

On sectional curvature of Boggino-Damek-Ricci type spaces

大阪大学理学研究科数学専攻 D1
宇野 公貴 (Masataka Uno)

1 Introduction

Boggino [B] は, Heisenberg type の Lie 環のある種の一次元拡張が定める単連結可解 Lie 群が, 非正の断面曲率をもつ Einstein 多様体であることを示した. これらの空間は, rank one の非コンパクト型対称空間を含んでおり, 現在, Damek-Ricci space と呼ばれている. 更に, 多くの非正の断面曲率をもつ Einstein 多様体を見つけるために, Damek-Ricci space を一般化した可解 Lie 群のあるクラスを考える. 即ち, $\{\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}}\}$ を正定値内積をもつ 2-step nilpotent Lie 環とし, $\mathfrak{a}$ を一次元のベクトル空間, A を $\mathfrak{a}$ の零でないベクトルとする. $\mathfrak{n}$ の中心を $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ の $\mathfrak{n}$ における直交補空間を $\mathfrak{v}$ と書く. $k \in \mathbb{R}^+$ に対して, $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{n}$ 上の表現 f を

$$f(A)V = \frac{k}{2}V \quad f(A)Z = kZ \quad \text{for all } V \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z}$$

で定める. f により $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{n}$ 上 derivation として作用するので, $\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{a}$ の半直積 $\mathfrak{s}_k(A; \mathfrak{n}) := \mathfrak{n} \rtimes_f \mathfrak{a}$ は可解 Lie 環となる. $\mathfrak{a}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{a}}$ を $\langle A, A \rangle_{\mathfrak{a}} = 1$ で定め, $\mathfrak{s}_k(A; \mathfrak{n})$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{a}}$ と $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}}$ の直和で定める. このようにして得られた正定値内積をもつ可解 Lie 環 $\{\mathfrak{s}_k(A; \mathfrak{n}), \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ が定める単連結可解 Lie 群 $S_k(A; \mathfrak{n})$ とその上の左不変計量 g の組 $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ を Boggino-Damek-Ricci type space (略して, BDR-type space) という. ここで, BDR type space に非正の断面曲率をもつ Einstein 計量が存在するかという問題があり, 森 [M], 山田 [Y] 等によって研究されている. この問題の解決には, BDR-type space が非正の断面曲率をもつ条件を知ることが重要である. 今回の目的は, BDR-type space の断面曲率が非正になる最小の k の値を定めることで, 特に, BDR-type space の nilpotent part が階段型の Lie 環の場合について調べた. 即ち,

$$\begin{pmatrix} 0 & A & C \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(但し, A, B, C は, それぞれ $n \times m, m \times l, n \times l$ 実行列) 型の実行列全体がつくる $(nm + ml + nl)$ 次元の 2-step nilpotent Lie 環を $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})$ と書き, 実階段型の Lie 環ということにする. また, この型の行列の成分を複素数にして得られる $2(nm + ml + nl)$ 次元の 2-step nilpotent Lie 環を $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})$ と書き, 複素階段型の Lie 環ということにする. これらは, Heisenberg type でない Lie 環であるが, これらを nilpotent part にもつ BDR-type space について次の定理を得た.

Theorem 3.2 $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})), g\}$ が非正 (負) の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($k > \frac{1}{\sqrt{2}}$) である.

Theorem 4.3 $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})), g\}$ が非正 (負) の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \geq 1$ ($k > 1$) である.

§2 では, BDR-type space の断面曲率を計算する.

§3 では, Wolter [W] が証明した次の定理

Theorem 3.1 (Wolter) $\mathfrak{n}_1^m$ を $2m + 1$ 次元の Heisenberg algebra とする. このとき $\{S_k(A; \mathfrak{n}_1^m), g\}$ が非正 (負) の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($k > \frac{1}{\sqrt{2}}$) である.

を紹介し, この定理が, 定理 3.2 の特別な場合であることを注意する. また, 定理 3.2 の証明も与える.

§4 では, Boggino の定理 (即ち, BDR-type space は, 非正の断面曲率をもつ.) の一般化として, 次の定理を与える.

Theorem 4.2 $\mathfrak{n}$ が $|J_Z V| \leq |Z||V|$ for all $V \in \mathfrak{v}$ and $Z \in \mathfrak{z}$ を満たすならば, $k \geq 1$ に対して, BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ は非正の断面曲率をもつ.

また, $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})), g\}$ は, 定理 4.2 の仮定を満たす例であることを指摘しておく.

2 Boggino-Damek-Ricci type spaces

繰り返しになるが, BDR-type space の定義から始める.

Definition 2.1. 正定値内積をもつ可解 Lie 環 $\{\mathfrak{s}_k(A; \mathfrak{n}), \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ が定める単連結可解 Lie 群 $S_k(A; \mathfrak{n})$ とその上の左不変計量 g の組 $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ を Boggino-Damek-Ricci type space (略して, BDR-type space) という.

線形写像 $J : \mathfrak{z} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{v})$ を

$$\langle J_Z V_1, V_2 \rangle = \langle Z, [V_1, V_2] \rangle \quad \text{for all } V_1, V_2 \in \mathfrak{v} \text{ and } Z \in \mathfrak{z}$$

で定義する. 定義より明らかに, J_Z は skew-symmetric である. また, 線形写像 J は 2-step nilpotent Lie 環 $\mathfrak{n}$ を特徴付けている.

Definition 2.2. 正定値内積をもつ 2-step nilpotent Lie 環が Heisenberg type であるとは, J が

$$J_Z^2 = -|Z|^2 id \quad \text{for all } Z \text{ in } \mathfrak{z}$$

を満たすときをいう.

Definition 2.3. $\mathfrak{n}$ が Heisenberg type の Lie 環で, $k = 1$ の BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ を Damek-Ricci space という.

$\mathfrak{n}$ が Heisenberg type のときには, 次のような性質がある.

Lemma 2.4. $V, V' \in \mathfrak{v}$, $Z, Z' \in \mathfrak{z}$ に対して, 次が成り立つ.

- (i) $\ker(ad_V)^\perp = J_Z V$.
- (ii) $|V| = 1$ ならば, ad_V は $\ker(ad_V)^\perp$ から $\mathfrak{z}$ への線形同型写像である.
- (iii) $|J_Z V| = |V||Z|$.
- (iv) $\langle J_Z V, J_Z V' \rangle = |Z|^2 \langle V, V' \rangle$.
- (v) $\langle J_Z V, J_{Z'} V \rangle = |V|^2 \langle Z, Z' \rangle$.
- (vi) $[V, J_Z V] = |V|^2 Z$.
- (vii) $J_Z J_{Z'} + J_{Z'} J_Z = -2 \langle Z, Z' \rangle$.

証明は, [CDKR, 3-4] を見よ.

BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ の Levi-Cevita 接続 ∇ と断面曲率 κ_k は J を用いて次のように表せる.

Lemma 2.5. (i) $V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$, $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1+Z_1+r_1A}(V_2+Z_2+r_2A) &= -\frac{1}{2}J_{Z_1}V_2 - \frac{1}{2}J_{Z_2}V_1 - \frac{1}{2}kr_2V_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}[V_1, V_2] - kr_2Z_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}k\langle V_1, V_2 \rangle A + k\langle Z_1, Z_2 \rangle A. \end{aligned}$$

(ii) 正規直交ベクトル $X_1 = V_1 + Z_1 + rA$, $X_2 = V_2 + Z_2$ ($V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$, $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$, $r \in \mathbb{R}$) で張られる二次元平面 π の断面曲率 $\kappa_k(\pi)$ は、次で与えられる.

$$\begin{aligned}\kappa_k(\pi) = & -\frac{3}{4}|[V_1, V_2] + krZ_2|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|V_2|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|Z_2|^2 \\ & + \frac{1}{4}|J_{Z_1}V_2|^2 + \frac{1}{4}|J_{Z_2}V_1|^2 - \langle J_{Z_1}V_1, J_{Z_2}V_2 \rangle + \frac{1}{2}\langle J_{Z_1}V_2, J_{Z_2}V_1 \rangle \\ & - k^2\left(\frac{1}{2}|Z_1|^2|V_2|^2 + \frac{1}{2}|Z_2|^2|V_1|^2 + \frac{1}{4}|V_1|^2|V_2|^2 + |Z_1|^2|Z_2|^2\right. \\ & \left. - \langle V_1, V_2 \rangle \langle Z_1, Z_2 \rangle - \frac{1}{4}\langle V_1, V_2 \rangle^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2\right).\end{aligned}$$

Proof. (i) $X, Y, W \in \{\mathfrak{s}_k(A; \mathfrak{n}), \langle, \rangle\}$ を BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ の左不変ベクトル場と思うと,

$$2\langle \nabla_X Y, W \rangle = \langle [X, Y], W \rangle - \langle [Y, W], X \rangle - \langle [X, W], Y \rangle$$

が成り立つ. 従って, 簡単な計算により

$$\begin{aligned}\nabla_{V_1+Z_1+r_1A}(V_2+Z_2+r_2A) = & -\frac{1}{2}J_{Z_1}V_2 - \frac{1}{2}J_{Z_2}V_1 - \frac{1}{2}kr_2V_1 \\ & + \frac{1}{2}[V_1, V_2] - kr_2Z_1 \\ & + \frac{1}{2}k\langle V_1, V_2 \rangle A + k\langle Z_1, Z_2 \rangle A\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる.

(ii) R を BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ の Riemannian 曲率テンソルとする.

$$\begin{aligned}\kappa_k(\pi) = & \langle R(X_1, X_2)(X_2), X_1 \rangle \\ = & \langle \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_2 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_2 - \nabla_{[X_1, X_2]}X_2, X_1 \rangle \\ = & |\nabla_{X_1}X_2|^2 - \langle \nabla_{X_1}X_1, \nabla_{X_2}X_2 \rangle - \langle [X_2, [X_1, X_2]], X_1 \rangle - |[X_1, X_2]|^2\end{aligned}$$

が成り立つ。よって, Lemma 2.5(i) より,

$$\begin{aligned}
\kappa_k(\pi) &= \left| -\frac{1}{2}J_{Z_1}V_2 - \frac{1}{2}J_{Z_2}V_1 + \frac{1}{2}[V_1, V_2] + \left(\frac{1}{2}k\langle V_1, V_2 \rangle + k\langle Z_1, Z_2 \rangle \right) A \right|^2 \\
&\quad - \left\langle -J_{Z_1}V_1 - \frac{1}{2}krV_1, -J_{Z_2}V_2 \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \left(\frac{1}{2}k|V_1|^2 + k|Z_1|^2 \right) A, \left(\frac{1}{2}k|V_2|^2 + k|Z_2|^2 \right) A \right\rangle \\
&\quad - \left| \frac{1}{2}krV_2 + [V_1, V_2] + krZ_2 \right|^2 \\
&= \frac{1}{4}|J_{Z_1}V_2|^2 + \frac{1}{4}|J_{Z_2}V_1|^2 - \langle J_{Z_1}V_1, J_{Z_2}V_2 \rangle + \frac{1}{2}\langle J_{Z_1}V_2, J_{Z_2}V_1 \rangle \\
&\quad - k^2\left(\frac{1}{2}|Z_1|^2|V_2|^2 + \frac{1}{2}|Z_2|^2|V_1|^2 + \frac{1}{4}|V_1|^2|V_2|^2 + |Z_1|^2|Z_2|^2 \right) \\
&\quad - \langle V_1, V_2 \rangle \langle Z_1, Z_2 \rangle - \frac{1}{4}\langle V_1, V_2 \rangle^2 - \langle Z_1, Z_2 \rangle^2 \\
&\quad - \frac{3}{4}|[V_1, V_2] + krZ_2|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|V_2|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|Z_2|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ.

□

3 Wolter の定理とその一般化

実階段型の Lie 環 $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})$ を考える.

$$\begin{aligned}
S := \{ & (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n+m, n+1 \leq j \leq n+m+l, \\
& 1 \leq i \leq n \Rightarrow n+1 \leq j \leq n+m+l, \\
& n+1 \leq i \leq n+m \Rightarrow n+m+1 \leq j \leq n+m+l \}
\end{aligned}$$

とし, $E_{i,j}$ を行列単位とする. このとき $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m, n+m+1 \leq k \leq n+m+l$ に対して,

$$[E_{i,j}, E_{j,k}] = -[E_{j,k}, E_{i,j}] = E_{i,k}$$

が成り立つ. $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})$ 上に $\{E_{i,j}\}_{(i,j) \in S}$ が正規直交基底となるように正定値内積を入れる.

Wolter [W] は次の定理を証明した.

Theorem 3.1 (Wolter). $\mathfrak{n}_1^m$ を $2m+1$ 次元の Heisenberg algebra とする. このとき $\{S_k(A; \mathfrak{n}_1^m), g\}$ が非正 (負) の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \geq 1/\sqrt{2}$ ($k > 1/\sqrt{2}$) である.

$2m+1$ 次元の Heisenberg algebra は, Lie 環 $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})$ のクラスに含まれていることを注意しておく. 実際, $\mathfrak{n}(1, m, 1; \mathbb{R})$ は $2m+1$ 次元の Heisenberg algebra である.

Theorem 3.2. $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})), g\}$ が非正 (負) の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \geq 1/\sqrt{2}$ ($k > 1/\sqrt{2}$) である.

Proof. $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m, n+m+1 \leq k \leq n+m+l$ に対して,

$$J_{E_{i,k}} E_{i,j} = E_{j,k} \quad J_{E_{i,k}} E_{j,k} = -E_{i,j}.$$

が成り立つ.

Lemma 2.5(ii) より, 正規直交ベクトル $U + X + rA, V + Y$ ($U, V \in \mathfrak{v}, X, Y \in \mathfrak{z}, r \in \mathbb{R}$) で張られる二次元平面 π の断面曲率 $\kappa_k(\pi)$ は, 次で与えられる.

$$\begin{aligned} \kappa_k(\pi) = & -\frac{3}{4}|[U, V] + krY|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|V|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|Y|^2 \\ & + \frac{1}{4}|J_Y U|^2 - \frac{1}{4}|U|^2|Y|^2 + \frac{1}{4}|J_X V|^2 - \frac{1}{4}|X|^2|V|^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2}\langle J_X U, J_Y V \rangle + \frac{1}{2}\langle U, V \rangle \langle X, Y \rangle \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{2}(\langle J_X V, J_Y U \rangle - \langle J_X U, J_Y V \rangle) \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}|U|^2|V|^2 - \frac{1}{4}\langle U, V \rangle^2 + |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2\right) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & -(k^2 - \frac{1}{2})\left(\frac{1}{2}|U|^2|Y|^2 + \frac{1}{2}|V|^2|X|^2 - \langle U, V \rangle \langle X, Y \rangle\right) \\ & + \frac{1}{4}|U|^2|V|^2 + |X|^2|Y|^2 - \frac{1}{4}\langle U, V \rangle^2 - \langle X, Y \rangle^2. \end{aligned}$$

X, Y, U, V を正規直交基底 $\{E_{i,j}\}_{(i,j) \in S}$ に関する一次結合で表示して, 計算することにより, $(1) + (2) \leq 0$ が成り立つことがわかる. また,

$$\langle J_X V, J_Y U \rangle - \langle J_X U, J_Y V \rangle \leq |X||Y||U||V|$$

も示せる. $V = \alpha U + W, Y = \beta X + Z$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, W \in \mathfrak{v}$ with $\langle U, W \rangle = 0, Z \in \mathfrak{z}$ with $\langle X, Z \rangle = 0$) と表されているとする. このとき,

$$\begin{aligned} (3) + (4) &= \frac{1}{2}(\langle J_X W, J_Z U \rangle - \langle J_X U, J_Z W \rangle) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}|U|^2|W|^2 + |X|^2|Z|^2\right) \\ &\leq \frac{1}{2}|X||Z||U||W| - \frac{1}{8}|U|^2|W|^2 - \frac{1}{2}|X|^2|Z|^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|U||W| - |X||Z|\right)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

以上より, $k \geq 1/\sqrt{2}$ に対して, $\kappa_k(\pi) \leq 0$ が成り立つことがわかる.
次に, $k > 1/\sqrt{2}$ に対して, $\kappa_k(\pi) < 0$ を示したい.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}|U|^2|Y|^2 + \frac{1}{2}|V|^2|X|^2 - \langle U, V \rangle \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4}|U|^2|V|^2 + |X|^2|Y|^2 - \frac{1}{4}\langle U, V \rangle^2 - \langle X, Y \rangle^2 \end{aligned}$$

となるのは, $U+X+rA$ と $V+Y$ が正規直交ベクトルであることより, $U=0$, $X=0$, $r=1$ のときである. このとき, $r^2|Y|^2 \neq 0$ 又は $r^2|V|^2 \neq 0$ なので, $k > 1/\sqrt{2}$ に対して, $\kappa_k(\pi) < 0$ が成り立つ.

正規直交ベクトル $E_{1,n+1}, E_{1,n+m+1}$ で張られる二次元平面 σ を考える. この平面の断面曲率は

$$\kappa_k(\sigma) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - k^2\right)$$

で与えられる.

以上より定理 3.2 は証明できた. □

4 Boggino の定理とその一般化

Theorem 4.1 (Boggino). Damek-Ricci space は非正の断面曲率をもつ.

この定理は, 次の定理の特別な場合として得られる.

Theorem 4.2. $\mathfrak{n}$ が $|J_Z V| \leq |Z||V|$ for all $V \in \mathfrak{v}$ and $Z \in \mathfrak{z}$ を満たすならば, $k \geq 1$ に対して, spaces of BDR-type $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ は非正の断面曲率をもつ.

Proof. Lemma 2.5(ii) より正規直交ベクトル $U+X+rA, V+Y$ ($U, V \in \mathfrak{v}, X, Y \in \mathfrak{z}, r \in \mathbb{R}$) で張られる二次元平面 π の断面曲率 $\kappa_k(\pi)$ は, 次で与え

られる.

$$\begin{aligned} \kappa_k(\pi) = & -\frac{3}{4}|[U, V] + krY|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|V|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|Y|^2 \\ & - \frac{1}{4}(|U|^2|Y|^2 - |J_Y U|^2) - \frac{1}{4}(|V|^2|X|^2 - |J_X V|^2) \end{aligned} \quad (5)$$

$$- \frac{1}{4}|U|^2|Y|^2 - \frac{1}{4}|V|^2|X|^2 - \frac{1}{2}\langle J_X U, J_Y V \rangle \quad (6)$$

$$- \frac{1}{4}|U|^2|V|^2 + \frac{1}{4}\langle U, V \rangle^2 - |X|^2|Y|^2 + \langle X, Y \rangle^2 \quad (7)$$

$$- \frac{1}{2}\langle J_X U, J_Y V \rangle + \frac{1}{2}\langle J_X V, J_Y U \rangle \quad (8)$$

$$+ \langle U, V \rangle \langle X, Y \rangle \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & - (k^2 - 1)\left(\frac{1}{2}|U|^2|Y|^2 + \frac{1}{2}|V|^2|X|^2 - \langle U, V \rangle \langle X, Y \rangle\right) \\ & + \frac{1}{4}|U|^2|V|^2 - \frac{1}{4}\langle U, V \rangle^2 + |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2. \end{aligned}$$

$|J_Z V| \leq |Z||V|$ for $V \in \mathfrak{v}$, $Z \in \mathfrak{z}$ という仮定より,

$$(5) \leq 0,$$

$$\begin{aligned} (6) & \leq -\frac{1}{4}|U|^2|Y|^2 - \frac{1}{4}|V|^2|X|^2 + \frac{1}{2}|X||U||Y||V| \\ & = -\frac{1}{4}(|U||Y| - |V||X|)^2 \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. $V = \alpha U + W$, $Y = \beta X + Z$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $W \in \mathfrak{v}$ with $\langle U, W \rangle = 0$, $Z \in \mathfrak{z}$ with $\langle X, Z \rangle = 0$) と表されているとする. このとき,

$$\begin{aligned} (7) + (8) & = -\frac{1}{4}|U|^2|W|^2 - |X|^2|Z|^2 - \frac{1}{2}\langle J_X U, J_Z W \rangle + \frac{1}{2}\langle J_X W, J_Z U \rangle \\ & \leq -\frac{1}{4}|U|^2|W|^2 - |X|^2|Z|^2 + |X||Z||U||W| \\ & = -\left(\frac{1}{2}|U||W| - |X||Z|\right)^2 \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. $U + X + rA$, $V + Y$ は正規直交ベクトルより,

$$(9) = -\langle X, Y \rangle^2 \leq 0$$

が成り立つ.

以上より, $k \geq 1$ に対して, $\kappa_k(\pi) \leq 0$ が成り立つ. □

複素階段型の Lie 環 $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})$ を考える. $E_{i,j}$ を行列単位とし, $F_{i,j} := \sqrt{-1}E_{i,j}$ とする. このとき $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m, n+m+1 \leq k \leq n+m+l$ に対して,

$$\begin{aligned} [E_{i,j}, E_{j,k}] &= -[E_{j,k}, E_{i,j}] = E_{i,k}, \\ [E_{i,j}, F_{j,k}] &= -[F_{j,k}, E_{i,j}] = F_{i,k}, \\ [F_{i,j}, E_{j,k}] &= -[E_{j,k}, F_{i,j}] = F_{i,k}, \\ [F_{i,j}, F_{j,k}] &= -[F_{j,k}, F_{i,j}] = -E_{i,k} \end{aligned}$$

が成り立つ. $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})$ 上に $\{E_{i,j}, F_{i,j}\}_{(i,j) \in S}$ が, 正規直交基底となるように正定値内積を入れる.

Theorem 4.3. $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})), g\}$ が非正 (負) の断面曲率をもつ必要十分条件は, $k \geq 1$ ($k > 1$) である.

Proof. $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m, n+m+1 \leq k \leq n+m+l$ に対して,

$$\begin{aligned} J_{E_{i,k}} E_{i,j} &= E_{j,k}, J_{E_{i,k}} E_{j,k} = -E_{i,j}, \\ J_{E_{i,k}} F_{i,j} &= F_{j,k}, J_{E_{i,k}} F_{j,k} = -F_{i,j}, \\ J_{F_{i,k}} E_{i,j} &= F_{j,k}, J_{F_{i,k}} F_{j,k} = -E_{i,j}, \\ J_{F_{i,k}} F_{i,j} &= E_{j,k}, J_{F_{i,k}} E_{j,k} = -F_{i,j} \end{aligned}$$

が成り立つ. X, Y, U, V を正規直交基底 $\{E_{i,j}, F_{i,j}\}_{(i,j) \in S}$ に関する一次結合で表示して, 計算することにより,

$$|J_Z V| \leq |Z||V| \quad \text{for } V \in \mathfrak{v} \text{ and } Z \in \mathfrak{z} \quad (10)$$

が成り立つことがわかる. よって, (10) と定理 4.2 より, $k \leq 1$ に対して, BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})), g\}$ は, 非正の断面曲率をもつことがわかる.

また, 定理 3.2 の場合と同様にして, $k > 1$ に対して, BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})), g\}$ は, 負の断面曲率をもつことも示せる.

正規直交ベクトル $\sqrt{2}/\sqrt{3}E_{1,n+1+1}/\sqrt{3}E_{1,n+m+1}, \sqrt{2}/\sqrt{3}F_{1,n+1+1}/\sqrt{3}F_{1,n+m+1}$ で張られる二次元平面 σ を考える. この平面の断面曲率は

$$\kappa_k(\sigma) = \frac{4}{9}(1 - k^2).$$

で与えられる.

以上より定理 4.3 は証明できた.

□

References

- [BTV] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke: *Generalized Heisenberg Groups and Damek-Ricci Harmonic Spaces*. Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [B] J. Boggino: *Generalized Heisenberg groups and solvmanifolds naturally associated*. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **43** (1985), 529–547.
- [CDKR] M. Cowling, A. H. Dooley, A. Koranyi, F. Ricci: *H-type groups and Iwasawa decompositions*. Adv. in Math. **87** (1991), 1–41.
- [H] E. Heintze: *On homogeneous manifolds of negative curvature*. Math. Ann. **211** (1974), 23–34.
- [L] M. Lanzendorf: *Einstein metrics with nonpositive Sectional curvature on extentions of Lie algebras of Heisenberg type*. Geometriae Dedicata **66** (1997), 187–202.
- [M] K. Mori: *Einstein metrics on B.D.R.type solvable groups*. Preprint.
- [U] M. Uno: *On Boggino-Damek-Ricci type spaces with non-positive sectional curvature*. Master thesis, Osaka university (1998), in Japanese.
- [W] T. Wolter: *Einstein metrics on solvable groups*. Math. Z. **206** (1991), 457–471.
- [Y] K. Yamada: *Einstein metrics on certain solvable groups*. Master thesis, Osaka university (1996), in Japanese.