

C^* -環上の Hermite 元について

桃谷高枝 加藤佳宣

本稿では単位元 1 を持つ C^* -環 A 上の (有界線形) 作用素全体の成す Banach 環 $B(A)$ の Hermite 元について考察してみたい。単位元 1 を持つ Banach 環 B の Hermite 元 x とは x が B の automorphism group の無限小生成元となっているようなものである。Banach 環の Hermite 元は spectral operator とも関係して重要なものであり多くの研究が為されて来ている。本稿で扱う $B(A)$ は一見して C^* -環に比べ norm の性質も余り素直なものではなく、また非常に構造の複雑な対象であることから研究するには大々すぎるように思われるが後述する A.M. Sinclair [31] の結果により Banach 環論では C^* -環などとともに重要な実例の一つとなっている。また、最近では作用素論の方でも E. Størmer [34] などが可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の (有界線形) 作用素全体 $B(\mathcal{H})$ に対して $B(B(\mathcal{H}))$ も Fourier 変換論の問題意識で論じ始めている。こうしたことから一般の $B(A)$

の Hermite 元を作用素論の方向から考察してみることは幾分かの興味を惹くのではないかと思われる。なお本稿は preprint 作成中の [20] の紹介であるが一部に [21] の内容を引用してある。

さて Banach 環 B の Hermite 元の定義は上記の形のままではかなり扱い難いので数域という概念を利用するのが普通である。 $B(B)$ に対する数域は通常 $W(x) = \{(x\xi, \xi); \|\xi\| = 1\}$ で定義するがそれと類似に $B \ni x$ に対して $V(x) = \{f(x); f \text{ は } B \text{ 上の汎函数で } f(1) = 1 = \|f\|\}$ と定める。すると x が Hermite 元である必要条件是 $V(x)$ が実数であることが判る。このことから自然に次の定義が導入される。

$$x: \text{positive 元} \iff V(x) \geq 0$$

$$x: \text{normal 元} \iff \exists y, z: \text{Hermite 元かつ } yz = zy \\ \text{で } x = y + iz \text{ となるものが存在}$$

$$x: (\text{Hermitian}) \text{ projection} \iff x^2 = x: \text{Hermite 元}$$

注意 (1) Banach 環の数域の定義には他に G. Lumer [23] に依るものが有るが上述の定義に関して差異は現われない。

(2) $B(B)$ に於いては $V(x)$ は $W(x)$ の閉包にあたっている。

(3) 必ずしも単位元を持たない Banach 環に対してもその数域を、単位元添加した環に於けるものとして定めることが出来るが、ここではそのような場合は扱わないことにする。

(4) 他に数域に関する基本的な性質については[2]を参照して頂きたい。

Sinclairの結果というのは $B(A)$ のHermite元の特徴づけに関するものである。それを説明する為に幾つかの記号を述べる。 $A \ni a$ に対して左multiplier $L_a \in B(A)$ とは $L_a(x) = ax$ で定められるものである。同様に右multiplier $R_a \in B(A)$ も定義出来る。 A 上の微分 $D(\in B(A))$ とは $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ を恒等的に満たすものである。特に $D_a = L_a - R_a$ と置くと D_a は微分である。このような形の微分をinnerであるという。微分 D が $D(x^*) = -D(x)^*$ を満たせば*-微分ということにする。

注意 *微分の定義を $D(x^*) = D(x)^*$ としている文献も有る。

さて、このときSinclairの結果は次のように述べられる。

定理S $B(A) \ni T$: Hermite 元 $\Longleftrightarrow$

或る A 上の*-微分 D と Hermite 元 $a \in A$ が存在して

$$T = D + L_a \text{ となる}$$

これは作用素論的にも興味深い結果のように思われる。

またこの結果以来、 $B(A)$ はかなり扱い易い実例として Banach 環論の文献によく現われて来るようである。しかしこの特徴づけのままでは取り扱いにやや難が有り positive 元などの形がはきり掴めない。本稿では若干の修正を施すことで

もう少し扱い易い形に直し更に幾つかの応用を述べてみたい。

注意 [18]の文脈では微分は1次元coboundaryにあっている。ここでのHermite元が“非可換幾何学”([12])的に何か実体の有るものであれば興味深い。

修正した形を述べる前に次のことを注意して置く必要がある。 A 上の(左・右)multiplicierと微分は A を稠密に含む任意の W^* -環 A^W 上へと自然に拡張される([30])。 A^W としては例えばenvelop von Neumann環を取ればよい。拡張した場合、spectrumの不変性の問題は残るが、大抵の場合同一視して扱うことが出来る。以下 A^W は一つ固定し、そのような同一視を特に断わらない限り行なうものとする。このとき、修正した形は次のようになる。 $B(A) \ni T$ に対して、

T : Hermite元 $\iff$ 或る self-adjoint (Hermite) 元 h , k
 $\in A^W$ に対して $T = L_h + R_k$

T : normal元 $\iff$ 或る normal 元 m , $n \in A^W$ に対して
 $T = L_m + R_n$

T : positive元 $\iff$ 或る positive 元 a , $b \in A^W$ に対して
 $T = L_a + R_b$

T : projection元 $\iff$ 或る projection 元 p , $q \in A^W$ に対して
 $T = L_p + R_q$ であつそれぞれの central coverは直交する

まず初めに $B(A)$ の Hermite 元について考察してみたい。

このとき Sinclair の特徴づけが我々の特徴づけを導くことは W^* -環上では微分がすべて inner になる ([30]) ことから判る。

注意 上述の特徴づけに [27] と [32] の内容を併せて考えてみると興味深いように感じられる。

我々の特徴づけを使えば比較的に見通しよく次の定理が得られる。

定理 1 $B(A)$ の Hermite 元 S, T の積 ST がまた Hermite 元であれば S と T は可換である

この定理は一般の Banach 環については [26] に未解決と述べられている。定理 1 の証明の梗概を以下に記す。鍵となるのは“劈開補題”と名付ける次の補題である。

補題 2 (劈開補題) W^* -環 $\mathcal{M}$ に於いて $L_\Delta D_\Delta = 0$ であれば或る central projection 元 $e \in \mathcal{M}$ が存在して $\Delta e = 0$ かつ $(1-e)\Delta$ が central 元となる。

略証 V を通常の束演算での join として $e_u = V\{v^* p_u v; v \in \mathcal{M} \text{ は unitary}\}$, $e = V\{e_u; u \in \mathcal{M} \text{ は unitary}\}$ とすればよい。 p_u は $\Delta - u^* \Delta u$ の support projection である。

次の補題は Kleinecke-Shirokov の定理 ([15]) からすぐ判る。

補題 3 $A = L_a + R_b$, $B = L_c + R_d$ について、

$$AB = BA \iff ac = ca \text{ かつ } bd = db$$

ここで $A = L_a + R_b$, $B = L_c + R_d$, $AB = L_d + R_a$ (a, b, c, d , A , B は self-adjoint) とする。

補題 4 恒等的に $D_a(x)D_d(y) + D_c(x)D_b(y) = 0$

略証 $D_d(x) = D_a(x)d + D_c(x)b$ であるが D_c , D_a , D_c は微分であるから示せる。

補題 5 $b = d = 0$ ならば $AB = BA$ (証略)

補題 6 a, b, c, d のどれか一つでも 0 なら $AB = BA$

略証 例えば $b = 0$ とする。補題 4 より $D_d(x)D_a(y) = 0$ となるから劈開補題が使えて命題は補題 3 と 5 の場合に帰着される。

補題 7 $ac = ca$ か $bd = db$ であれば $AB = BA$ である

略証 例えば $ac = ca$ とすると補題 4 より $D_b(d)D_a(x) = 0$ であるから劈開補題により補題 3 と 6 の場合に戻る。

そこで定理 1 の証明は補題 4 から $D_b(d)D_a(x) = 0$ となるので劈開補題で補題 7 の場合へ帰着させれば済む。

次に normal 元について述べてみたい。その前に次の集合を定義して置くと都合がいい。

$$\mathcal{B}(\mathcal{A})^J = \{Lx + Ry \in \mathcal{B}(\mathcal{A}); x, y \in \mathcal{A}^W\}$$

すなわち $\mathcal{B}(\mathcal{A})^J$ は $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ の Hermite 元全体により張られる部分空間であり、その元は Cartesian 分解を一意に許す。そこで $T \in \mathcal{B}(\mathcal{A})^J$ には自然に T^* にあたるものを定めることが出来

る([]). すぐに $T = L_x + R_y$ であれば $T^* = L_x^* + R_y^*$ となっていることが判る。この事実と補題3とを組み合わせれば前述のような $B(A)$ の normal 元の特徴づけが得られる。

注意 (1) $B(A)$ には $T^*(x) = T(x^*)^*$ として $*$ を導入することが出来る。 x が normal 元であることを D_x を normal 微分と呼ぶことの正当化が [19] ではこの $*$ を用いて成されている。すなわち、 D_x : normal 微分である必ず条件が $D_x^* D_x = D_x D_x^*$ であるからだというのである。しかしこの $*$ に依れば $(L_x)^* = R_x$ となり、すべての L_x が normal 元のようにになってしまうのでややまずいのではないかと思われる。この用語の正当化は前述の $*$ で行なった方が考え易いようである。以下では $*$ はこの意味に限定する。(2) normal 元の特徴づけから Fuglede-Putnam の定理が $B(A)$ の見地より再定式化出来る。これは通常 intertwining 性として理解されていたものである。すなわち、 $T \in B(A)$ が normal 元ならば $\ker T = \ker T^*$ 。実はこの形の定理は L. A. Harris に依り一般の Banach 環に対して得られている ([6])。このことは Banach 環の一般論をひとまず $B(A)$ で受け取めそれから A 自身の議論へと下げて行くことで新しい結果を大規模に得られるかもしれないという希望を抱かせる。

(3) [3] では線形力学系として、

$$L[x](t) = x'(t) + a(t)x(t) \quad (x \text{ は可微分関数、} a \text{ は区間上の}$$

連続行列値関数)の形のものを取り扱い更にその随伴系 L^* というものを、

$$L^*[x](t) = -x'(t) + a^*(t)x(t)$$

で定めている。これに類似的に $B(A)$ の元 T を、

$$T(x) = D(x) + L_a(x) \quad (D \text{ は微分で } D(x^*) = D(x)^* \text{ を満たす})$$

と定め、その随伴を、

$$T^*(x) = -D(x) + R_a^*(x)$$

と置いてみる。するとこの T^* は $B(A)^J$ で考えた $*$ に一致する。(4) [28] も参照されたい。

さて C. R. DePrima と B. K. Richard [9] は次のような定理を示している。

定理 D $A \ni T$ に対して $T \geq 0$ (すなわち positive 元)

$$\iff \text{任意の自然数 } n \text{ に対して } V(T^n) \text{ の実部が非負}$$

この定理の一般の Banach 環への拡張が問題となるが、実は彼らはそれが $B(B(I))$ としてすうまう行かないことを注意している。しかしながら次のように考えてみれば彼らの結果は任意の $B(A)$ に対して一般化される。

定理 8 $B(A) \ni T$ に対してすべての自然数 n について $T^n \in$

$$B(A)^J \text{ であると仮定するとき、 } T^n \geq 0$$

$$\iff \text{任意の自然数 } m \text{ について } (T^m)^* + T^m \geq 0$$

この証明の方針は劈開補題を前のように使って定理 D へと

帰着させるというものである。

注意 (1) $V(T)$ の実部が非負であるとき T は発展作用素と呼ばれている。 C^* -環の元 T が発展作用素であることは、 $T^* + T \geq 0$ と同値となる。 また Banach 環 B に対して、 $B = B^J$ である必要条件は B が C^* -環であることである ([2])。 ついでながら C^* -環とは Hermite 性と self-adjoint 性が一致するような $*$ -Banach 環のことだと言ってもよい ([23])。 (2) 定理 8 がより一般の Banach 環に於いて成立するかどうかは不明である。 (3) これも余談ではあるが定理 D から次の命題が得られるので挙げて置く。

命題 9 A の元 $a \geq 0$ と x に対してもしすべての自然数 n

について $a^n x + x a^n \geq 0$ であれば $a x = x a$ となる

$B(A)$ の normal 元の特徴づけはまた “病的” な実例を得るのにも使える。 ここでは一例を挙げる。 M. J. Crabb [5] は或る特殊な Banach 環を構成してその中に normal 元でありながら $\|T\|/r(T) = \sqrt{2}$ となっているようなものが存在し得ることを示した。 但し $r(T)$ は T の spectral 半径である。 しかしながらこのような現象は次に示すように $B(A)$ にあってはむしろ通常であることが判る。

定理 10 A : 可換 $\iff \|T\|/r(T) \geq \sqrt{2}$ である normal 元 T が $B(A)$ に存在しない

略証 $\mathcal{A}$ が非可換であれば Kaplansky の定理から $n^2 = 0$, $\|n\| = 1$ なる元が存在する。このとき $n = a + ib$ を Cartesian 分解として $T = L_a + R_{ib}$ と置けばこれが求めるものである。その検証には、

定理 II $B(\mathcal{A})^J \ni Lx + Ry$ に対して、

$$(1) \|Lx + Ry\| = \inf \{ \|x+z\| + \|y-z\|; z \text{ は } \mathcal{A}^W \text{ の central 元} \}$$

$$(2) r(Lx + Ry) = \inf \{ r(x, y, z); z \text{ は } \mathcal{A}^W \text{ の central 元} \} \text{ (但し、}$$

$$r(x, y, z) = \sup \{ |\lambda + \mu|; \lambda \in \sigma(x+z), \mu \in \sigma(y-z) \})$$

を用いるとよい。定理 II の証明については以下に述べる L. Zsidó の手法を用いればよいので省略する。

注意 (1) ここで病理性と呼んでいるものは C^* -環では現われない性質のことである。(2) $\mathcal{A}$ が可換であっても $B(\mathcal{A})$ の normal 元に病理性は現われて来る。例えば可換な $\mathcal{A}$ で、 $B(\mathcal{A})$ の元 U が $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$ となっても normal 元でないことが有り得る。

さて今度は $B(\mathcal{A})$ の positive 元を扱うことにする。この特徴づけの為に L. Zsidó [37] に依り考案された手法を利用することにする。

注意 [17] の結果を使っても出来る。

まず Ω を $\mathcal{A}^W$ の center の極大 ideal 空間とし、各 $t \in \Omega$ に対して $[t]$ は t を含むような $\mathcal{A}^W$ の最小両側 norm 閉 ideal で $\mathcal{U}_t$ は $\mathcal{A}^W$

から $\pi_t = \mathcal{A}^W/[t]$ への自然写像とする。このときどの π_t も或る Hilbert 空間 $\mathcal{H}_t$ に於いて忠実な既約表現を有している ([16]) ので以後 π_t を $\mathcal{B}(\mathcal{H}_t)$ の稠密な C^* -部分環と見做すことにする。

$A = L_m + R_n \in \mathcal{B}(\mathcal{A}^W)^J$ に対し $A_t \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_t))^J$ を $A_t = L_{\nu_t(m)} + R_{\nu_t(n)}$ として定める。次の二定理を援用する。

定理 B ([2]) Banach 環 $\mathcal{B}$ の normal 元 T に対して $V(T)$ は T の spectrum の凸包に等しい。

定理 R ([29]) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{A}^W)$ が $T\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ を満たし $\sigma_{\mathcal{A}^W}(T)$ (T の $\mathcal{B}(\mathcal{A}^W)$ での spectrum) が平面を分離しないならば $\sigma_{\mathcal{A}^W}(T) = \sigma_{\mathcal{A}}(T)$ (T の $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ での spectrum) である。

補題 12 $a \in \mathcal{A}^W$: positive 元 $\iff$ どの $t \in \Omega$ に対しても $\nu_t(a)$: positive 元

略証 $\Leftarrow$ のみ示す。 $a = a_+ - a_-$ を Jordan 分解とすれば $\nu_t(a) = \nu_t(a_+) - \nu_t(a_-)$ は $\nu_t(a)$ の Jordan 分解であるから $\nu_t(a_-) = 0$ が言える。ここで $\|a_-\| = \sup\{\|\nu_t(a_-)\|; t \in \Omega\}$ であるから ([37])、 $a = a_+$ となる。

ところで、 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ の Hermite 元、normal 元がそれぞれ $\mathcal{B}(\mathcal{A}^W)$ の元と見做せることはそれらの特徴づけからすぐに判る。また $\mathcal{B}(\mathcal{A})^J \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}^W)^J$ と見做してもよい。positive 元については、

補題 13 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ の positive 元は $\mathcal{B}(\mathcal{A}^W)$ の positive 元と見做せる

そしてもし A が positive 元なら各 t について A_t は positive 元である

略証 前半は定理 B と R に依る。後半は $V(A_t) \subset V(A)$ に注意する。

補題 14 Hermite 元 $A = L_h + R_k$ に対して、 $\sigma_{\mathcal{M}_t}(A_t) (B(\mathcal{M}_t)$ での spectrum) $= \sigma(\nu_t(h)) + \sigma(\nu_t(k))$ が成立する

略証 A_t が Hermite 元であるから定理 R に依り $\sigma_{\mathcal{M}_t}(A_t) = \sigma_{B(\mathcal{H}_t)}(A_t)$ であり、それは [33] に依り $\cap \{ \sigma(\nu(h+z)) + \sigma(\nu(k-z)) ; z \in B(\mathcal{H}_t) \text{ は central 元} \}$ であるから判る。

ここで positive 元の特徴づけが示せる。まず T が positive 元 $a, b \in A^W$ に対し $T = L_a + R_b$ と書ければ T は Hermite 元であり定理 B により $V(T) = \text{co} \sigma_{A^W}(T) \subset \text{co}(\sigma(a) + \sigma(b))$ である (但し co は凸包) から positive 元であることが判る。逆に T が positive 元であれば確かに $T = L_h + R_k$ となるような $h < 0$ と $k > 0$ が A^W 内に取れる。補題 13 に依り各 t に対し T_t が positive 元となる。補題 14 から $\sigma(\nu_t(h)) + \sigma(\nu_t(k)) = \sigma_{\mathcal{M}_t}(T_t) \geq 0$ となることに注意する。そのとを補題 12 に依り $\nu_t(k) - \|\nu_t(h)\| \geq 0$ が判る。そこで関数 $z : t \rightarrow \|\nu_t(h)\|$ が連続である ([14]) から z を A^W の central 元と考え $a = h + z$, $b = k - z$ と置けばよい。

系 15 $T \in B(A) : \text{positive 元} \iff$

どの $\alpha \in \Omega$ に対しても T_α : positive 元

$B(A)$ の positive 元も一見素直な形に特徴づけられたがやはりかなりの病理性が有る。例えば、

定理 16 次は同値である

- (i) A は可換
- (ii) 任意の positive 元 $T \in B(A)$ に対して T^2 が normal 元
- (iii) 任意の可逆な positive 元 $T \in B(A)$ に対して T^{-1} が normal 元

しかしながら他方で次のような性質を持っているので目下の処、どのような病理性が現われるのかを見通すことは難しい。

定理 17 $B(A) \ni A, B$ に対して $A \geq 0$ かつ B が Hermite 元であり $AB + BA = 0$ を満たせば $AB = 0$ となる

証明は両定理とも劈開補題を使って単純な場合に漸次帰着をせて行けばよい。

もし positive 元 A が root (すなわち $B^2 = A$ となるような $B \geq 0$) を持つときにはその性質はぐっと扱い易くなる。実際、このときは劈開補題が有効に使えて次が得られる。

定理 18 positive 元 $A \in B(A)$ が root を持てばそれは一意的であり、或る $a, b \in A^W$ で $T = L_a + R_b$ かつ $C(a)$ (a の support projection の central cover) と $C(b)$ とが直交するようなもの

が存在し、このとき A の root は $L_{a^{\frac{1}{2}}} + R_{a^{\frac{1}{2}}}$ である

この定理から $B(A)$ の projection 元の特徴づけが容易に得られる。以下 $B(A)^P$ を $B(A)$ の projection 元の全体とする。これは A の projection 元全体 A^P に似た種々の性質を持っているがやはり意外な病理性も示す。

注意 $B(A)^P$ の構造に初めて注目したのは綿谷安男氏であると思われる。氏の(未発表の)結果は、 A が Π_1 -factor であれば $B(A)^P = \{L_p, R_p; p \in A^P\}$ となる、というものである。

この結果は一般の $B(A)^P$ を考察する上で非常に示唆的であった。

$B(A)^P$ の病理性の一例は可換 C^* -環 A に於いても挙げられる。

定理19 $C(\Omega)$ を compact Hausdorff 空間 Ω 上の連続関数の成す

C^* -環としたとき、 Ω が一点集合でない限り $B(C(\Omega))$ の元

T で $T^2 = T$, $\|T\| = 1$ でありながら normal 元でないような

ものが存在する

略証 $\Omega \ni x_0$ を取り、 $f \in C(\Omega)$ に対して $(T(f))(x) = f(x)$ と定めればよい。

この定理の応用として $B(A)$ が C^* -環とはかなり異質な対象であることが示せる。Banach 環が IR 環 ([10]) であるとは、それが或る Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対し $B(\mathcal{H})$ に norm も込めて埋め込めるときである。

定理20 $B(A)$ が IR 環であるのは A が複素数体のときに限

る

略証 $B(A)$ が或る $B(\mathcal{H})$ に埋め込めたとすれば単位元も一致していると考えてよい。すると $B(A)$ の Hermite 元は、 $B(\mathcal{H})$ でもそうであり従って定理 16 が使えて A が可換と判る。そこで A の極大 ideal 空間を Ω とすれば定理 19 に依り Ω は一点集合となるから示せた。

しかしながら $B(A)^P$ では A^P と同様に Sz.-Nagy の定理が成立する。すなわち、

定理 21 $B(A)^P \ni P, Q$ $\|P - Q\| < 1$ であれば或る Hermite 元 S が存在して $S^2 = 1$ かつ $P = SQS$

この証明の方針は次の補題を利用して $B(A)$ の話を A での話に下げるといものであるが詳細は略す。

補題 22 A^W の projection 元 p, q が $\|L_p - R_q\| < 1$ を満たせば $p = q$ でありかつそれは central 元である

この補題の証明は Zsidó の手法で出来るが、また次の“一意中心定理”と名付けた命題から導いてもよい ([21])。

定理 23 $A^P \ni p, q$ が、

(*) $\|p - r\| < 1$ なるすべての $r \in A^P$ に対して $\|q - r\| < 1$ を満たすならば $p = q$ となる

この定理は粗く言えば A^P の形状が真に円いということも主張していると見做せる。証明はやや面倒である。

注意 (1) Banach環が或る Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対し $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分 Banach環として位相同型に埋め込めるとき R 環という。

A が有限次元であれば $\mathcal{B}(A)$ は R 環であるが逆が成立するかどうかは現在不明のままである。 (2) A の unitary 全体に、

“一意中心定理”が成立することはすぐ判る。しかし A の partial isometry 全体の場合にはどうかは不明である。

次の定理は [22] での結果の $\mathcal{B}(A)$ での類似であるが定理 21 の応用として得られる。

定理 24 $\mathcal{B}(A)^P \ni P$ に対して次は同値

- (1) P は $\mathcal{B}(A)^P$ での孤立点 (2) P は $\mathcal{B}(A)^J$ での central 元
(3) P は A の或る central projection P に対して $P = L_P$

今度は $\mathcal{B}(A)^P$ の順序的構造を考察してみたい。この場合、自然に考えつく二つの順序の導入が有る。すなわち、 $P \geq Q$ というのは $P - Q$ が positive 元となるときを定義するか、それとも $PQ = Q$ または $QP = Q$ として定義するかということである。ここで $PQ = Q \iff QP = Q$ であることは定理 1 の帰結である。幸いなことに、

定理 25 $\mathcal{B}(A)^P \ni P, Q$ に対し次は同値

- (1) $P - Q \geq 0$ (2) $PQ = Q$
(3) $Q^\perp - P^\perp \geq 0$ (但し $P^\perp = 1 - P$)

これには次の二つの補題を用いればよい。

補題 26 $A^P \ni p, q$ に対して

$$p - q \geq 0 \iff L_p - L_q = 0 \iff R_p - R_q \geq 0 \quad (\text{証略})$$

補題 27 $A^P \ni p, q$ に対して

$$L_p - R_q \geq 0 \iff R_p - L_q \geq 0 \iff L_p R_q = R_q \iff$$

$$R_p L_q = L_q \iff \text{或る central 元 } z \in A^W \text{ に対して } p - z \geq$$

$$0 \text{ かつ } z - q \geq 0 \iff \text{或る central projection 元 } e \in A^W$$

$$\text{に対して } p - e \geq 0 \text{ かつ } e - q \geq 0 \quad (\text{証略})$$

さて $B(A)^P$ に順序が素直に入ってくると思えば、それでは果たして $B(A)^P$ がこの順序に対し束を成すかということが考えられる。これは実は一般にはうまく行かないことが以下のようにして言える。写像 $\mu: B(A)^P \rightarrow A^P$ を $\mu(p) = p1$ として定めれば μ は順序を保存し onto である。従って $B(A)^P$ が束を成せば A^P も束となる。そこで問題は A^P が束を成さないような C^* -環 A の例を見つけ出せばよい。非常に奇妙な盲点と思われるのであるが現在迄に調べた限りでは束論の文献中にはこのように基本的な C^* -環の実例は紹介されていないようである。昨年の四月に S. S. Holland は前田周一郎先生宛の私信で、 $*$ -環 R でその projection 元全体が束とならないものの実例を尋ねて来ている。但し R での projection 元 p とは $p^* = p = p^2$ を満たすものであり、projection 元 p, q に対する順序 $p \geq q$ は $pq = q$ で定めるものである。これを今後

“Holland問題”として引用して行くことにする。この問題は C^* -環での実例を示すことで完全に解決出来る。その実例の一つは Calkin 環([21])であることが判った。Calkin 環 $A(\mathcal{H})$ は可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対して $B(\mathcal{H})$ のその compact ideal に依る剰余環である([11])。

定理 28 $A(\mathcal{H})^F$ は束を成さない

略証 $A(\mathcal{H})^F \ni p, q$ に対してその上限を r とする。 p, q の双方に可換な unitary u に対して $r = (u^* p u) \vee (u^* q u) = u^* r u$ であることから [36] での可分 C^* -部分環に対する bicommutant 定理が使えてまず次の補題が言える。

補題 29 $A(\mathcal{H})^F$ が束を成すと仮定し $A(\mathcal{H})$ の二つの C^* -部分環 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ で projection 元 p, q を共に含むものとするときこの p, q の $\mathcal{A}$ での上限と $\mathcal{B}$ での上限は一致する
今、 $\mathcal{M}_2$ を 2×2 行列環とし $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を

$$\mathcal{A} = \{f: \text{閉区間}[0, 1] \text{ から } \mathcal{M}_2 \text{ への連続函数}\}$$

$$\mathcal{B} = \{f: [0, 1] \text{ から } \mathcal{M}_2 \text{ への可測函数}\}$$

$$\text{と定め、更に、 } a(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \sin t \cos t \\ \sin t \cos t & \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad p(t) = a(0)$$

$$q(t) = \begin{cases} a(0) & t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ のとき} \\ a(\pi(t - \frac{1}{2})) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ のとき} \end{cases}$$

と置けば、明らかに $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ でありそして $\mathcal{A}$ 内と $\mathcal{B}$ 内で p と q の上限は異なる。そこで $\mathcal{B}$ を或る可分 Hilbert 空

間 $\mathcal{H}$ に対して $B(\mathcal{H})$ に埋め込み、その $B(\mathcal{H})$ を写像 $j: B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}): x \rightarrow x \otimes 1$ ($\otimes$ は tensor 積) でまた埋め込み、自然写像 $\iota: B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \rightarrow A(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ に対し $\iota \circ j$ を考えてみるとこれは 1-1 となるから結局 B が $A(\mathcal{H})$ の或る C^* -部分環に同型と判る。従って補題 29 に反する。

この証明は束にならない機構がもうひとつピンと来ない憶みがある。また Calkin 環は非可分的なので可分 C^* -環での束にならない実例の有無も問題になる筈である。これに答える為に次のような C^* -環を考える。 $\mathbb{N}$ を自然数全体とし

$$\mathcal{D} = \{f; f: \mathbb{N} \rightarrow M_2 \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \text{ が存在する}\} \text{ と置く。}$$

定理 30 $\mathcal{D}^P$ は束を成さない

略証 $p, q \in \mathcal{D}^P$ をそれぞれ、 $p(n) = a(0)$,

$$q(n) = \begin{cases} a(0) & n \text{ が奇数のとき} \\ a(\frac{1}{n}) & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

と置いてみれば $p \vee q$ の存在しないことはすぐ判る。

注意 (1) Cuntz 環([7])と Choi 環([4])は重要な C^* -環の例であるが、これらの projection 元全体が束を成すかどうかは現在知られていないようである。(2) A^P が束を成すときには $B(A)^P$ も束を成しているかどうかは目下不明である。

しかしながら A が W^* -環であれば A^P は非常に性質のよい束になることが知られている。この場合は $B(A)^P$ が束となるこ

とが期待される。このことを説明する為に束論での幾つかの用語を準備する。まず、束が完備であるとはその任意の部分集合に上限と下限が存在することである。束の最小元を 0 、最大元を 1 と書くことにする。 0 と 1 を持つ束の元 x に対して x' が補元であるとは $x \vee x' = 1$ かつ $x \wedge x' = 0$ を満たしていることである。 x が補元を持ちしかも次の恒等式、 $a \vee (b \wedge x) = (a \vee b) \wedge (a \vee x)$, $a \wedge (b \vee x) = (a \wedge b) \vee (a \wedge x)$, $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge (x \vee b)$, $x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ をすべて満たせば central 元という。束 $\mathcal{L}$ の central 元全体を $\mathcal{L}^c$ と書くことにする。 $\mathcal{L}^c$ も束となる。 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}^c$ が完備束であってしかも $\{z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{L}^c$ に対し恒等的に $(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda) \wedge a = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (z_\lambda \wedge a)$ が成立すれば $\mathcal{L}$ を Σ -束という。束 $\mathcal{L}$ が次のような $\mathcal{L}$ 上の写像 $\perp$ を持つとき ($\perp$ に関する) orthomodular 束であると呼ばれる。(1) $a^\perp$ は a の (一つの) 補元 (2) $a \geq b$ ならば $b^\perp \geq a^\perp$ (3) $a^{\perp\perp} = a$ (4) $a \geq b$ ならば $a = b \vee (a \wedge b^\perp)$

完備な orthomodular 束は Σ -束である。そして次もよく知られている。

定理 M W^* -環 $\mathcal{M}$ に対して $\perp$ を $p^\perp = 1 - p$ で定めれば、 $\mathcal{M}^P$ は完備 orthomodular となる

注意 これらについての詳細は [25] を参照して頂きたい。

そして実は次が成立する。

定理 31 W^* -環 $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{B}(\mathcal{M})^P$ は ($\perp$ に関して) 完備 orthomodular 束を成す。

orthomodular 束は束論で重要なものであるが定理 31 は調べた限りでは) その新しい実例を与えている。この束 $\mathcal{B}(\mathcal{M})^P$ は $\mathcal{M}^P$ の束構造と密接な関連を持っているが、その事情は束論の枠内で抽象的に扱ったほうがはつきりする。しかもそのような取り扱いが Σ -束 (そして orthomodular 束) の新しい構成法ともなっている。そこで今、 $\mathcal{L}$ を Σ -束とする。このとき $\mathcal{L} \ni x$ に対して $e(x) = \bigwedge \{z \in \mathcal{L}^c; z \geq x\}$, $e'(x) = \bigvee \{z \in \mathcal{L}^c; x \geq z\}$ が定まる。 $\mathcal{L}^\#$ の元 (a, b) とは $\mathcal{L}$ の元の順序対で或る central 元 z に対し $z \geq a$ かつ $z' \geq b$ となるようなものとする。この z を劈開子と呼ぶことにする。明うかに $e(a)$ と $e'(b)$ は劈開子となる。或る central 元 z に対して $a \geq z \geq b$ となることを $a \triangleright b$ と略記する。すると $\mathcal{L}^\#$ の二元 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ に対して次のように擬順序を定めることが出来る。

$$(a_1, b_1) \geq (a_2, b_2)$$

$$\iff \text{それぞれの劈開子 } z_1, z_2 \text{ が存在して、} a_1 \wedge z_2 \geq a_2 \wedge z_1,$$

$$a_1 \wedge z_2' \triangleright b_2 \wedge z_1, b_1 \wedge z_2 \triangleright a_2 \wedge z_1', b_1 \wedge z_2' \geq b_2 \wedge z_1' \text{ を満たす}$$

実はこの定義は劈開子の選び方に依らない。そして之により導入される同値関係で $\mathcal{L}^\#$ を類別することが出来る。そ

れを $\mathcal{L}^S$ と記す。 $\mathcal{L}^S$ は自然に順序集合となる。

$$a \vee_L b = a \wedge e(b)' \quad a \vee_R b = (b \wedge e(a)') \vee (e(a) \wedge e(b))$$

$$a \wedge_L b = a \wedge k(b) \quad a \wedge_R b = b \wedge k(a) \wedge k(b)'$$

と定義する。 $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を劈開子 $\{z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を持つような一つの族とする。

そして更に、 $z_\Gamma = (\bigwedge_{\lambda \in \Gamma} z_\lambda) \wedge (\bigwedge_{\lambda \notin \Gamma} z_\lambda')$ ($\bigwedge_{\emptyset} z_\lambda = 1$),

$$a_\Gamma^{VL} = (\bigvee_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda) \wedge z_\Gamma \quad b_\Gamma^{VR} = (\bigvee_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda) \wedge z_\Gamma$$

$$a_\Gamma^{AL} = (\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda) \wedge z_\Gamma \quad b_\Gamma^{AR} = (\bigvee_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda) \wedge z_\Gamma$$

$$a \vee^L b = \bigvee_{\Gamma \subset \Lambda} (a_\Gamma^{VL} \vee_L b_\Gamma^{VR}) \quad a \vee^R b = \bigvee_{\Gamma \subset \Lambda} (a_\Gamma^{VL} \vee_R b_\Gamma^{VR})$$

$$a \wedge^L b = \bigvee_{\Gamma \subset \Lambda} (a_\Gamma^{AL} \wedge_L b_\Gamma^{AR}) \quad a \wedge^R b = \bigvee_{\Gamma \subset \Lambda} (a_\Gamma^{AL} \wedge_R b_\Gamma^{AR})$$

とする。このとき、 $[(a \vee^L b, a \vee^R b)]$ と $[(a \wedge^L b, a \wedge^R b)]$ は、

それぞれ $\{[(a_\lambda, b_\lambda)]\}_{\lambda \in \Lambda}$ ($[]$ は $\mathcal{L}^S$ での同値類を表す) の上限と下限になっていることが判る。

そして $\mathcal{L}^S$ は $\mathbb{Z}$ -束となることも示せる。

こうして $\mathbb{Z}$ -束の新しい構成法が得られた。

$\mathcal{L}$ が更に完備 orthomodular 束としたときは $\mathcal{L}^S \ni [(a, b)]$ に対し

$$[(a, b)]^\perp = [(a \wedge e(a), b^\perp \wedge e(a)')] \text{ として } \perp \text{ を定めることにより}$$

$\mathcal{L}^S$ を orthomodular 束にすることが出来る。こうして、

定理32 W^* -環 me に対し束 $B(me)^P$ と $(me^P)^S$ は同型である

注意 (1) $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}^S$ への写像 η_L, η_R をそれぞれ $x \rightarrow$

$[(x, 0)], [(0, x)]$ で定める。ここでもし $\mathcal{L}$ から束 $\mathcal{L}^P$ への二つの束準同型写像 f_L, f_R が $\mathcal{L}^P$ 上で一致したなら $\mathcal{L}^S$ から $\mathcal{L}^P$ への或る束準同型写像が存在して $f_L = g \circ \eta_L$ かつ $f_R = g \circ \eta_R$ となる。

この意味で $\mathcal{L}^S$ は $\mathcal{L}$ とそれ自身の tensor 積 ([13]) のようなものと見做せる。(2) orthomodular 束の horizontal sum とは各束の 0 同士及び 1 同士を併せ、他は手つかずのままにして作る束をいう ([24])。完備 orthomodular 束 $\mathcal{L}$ に対してもし $\mathcal{L}^C = \{0, 1\}$ であれば $\mathcal{L}^S$ は $\mathcal{L}$ とそれ自身の horizontal sum に同型となる。また $\mathcal{L}$ が Boole 束であれば $\mathcal{L}^S$ は $\mathcal{L}$ 自身に同型である。

以上が現在迄の $B(A)$ の Hermite 元についての研究の概略である。本稿の内容は基本的に筆者の

第 14 回関数解析研究会講演集録 (1979 / 7 / 5-7), 大阪教育大学 (於なにわ会館), 5-20.

での記事の発展したものであることをお断わりして置く。

その記事中に気づいたミスもこの紙上を借りて訂正をさせて頂きたい。一つは定理 7 (iii) での T^2 が T^{-1} である。15 頁の 9 行目の $B(A)^P$ は A^P である。それとこれは中本律男先生から御指摘の通り定理 6 の後半は必ずしも自明でないようである。

(この御指摘に対し感謝致します。)

なお、 $B(A)$ について今後の問題は色々と考えられるが、その一つとして劈開補題の改良を挙げて置きたい。この補題を例えば次の問題に適用するのは難しいように思われる。

$$B(A)^J \ni A, B \quad A^2 = B^2 \geq 0 \implies A = B?$$

最後になりましたが、この講演・報告の機会を与えて下さったことに対し斎藤俊四郎先生に深く感謝致します。

References

1. J.Anderson and C.Foias, Pacific J. Math., 61(1975), 315-325.
2. F.F.Bonsall and C.Duncan, Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras, Cambridge Univ. Press, 1971.
3. J.A.Burns, Lecture Notes on Generalized Inverses of Linear Operators in Normed Linear Spaces, Brown University, 1974.
4. M.-D. Choi, A simple C^* -algebra generated by two finite-order unitaries, preprint.
5. M.J.Crabb, J. London Math. Soc., 2(1970), 741-745.
6. M.J.Crabb and P.G.Spain, Glasgow Math. J., 18(1977), 197-198.
7. J.Cuntz, Commun. math. Phys., 57(1977), 173-185.
8. C.Davis, Acta Sci. Math. Szeged, 19(1958), 172-187.
9. C.R.DePrima and B.K.Richard, Ind. Univ. Math. J., 23 (1973), 163-172.
10. P.G.Dixon, Proc. Edinburgh Math. Soc., 20(1976/7), 215-217.
11. R.G.Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York and London, 1972.
12. E.G.Effros, Aspects of non-commutative geometry, Preprint.
13. G.A.Fraser, Proc. Edinburgh Math. Soc., 20(1976/7), 121-131; 355-360.
14. J.G.Glimm, Ann. of Math., 72(1960), 216-244.
15. P.R.Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, Princeton, 1967.
16. H.Halpern, Trans. Amer. Math. Soc., 140(1969), 195-221.

17. H.Halpern, Math. Scand., 42(1978), 135-149.
18. B.E.Johnson, Mem. Amer. Math. Soc., 127(1972).
19. B.E.Johnson and J.P.Williams, Pacific J. Math., 58(1975), 105-122.
20. Y.Kato, Some structures of the Banach algebras over C^* -algebras, 作成中
21. Y.Kato, Some theorems on projections of C^* -algebras, 作成中
22. Y.Kato, Math. Japon., 21(1976), 367-370.
23. G.Lumer, Trans. Amer. Math. Soc., 100(1961), 29-43.
24. M.D.MacLaren, Trans. Amer. Math. Soc., 114(1965), 401-416.
25. F.Maeda and S.Maeda, Theory of Symmetric Lattices, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1970.
26. I.S.Murphy, J. London Math. Soc., 6(1973), 427-428.
27. T.Okayasu, 関数解析学とその応用, アブストラクト集, (1978), 17-19.
28. A.L.T.Paterson and A.M.Sinclair, J. London Math. Soc., 6(1972), 755-761.
29. C.E.Rickart, General Theory of Banach Algebras, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.
30. S.Sakai, C^* -Algebras and W^* -Algebras, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1971.
31. A.M.Sinclair, Proc. Amer. Math. Soc., 24(1970), 209-214.
32. A.M.Sinclair, Proc. London Math. Soc., 24(1972), 681-691.
33. M.K.Smith, Michigan Math. J., 23(1976), 151-153.
34. E.Størmer, Regular abelian Banach algebras of linear maps of operator algebras, preprint.
35. B.Sz.-Nagy, Comm. Math. Helv., 19(1946/7), 347-366.
36. D.Voiculescu, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 21(1976), 97-113.
37. L.Zsidó, Proc. Amer. Math. soc., 38(1973), 147-150.