

8. ノルベII型方程式有理関数解を定義する
多項式の既約性についてこの計算機による予想

後援大, I 尾高惟倫 (Yoshinori Kametaka)

ヤブロンスキー [1] とポロビエフ [2] に於いて興味深い
一列の多項式

$$\begin{aligned} P_0 &= P_1 = 1, & P_2 &= t, & P_3 &= t^3 + 4, \\ P_4 &= t^6 + 20t^3 - 80, & P_5 &= t^{10} + 60t^7 + 11200t, \\ P_6 &= t^{15} + 140t^{12} + 2800t^9 + 78400t^6 - 3136000t^3 - 6272000, \\ P_7 &= t^{21} + 280t^{18} + 18480t^{15} + 627200t^{12} - 17248000t^9 \\ &\quad + 1448832000t^6 + 19317760000t^3 - 38635520000, \\ P_8 &= t^{28} + 504t^{25} + 75600t^{22} + 5174400t^{19} \\ &\quad + 62072800t^{16} + 13039488000t^{13} \\ &\quad - 828731904000t^{10} - 49723914240000t^7 \\ &\quad - 3093932441600000t, \quad \dots \end{aligned}$$

漸化式

$$(1) \quad \begin{cases} P_0 = P_1 = 1, \\ P_{n+1} P_{n+1} = t P_n^2 + 4 P_n'^2 - 4 P_n P_n'', \\ P_{-n} = P_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

の解と $1 \pm \sqrt{\lambda \pm 4}$ である。

$$(2) \quad f_n = (\log P_n / P_{n+1})'$$

は 11° と 12° II 型方程式

$$(3) \quad f_n' = 2f_n^3 + tf_n + n$$

を満たし、

$$(4) \quad p_n = -P_n P_{n+2} / 4 P_{n+1}^2 = (\log P_{n+1})'' - t/4$$

と q なる $\{f_n, p_n\}$ は 戸田方程式

$$(5) \quad f_n' = p_{n+1} - p_n, \quad p_n' = p_n (f_n - f_{n+1})$$

を満たす。 P_n は

$$(6) \quad P_n = \sum_{j=0}^{f(n)} P_{n,j} t^{d(n)-j}$$

$$(d(n) = n(n-1)/2, \quad f(n) = \lfloor n(n-1)/6 \rfloor)$$

の形で 整数係数の $d(n)$ 次多項式である。

P_n ($n \leq 23$) は本質的に既約多項式であることと計算機により証明した。任意の n について既約であることが予想される。

既約性が証明されたことがあり、これはⅠ型とⅡ型方程式
の有理関数解 f_n は2つの既約級項式で表わされ、
ことになり、理論的な意味のあることである。

その結果を正確にのたよう。

$$(7) \quad P_n(t) = 4^{f(n)} t^{g(n)} F_n(t^3/4)$$

$$\left(g(n) = 1 \quad \text{if } n \equiv 2 \pmod{3}, = 0 \text{ otherwise} \right)$$

ただし係数は $f(n)$ 次整数係数級項式

$$(8) \quad F_n(x) = \sum_{j=0}^{f(n)} F_{n,j} x^{f(n)-j}$$

$$\left(F_{n,j} = 4^{-j} P_{n,j} \right)$$

が定義される。

主要定理

F_n の既約因子の個数は n 次以下の素数 p_n 以下
と $1 \leq 1$ である。

$$\begin{aligned} p_5 &= p_6 = 2, & p_7 &= 19, & p_8 &= 17, & p_9 &= 53, & p_{10} &= 167, \\ p_{11} &= 251, & p_{12} &= 2, & p_{13} &= 41, & p_{14} &= 37, & p_{15} &= 211, \\ p_{16} &= 223, & p_{17} &= 283, & p_{18} &= 191, & p_{19} &= 239, \\ p_{20} &= 1447, & p_{21} &= 149, & p_{22} &= 773, & p_{23} &= 211. \end{aligned}$$

すなわち F_n ($n \leq 23$) は既約級項式である。

$\rho_{20} \sim \rho_{23}$ 以降は 名古屋大学 橋本佳明 氏の御協力
がなされた。その他は九大の大型計算機による。プログラ
ムは E. R. Berlekamp [3] のアルゴリズムを Fortran
で簡単に作ることができた。

以下 手計算で判定可能なものを示してみよう。

$$F_0 = F_1 = F_2 = 1, \quad F_3 = x+1, \quad F_4 = x^2 + 5x - 5, \quad \text{は自明.}$$

$$F_5 = x^3 + 15x^2 + 175 \quad \text{は mod}(2) \text{ で既約, 又は}$$

$$F_5(x+5) = x^3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 x^2 + 3^2 \cdot 5^2 x + 3^3 \cdot 5^2 \quad \text{は G. Dumas}$$

の法 [4] を適用して ニュートンの多角形を用いて判定
既約となる。 F_6, F_7, F_9 にもこの係数を素因数分
解して Dumas の法を適用することはできる。

一般に多項式 $F(x)$ が与えられるとき $F(x+m)$

(m 整数) を x のべき係数で表わし 係数を素因数分

解して Dumas の法で既約かどうか判定可能 という

アルゴリズムが考えられるが、これらの大型計算機をもつて

もたせられる非効率である。上記 Berlekamp の法は

整数係数正多項式の既約性を素因数法として計算可能と

本質的部分であるが、この法は大型計算機に主眼を向

ている。

我々の予想に対し同様、素理論的解答が得られることを期待
するが、その可能性の得るべき一歩は考へてみるべきか、

今の所は、今この F_n が既知であることは証明が容易であるが、
 外に困難な問題があるということを示すことはできない。

最後に

$$F_n(x, t) = \sum_{j=0}^{f(n)} I_{n,j} (xt)^j x^{3(f(n)-j)}$$

$$u_n(x, t) = g(n+1)x^{-2} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \log F_{n+1}(x, t),$$

$$v_n(x, t) = (g(n) - g(n+1))x^{-1} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\log F_n(x, t) / F_{n+1}(x, t) \right)$$

とすると u_n, v_n はそれぞれ KdV の解

$$u_t - 12uu_x + u_{xxx} = 0$$

m -KdV の解

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$$

の有理関数解を知ることができよう。 ([5])

[1] A.I. Yakubovskii Вестн АН СССР, серия физ.-техн. наук No 3 (1959)

[2] A.I. Vorobiev Differentsialnye Uravneniya 1 (1965) no 1, 79-81

[3] D.E. Knuth The art of computer programming, vol 2 Addison-Wesley

[4] フリットス・バールテン 現代代数学 I 東京図書

[5] Y. Kametake Proc. Japan Acad. (to appear)