仮に $\alpha \geq 2\hat{\delta}$ だとすれば (2.33) を満たさないような x_n^* は有限個しかないのであるから、 $\alpha \geq 2\hat{\delta}$ であれば (2.33) という基準でもつてたしかに反復計算は終了するはずである。

ところがもし $\alpha < 2\hat{\delta}$ であれば、ONC 状態にあるすべての x_n^* にたいして

$$|x_{n+1}^* - x_n^*| = 2\hat{\delta}$$

ということも起り得るのだから、(2.33) を満たすような x_n^* が存在しない事もあり得る。この場合 (2.33) という基準では反復計算を止めることは不可能である。

以上のことから (2.33) の形の基準で反復計算を止めるには α を

$$(2.34) \quad \alpha \geq 2\hat{\delta}$$

と選ぶ必要があるという事がわかる。

次に、(2.33) という基準で反復計算を止めたとき、最終 step で得られ

た x_{n+1}^* の誤差の限界を与えよう。

定理 2.2.

定理 2.1.において反復計算 (2.15) が (2.33) の基準で止められたとする。

その時 x_{n+1}^* の誤差の限界は常に

$$(2.35) \quad \frac{\varepsilon + K_0 \alpha}{1 - K_0}$$

で与えられる。しかし、もし

$$(2.36) \quad \kappa + M \cdot \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - K_0} < K_0$$

が成立すれば、 x_{n+1}^* の誤差の限界は更に正確に

$$(2.37) \quad \frac{\varepsilon + \hat{K}' \alpha}{1 - \hat{K}'} = \frac{\varepsilon + \kappa \alpha}{1 - \kappa} + \frac{M \alpha^2}{(1 - \kappa)^3}$$

で与えられる。ここに

$$(2.38) \quad \hat{K}' = \frac{1}{2} \left[(1 + \kappa) - \sqrt{(1 - \kappa)^2 - 4M(\alpha + \varepsilon)} \right] .$$

証明

(2.33) を満すような x_n^* にたいしては、(2.12) より

$$(2.39) \quad \begin{aligned} |x_n^* - \bar{x}| &\leq |x_n^* - x_{n+1}^*| + |f^*(x_n^*) - f(x_n^*)| \\ &\quad + |f(x_n^*) - f(\bar{x})| \\ &\leq \alpha + \varepsilon + K(\bar{x}, x_n^*) |x_n^* - \bar{x}|, \end{aligned}$$

ここに $\bar{x}$ は方程式

$$x = f(x)$$

の正確解であり、この方程式は定理 2.1.の証明の中でも述べたように与えら

れた方程式 (2.1) と同値なものである。

(2.39) から、(2.14) を考慮すればただちに

$$(2.40) \quad |x_n^* - \bar{x}| \leq \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - K(\bar{x}, x_n^*)}$$

が従う。ところで、(2.13) 及び (2.14) より

$$(2.41) \quad K(\bar{x}, x_n^*) = \kappa + M |x_n^* - \bar{x}| \leq K_0 < 1.$$

それ故 (2.40) より

$$(2.42) \quad |x_n^* - \bar{x}| \leq \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - K_0}.$$

さて次に (2.36) が成立している場合を考えよう。この場合

$$\delta_0' = \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - K_0}, \quad K_1' = \kappa + M\delta_0'$$

とおけば、(2.41), (2.42) 及び (2.36) により

$$K(\bar{x}, x_n^*) \leq \kappa + M\delta_0' = K_1' < K_0.$$

それ故 (2.41) により次の評価を得る。

$$(2.43) \quad |x_n^* - \bar{x}| \leq \delta_1'$$

ここに

$$(2.44) \quad \delta_1' = \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - K_1'} < \delta_0'.$$

上の操作は次々と続けることができる。従つていま

$$(2.45) \quad \begin{cases} K'_p = \kappa + M\delta'_{p-1} \\ \delta'_p = \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - K'_p} \end{cases} \quad (p=1, 2, \dots)$$

とおけば

$$(2.46) \quad \delta'_0 > \delta'_1 \geq \delta'_2 \geq \dots; K_0 > K'_1 \geq K'_2 \geq \dots$$

及び

$$(2.47) \quad |x_n^* - \bar{x}| \leq \delta'_p \quad (p=0, 1, 2, \dots)$$

を得る。このとき (2.46) により

$$\hat{\delta}' = \lim_{p \rightarrow \infty} \delta'_p, \quad \hat{K}' = \lim_{p \rightarrow \infty} K'_p$$

が存在し (2.47) から

$$(2.48) \quad |x_n^* - \bar{x}| \leq \hat{\delta}'$$

を得る。 $\hat{\delta}'$ 及び $\hat{K}'$ に関しては (2.45) から

$$(2.49) \quad \hat{K}' = \kappa + M\hat{\delta}', \quad \hat{\delta}' = \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - \hat{K}'}$$

が成立する。それ故これらの等式から $\hat{\delta}'$ を消去して

$$\hat{K}' = \kappa + \frac{M(\alpha + \varepsilon)}{1 - \hat{K}'},$$

すなわち

$$(\hat{K}' - \kappa)^2 - (1 - \kappa)(\hat{K}' - \kappa) + M(\alpha + \varepsilon) = 0.$$

これを解いて

$$(2.50) \quad \hat{K}' - \kappa = \frac{1}{2}[(1 - \kappa) \pm \sqrt{(1 - \kappa)^2 - 4M(\alpha + \varepsilon)}]$$

となる。ところで (2.49) の最初の等式により

$$0 \leq \hat{K}' - \kappa = M\hat{\delta}' \leq M\delta'_0 = \frac{M(\alpha + \varepsilon)}{1 - K_0}$$

である。それ故 $|\alpha + \varepsilon| \rightarrow 0$ のとき $\hat{K}' - \kappa = 0(|\alpha + \varepsilon|)$ でなければならぬ。従つて、(2.50) から

$$(2.51) \quad \begin{aligned} \hat{K}' &= \kappa + \frac{1}{2}[(1 - \kappa) - \sqrt{(1 - \kappa)^2 - 4M(\alpha + \varepsilon)}] \\ &= \frac{1}{2}[(1 + \kappa) - \sqrt{(1 - \kappa)^2 - 4M(\alpha + \varepsilon)}] \end{aligned}$$

を得る。さて (2.33) を満す x_{n+1}^* に対しては (2.12) から

$$(2.52) \quad \begin{aligned} |x_{n+1}^* - \bar{x}| &\leq |f^*(x_n^*) - f(x_n^*)| + |f(x_n^*) - f(\bar{x})| \\ &\leq \varepsilon + K(\bar{x}, x_n^*)|x_n^* - \bar{x}|. \end{aligned}$$

それ故、(2.41) 及び (2.42) により常に

$$(2.53) \quad |x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq \varepsilon + K_0 \cdot \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - K_0} = \frac{\varepsilon + \alpha K_0}{1 - K_0}$$

が成立する。

(2.36) が成立する場合には (2.48), (2.41) 及び (2.49) より (2.52) を考慮すれば

$$|x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq \varepsilon + \hat{K}' \hat{\delta}'$$

を得るがこれは (2.49) の二番目の等式により次のように書き変えることができる。

$$(2.54) \quad |x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq \varepsilon + \hat{K}' \cdot \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - \hat{K}'} = \frac{\varepsilon + \hat{K}'}{1 - \hat{K}'}.$$

しかしながら (2.51) により

$$(2.55) \quad \varepsilon + \alpha \hat{K}' = \varepsilon + \frac{\alpha}{2} [(1 + \kappa) - (1 - \kappa) \sqrt{1 - \frac{4M(\alpha + \varepsilon)}{(1 - \kappa)^2}}] \\ = (\varepsilon + \kappa\alpha) + \frac{M}{1 - \kappa} (\alpha + \varepsilon) + o((\alpha + \varepsilon)^2)$$

及び

$$(2.56) \quad \frac{1}{1 - \hat{K}'} = \frac{2}{(1 - \kappa) + \sqrt{(1 - \kappa)^2 - 4M(\alpha + \varepsilon)}} \\ = \frac{1}{1 - \kappa} + \frac{M}{(1 - \kappa)^3} (\alpha + \varepsilon) + M^2 o((\alpha + \varepsilon)^2).$$

従つて、(2.55) 及び (2.56) を (2.54) に代入して

$$(2.57) \quad |x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq \frac{\varepsilon + \alpha \hat{K}'}{1 - \hat{K}'} \\ = \frac{\varepsilon + \kappa\alpha}{1 - \kappa} + \frac{M(\alpha + \varepsilon)^2}{(1 - \kappa)^3} + o((\alpha + \varepsilon)^2) \\ = \frac{\varepsilon + \kappa\alpha}{1 - \kappa} + \frac{M\alpha^2}{(1 - \kappa)^3}.$$

を得る。不等式 (2.53) 及び (2.57) により定理は証明された。 Q.E.D.

実際の計算においては、 ε は小さく又 α は小さく選ばれている。従つ

て不等式 (2.36) は実際の計算に於ては常に成立していると仮定してよい。
 このとき、誤差の限界 (2.16) 及び (2.37) を比較してみると、
 (2.33) の形の基準で反復計算を止めるために α として

$$(2.58) \quad \varepsilon \ll \alpha \ll \varepsilon^{1/2}, \varepsilon/\kappa$$

なるものを選べば、かくして得られる近似解は ONC 状態における近似解と
 同程度の精度を持つているということがわかる。(2.58) 式で $a \ll b$ は $b \rightarrow 0$
 のとき $a = o(b)$ を意味するものとする。 $\varepsilon \ll \alpha$ なる条件は (2.34) からくる
 要求を満たすためである。

実際の計算においては κ は常に小さいから (2.58) 式を満たすように α
 を選ぶことは常に可能である。このことは、実際の計算において、best
 possible な精度、すなわち、ONC 状態における近似解の精度が、反復
 計算 (2.15) を α を適当に選んで (2.33) の形の基準で止めれば常に得ら
 れるという事を意味している。

注意 (2.52) 及び (2.13) より次の評価を得る。

$$|x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq \varepsilon + (\kappa + M|x_n^* - \bar{x}|)|x_n^* - \bar{x}|$$

これより、 ε 及び κ が小さければ近似的に

$$(2.59) \quad |x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq M|x_n^* - \bar{x}|^2$$

一方、定理 1.1. で述べた反復法を使つた場合には

$$|x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq \varepsilon + K_0|x_n^* - \bar{x}|$$

となる。これは近似的には

$$(2.60) \quad |x_{n+1}^* - \bar{x}| \leq K_0 |x_n^* - \bar{x}|.$$

それ故、(2.59) と (2.60) を比べてみればわかるように、定理 1.1. で述べた反復法よりも、Newton 法の方がより早く ONC 状態に至るといえる。

この事実は (2.37) と (2.35) を比べてみれば首肯される。実際、定理 1.1. で述べた反復法を使つたときには、(2.35) 及び (1.14) により x_{n+1}^* が ONC 状態にあり得るのはただ $|x_{n+1}^* - x_n^*| = o(\varepsilon)$ のときのみであるが、Newton 法の場合には κ が小さければ (2.37) と (2.16) からわかるように、 $|x_{n+1}^* - x_n^*| = o(\varepsilon^{1/2}) \gg o(\varepsilon)$ であれば x_{n+1}^* は ONC 状態にあると考えられるからである。

3. Newton 法の数値例

前節で述べた理論の数値例として次の方程式系をとろう。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \phi_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 3x^3 - 3x^2y + 6xy^2 - 4x - 3.304 = 0 \\ \phi_2(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^3 - 6x^2y - 3y^3 + 36y - 0.323 = 0 \end{cases}$$

この方程式系は非線型方程式

$$u + u^3 = \sin t \quad (\cdot = d/dt)$$

に対する Galerkin 法における決定方程式を少し修正したものであり、 x 及び y は三角多項式 $x \sin t + y \sin 3t$ の係数である。

方程式系 (3.1) の意味から考えて、(3.1) の近似解は次の方程式を解いて求められるであろうと思われる。

$$\phi_1(x, 0) = 3x^3 - 4x - 3.304 = 0$$

この方程式は 1.5 に近い根をただ 1 つの実根として持つているから、

$$(3.2) \quad x = 1.5, \quad y = 0$$

を近似解とすればこれでもつて Newton 法の出発値となし得るであろうと考えられる。

(3.2) を出発値として、我々は CDC 1604 を使つて Newton 法を行つてみた。表 2 は proper Newton method によつて得られた結果であり、表 3 は general Newton method で (2.9) の $H(x)$ を定数行列 $J^{-1}(x_0)$ としたものにより得られた結果を表わしている。今の場合はもちろん $x_0 = (1.5, 0)$ である。今後はこの general Newton method は simplified Newton method と特に呼ぶことにしよう。

使つた計算機 CDC 1604 は指数部分が 2 進 36 桁である。従つて今の場合、 $\phi_1(x, y)$ 及び $\phi_2(x, y)$ の計算における丸め誤差の限界はそれぞれ $|x| \leq 1.5$ $|y| \leq 0.1$ なる x 及び y に対し

14.67×2^{-35} 及び 7.26×2^{-35} である。

n	x_n^*	y_n^*	Δ_n
0	1.50000 00000	0.00000 00000	
1	1.40497 40082	-0.10713 66469	0.10713 66469
2	1.40007 77297	-0.09999 31486	0.00714 34983
3	1.40000 00047	-0.10000 00006	0.00007 77250
O 4	1.40000 00000	-0.10000 00000	0.00000 00047
N 5	"	"	0.00000 00000
C 6	"	"	0.00000 00000

$$\Delta_n = \max(|x_n^* - x_{n-1}^*|, |y_{n-1}^*|), (x_7^*, y_7^*) = (x_4^*, y_4^*)$$

Table 2.

n	x_n^*	y_n^*	Δ_n
0	1.50000 00000	0.00000 00000	
1	1.40497 40082	-0.10713 66469	0.10713 66469
2	1.40020 40864	-0.09975 08574	0.00738 57895
3	1.40002 06557	-0.10003 17877	0.00028 09303
4	1.40000 11088	-0.09999 87458	0.00003 30419
5	1.40000 01106	-0.10000 01651	0.00000 14193
6	1.40000 00060	-0.09999 99937	0.00000 01714
7	1.40000 00006	-0.10000 00009	0.00000 00072
8	1.40000 00001	-0.10000 00000	0.00000 00009
9	1.40000 00000	"	0.00000 00001
O 10	"	"	0.00000 00000
N 11	"	"	0.00000 00000
C 12	"	"	0.00000 00000

$$(x_{13}^*, y_{13}^*) = (x_{10}^*, y_{10}^*)$$

Table 3.

α	Process stopps at	Error bound given by (2.37)	True errors
10^{-10}	(x_{10}^*, y_{10}^*)	0.82×10^{-10}	0
10^{-9}	(x_8^*, y_8^*)	2.27×10^{-10}	1×10^{-10}
10^{-8}	(x_7^*, y_7^*)	12.40×10^{-10}	9×10^{-10}
10^{-7}			
10^{-6}	(x_6^*, y_6^*)	276.10×10^{-10} $(\approx 0.28 \times 10^{-7})$	63×10^{-10} $(\approx 0 \times 10^{-7})$

Table 4.

これより簡単な計算で次のことがわかる。

領域

$$D: |x - 1.4|, \quad |y + 0.1| \leq 10^{-6}$$

にある計算値に対して、proper Newton method の場合には

$$(3.3) \quad \kappa = 0, M < 2.401, \quad \varepsilon = 0.30 \times 10^{-10}$$

であり、simplified Newton method の場合には

$$(3.4) \quad \kappa < 0.1386, \quad M < 2.2, \quad \varepsilon = 0.27 \times 10^{-10}$$

となる。

proper Newton method を使った場合には表 2 からわかる様に、

(x_n^*, y_n^*) ($n=4, 5, 6$) が ONC 状態にある。 $((x_n^*, y_n^*)$ ($n=4, 5, 6$) は正確に同じ値であるとは限らないということに注意されたい。というのは、計算機の記憶装置の中では数はすべて 2 進法で表示されているのに、印刷された数はそれを丸めたものだからである。)

$x=1.4, y=-0.1$ が (3.1) の正確解だから、ONC 状態にある値には誤差がない。一方、これらの値に対して (2.16) によつて与えられる誤差の限界は、(3.3) により

$$0.5 \times 10^{-10} + \hat{\delta} \doteq 0.5 \times 10^{-10} + 0.3 \times 10^{-10} = 0.8 \times 10^{-10}$$

である。従つてこれより、(2.16) により与えられる誤差の限界は十分正確だということがわかる。

(2.15) の反復が $\alpha = 10^{-5}$ として (2.33) の基準により止められた場合には、表 2 が示しているように (2.15) の反復は (x_4^*, y_4^*) で止まる。このことは、反復が $\alpha = 10^{-5}$ として (2.33) の基準で止められても、best possible な精度を持つ値が得られるということを示している。

(2.37) が与える (x_4^*, y_4^*) に対する誤差の限界はというと、(3.3) より

$$(3.5) \quad 0.5 \times 10^{-10} + 0.3 \times 10^{-10} + 2.401 \times (47 \times 10^{-10})^2 \\ \doteq 0.8 \times 10^{-10}$$

となる。ただし表2よりわかるように

$$\Delta_n = |(x_4^*, y_4^*) - (x_3^*, y_3^*)| = 47 \times 10^{-10}$$

である。(3.5)は(2.37)により与えられる誤差限界も又十分精密であるといふことを示している。

simplified Newton method による場合には表3からわかるように、 (x_n^*, y_n^*) ($n=10, 11, 12$) が ONC 状態にある。これらの値には誤差はないが、(2.16)によつて与えられるこれらの値にたいする誤差の限界は、(3.4)により

$$0.5 \times 10^{-10} + \hat{\delta} \doteq 0.5 \times 10^{-10} \\ + \frac{0.27}{0.8614} \times 10^{-10} < 0.82 \times 10^{-10}.$$

これは(2.16)によつて与えられる誤差の限界もまた simplified Newton method に対して十分精密であるといふことを示している。

(2.15)の反復が(2.33)の形の基準で止められた場合には表3より表4が得られる。表4は(2.37)によつて与えられる誤差の限界も simplified Newton method にたいして十分精密であるといふことを示している。表4はまた、近似解の精度を十進 n 桁まであげるには α として $\alpha=10^{-n}$ 又は $10^{-(n-1)}$ と選ばねばならないといふことを示している。しかしながら(2.33)の形の基準を使う場合には、もし n が計算機に可能な位の限界に

近い場合には、 $\alpha = 10^{-n}$ としたのでは反復は止まらないという危険性がある。実際計算においてはこのことを常に念頭においておくべきであろう。

表 2 及び 3 から明かなように (2.5) における $H(x_n) \phi(x_n) = J^{-1}(x_n) \phi(x_n)$ がさして困難なく計算できれば proper Newton method の方が general Newton method よりも好ましいといえる。しかし、実際計算では、時に $J(x_n)$ の計算が極めて困難であつたり、あるいは $J^{-1}(x_n) \phi(x_n)$ の計算が各ステップで莫大な時間を必要とするということもおこる。そういう場合には適当な general Newton method の方が proper Newton method に比べて好ましくなる。

文 献

Collatz, L.

- [1] Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis, Z. Angew. Math. Phys., 41(1953), 327 - 357.

Urabe, M.

- [1] Convergence of numerical iteration in solution of equations, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser.A, 19(1956), 479 - 489.
- [2] Error estimation in numerical solution of equations by iteration process, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A - I, Math., 26(1962), 77 - 91.

