

集合値写像と順序単調性を持つスカラー化関数 との合成関数の凸性について (Convexity properties for compositions of set-valued map and monotone scalarizing function)

小林尚吾 (Shogo Kobayashi), 斉藤裕 (Yutaka Saito), 田中環 (Tamaki Tanaka)
新潟大学大学院自然科学研究科
(Graduate School of Science and Technology, Niigata University)

概要

本研究では、集合値写像と順序単調性をもつスカラー化関数との合成関数の凸性について考察している。

1 はじめに

順序単調性を持つスカラー化関数としては $I_{k,V}^{(j)}$, $S_{k,V}^{(j)}$ が挙げられる ([2] を参照)。順序単調性とは, set-relation([1] を参照) を保存することである。すなわち, $A \leq_K^{(j)} B$ ならば $I_{k,V}^{(j)}(A) \leq I_{k,V}^{(j)}(B)$, $S_{k,V}^{(j)}(A) \leq S_{k,V}^{(j)}(B)$ が成立することである。また, $I_{k,V}^{(j)}$, $S_{k,V}^{(j)}$ は集合値写像の性質を受け継ぐことが知られている ([2] を参照)。つまり, F がある性質を持つとき, $I_{k,V}^{(j)} \circ F$, $S_{k,V}^{(j)} \circ F$ は同様の性質を持つことである。本稿では, 合成関数の凸性について一般的な結果を報告する。

2 準備

本研究では, X を実ベクトル空間, Y を実線形位相空間で以下のような空でない凸錐 K による順序を持つとする。

$$x \leq_K y \text{ if } y - x \in K \text{ for } x, y \in Y$$

通常, 2 つの集合 $A, B \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ の和は $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ と定義し, 集合 $A \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ の実数 α によるスカラー倍は $\alpha A := \{\alpha a \mid a \in A\}$ と定義する。

定義 2.1 ([1]). 集合 $A, B \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ に対して, 以下の 6 つの関係 (set-relation) を定義する。

1. $A \leq_K^{(1)} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset \bigcap_{b \in B} (b - K) (\Leftrightarrow B \subset \bigcap_{a \in A} (a + K))$
2. $A \leq_K^{(2)} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \cap (\bigcap_{b \in B} (b - K)) \neq \emptyset$
3. $A \leq_K^{(3)} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + K$
4. $A \leq_K^{(4)} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\bigcap_{a \in A} (a + K)) \cap B \neq \emptyset$

$$5. A \leq_K^{(5)} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset (B - K)$$

$$6. A \leq_K^{(6)} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \cap (B - K) \neq \emptyset (\Leftrightarrow (A + K) \cap B \neq \emptyset)$$

本研究では, 集合値写像 $F: X \rightarrow 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ に対して次の5種類の凸性を定義する。

定義 2.2 ([1]). 任意の $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in (0, 1)$ に対して, まず3つの凸性を定義する。 $j = 1, \dots, 6$ に対して,

(1) F が $\text{type } (j) \text{ } K\text{-convex function}$ とは以下が成り立つことである。

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_K^{(j)} \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2)$$

(2) F が $\text{type } (j) \text{ properly quasi } K\text{-convex function}$ とは以下が成り立つことである。

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_K^{(j)} F(x_1) \quad \text{又は} \quad F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_K^{(j)} F(x_2)$$

(3) F が $\text{type } (j) \text{ naturally quasi } K\text{-convex function}$ とは以下が成り立つことである。

$$\exists \mu \in [0, 1] \quad \text{such that} \quad F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_K^{(j)} \mu F(x_1) + (1 - \mu)F(x_2)$$

次に, $j = 1, \dots, 3$ に対して, 以下の2つの凸性を定義する。

(4) F が $\text{type } (j)\text{-lower quasiconvex function}$ とは以下が成り立つことである。

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_K^{(j)} (F(x_1) + K) \cap (F(x_2) + K)$$

(5) F が $\text{type } (j)\text{-upper quasiconvex function}$ とは以下が成り立つことである。

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_K^{(j)} \left(\bigcap_{y_1 \in F(x_1)} (y_1 + K) \right) \cap \left(\bigcap_{y_2 \in F(x_2)} (y_2 + K) \right)$$

注意 2.1. 上記の凸性には次のような関係がある。 $j = 1, \dots, 6$ に対して, $(1) \Rightarrow (3)$, $(2) \Rightarrow (3)$, $j = 3$ の場合のみ $(3) \Rightarrow (4)$ であり, $(3)j = 6 \Rightarrow (5)j = 2$ である ([1] を参照)。

この凸性の双対的な概念として凹性を定義する。

定義 2.3. 任意の $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in (0, 1)$ に対して, まず3つの凹性を定義する ([2])。 $j = 1, \dots, 6$ に対して,

(1) F が $\text{type } (j) \text{ } K\text{-concave function}$ とは以下が成り立つことである。

$$\lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

(2) F が $\text{type } (j) \text{ properly quasi } K\text{-concave function}$ とは以下が成り立つことである。

$$F(x_1) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \quad \text{又は} \quad F(x_2) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

(3) F が $\text{type } (j) \text{ naturally quasi } K\text{-concave function}$ とは以下が成り立つことである。

$$\exists \mu \in [0, 1] \quad \text{such that} \quad \mu F(x_1) + (1 - \mu)F(x_2) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

次に, $j = 1, \dots, 3$ に対して以下を定義する。

(4) F が $\text{type } (j)\text{-lower quasiconcave function}$ とは以下が成り立つことである。

$$(F(x_1) - K) \cap (F(x_2) - K) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

(5) F が $\text{type } (j)\text{-upper quasiconcave function}$ とは以下が成り立つことである。

$$\left(\bigcap_{y_1 \in F(x_1)} (y_1 - K) \right) \cap \left(\bigcap_{y_2 \in F(x_2)} (y_2 - K) \right) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

注意 2.2. 凹性には凸性と同様に次のような関係がある。 $j = 1, \dots, 6$ に対して, $(1) \Rightarrow (3)$, $(2) \Rightarrow (3)$ である。 $j = 5$ の場合のみ $(3) \Rightarrow (4)$ であり、 $(3)j = 6 \Rightarrow (5)j = 4$ である。

定義 2.4 ([2]). $V, V' \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$, $k \in \text{int } K$ とする。 $j = 1, \dots, 6$ に対してスカラー化関数 $I_{k,V}^{(j)}$, $S_{k,V}^{(j)} : 2^Y \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ を定義する。

$$I_{k,V}^{(j)}(V') := \inf \{t \in \mathbf{R} \mid V' \leq_K^{(j)} (tk + V)\}, S_{k,V}^{(j)}(V') := \sup \{t \in \mathbf{R} \mid (tk + V) \leq_K^{(j)} V'\}$$

定義 2.5 (Yu (1974), [6]). $V \in Y \setminus \{\emptyset\}$ とする。 V が $K\text{-convex}$ であるとは, $V + K$ が凸集合になることである。

ここで ψ を拡張実数値関数 $2^Y \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ とする。

定義 2.6. $\mathcal{A} \subset 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ が凸であるとは, 任意の $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $\lambda \in (0, 1)$, に対して, $\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 \in \mathcal{A}$ が成り立つことである。

定義 2.7. ψ が凸関数 (凹関数) であるとは, 任意の $A_1, A_2 \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$, $\lambda \in (0, 1)$, に対して,

$$\psi(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2) \leq (\geq) \lambda \psi(A_1) + (1 - \lambda)\psi(A_2)$$

が成り立つことである。

定義 2.8. ψ が準凸 (準凹) 関数であるとは任意の実数 α に対して, $\text{lev}(\psi, \leq (\geq), \alpha) := \{A \in 2^Y \setminus \{\emptyset\} \mid \psi(A) \leq (\geq) \alpha\}$ が凸であるときをいう。

命題 2.1. 空でない集合 V と $k \in \text{int } K$ に対して, 次が成り立つ。

1. $j = 1, \dots, 3$ に対して, $I_{k,V}^{(j)}$ は凸関数である。
2. $j = 4, \dots, 6$ に対して, V が $(-K)\text{-convex}$ ならば $I_{k,V}^{(j)}$ は凸関数である。

命題 2.2. 空でない集合 V と $k \in \text{int } K$ に対して, 次が成り立つ。

1. $j = 1, 4, 5$ に対して, $S_{k,V}^{(j)}$ は凹関数である。
2. $j = 2, 3, 6$ に対して, V が $K\text{-convex}$ ならば $S_{k,V}^{(j)}$ は凹関数である。

$I_{k,V}^{(5)}$ が実数を取る場合のみを証明する。他の場合も同様にすればよい。

証明 2.1. V を $(-K)\text{-convex}$ と仮定する。 $V'_1, V'_2 \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$, $\lambda \in (0, 1)$, $\alpha_1 := I_{k,V}^{(5)}(V'_1)$, $\alpha_2 := I_{k,V}^{(5)}(V'_2)$ とする。任意の $s > 0$ に対して,

$$V'_1 \subset (\alpha_1 + s)k + V - K, V'_2 \subset (\alpha_2 + s)k + V - K$$

である。\$V\$ は \$(-K)\$-convex であるから、

$$\begin{aligned}\lambda V_1' + (1-\lambda)V_2' &\subset \lambda\{(\alpha_1 + s)k + V - K\} + (1-\lambda)\{(\alpha_2 + s)k + V - K\} \\ &\Rightarrow \lambda V_1' + (1-\lambda)V_2' \subset (\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 + s)k + V - K\end{aligned}$$

が成立する。よって、

$$I_{k,V}^{(5)}(\lambda V_1' + (1-\lambda)V_2') \leq \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 + s$$

であり、任意の \$s > 0\$ であったから、

$$I_{k,V}^{(5)}(\lambda V_1' + (1-\lambda)V_2') \leq \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$$

定義 2.9. \$j = 1, \dots, 6\$ に対して、\$\psi\$ が \$2^Y \setminus \{\emptyset\}\$ 上で \$\le_K^{(j)}\$ に関して \$j\$-monotone であるとは、

$$A \le_K^{(j)} B \Rightarrow \psi(A) \le \psi(B).$$

と定義する。

3 集合値写像と順序単調性を持つスカラー化関数との合成関数の凸性

命題 2.1 と 2.2 より \$I_{k,V}^{(j)}\$, \$S_{k,V}^{(j)}\$ には凸性または凹性があり、さらに順序単調性がある。ここからは関数を一般化し、上記の 2 つの性質をもつ関数 \$\psi\$ と集合値写像 \$F\$ との合成関数の性質を述べる。

\$j = 1, \dots, 6\$ に対して、以下の結果が成り立つ。

$\psi \backslash F$		type (j) \$K\$-convex	type (j) naturally quasi \$K\$-convex
\$j\$-monotone	凸	凸	準凸
	準凸	準凸	準凸

表 1: \$\psi \circ F\$ の凸性

$\psi \backslash F$		type (j) \$K\$-concave	type (j) naturally quasi \$K\$-concave
\$j\$-monotone	凹	凹	準凹
	準凹	準凹	準凹

表 2: \$\psi \circ F\$ の凹性

$\psi \backslash F$		type (j) properly quasi \$K\$-convex	type (j) properly quasi \$K\$-concave
\$j\$-monotone		準凸	準凹

表 3: \$\psi \circ F\$ の凸性と凹性

注意 1 と 2 で述べたように \$j = 3, 5, 6\$ の場合は上記の表で扱っている凸性と type (j)-lower quasiconvex, type (j)-upper quasiconcave に関係があり、後者の方がより広い凸性であった、上記の表と

同様のことをそれらの場合に考えた時, 同じようには合成関数が凸 (凹) 性を持たない。以下に考える場合と例を示す。 $X := \mathbb{R}, Y := \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}_+^2, k := (1, 1)^T, V := [(0, 0)^T, (1, 1)^T]$ とする。

$\psi \backslash F$		type (3)-lower quasiconvex	$\psi \backslash F$		type (2)-upper quasiconvex
3-monotone	凸	例 3.1	2-monotone	凸	例 3.2
$\psi \backslash F$		type (5)-lower quasiconcave	$\psi \backslash F$		type (4)-upper quasiconcave
5-monotone	凹	例 3.3	4-monotone	凹	例 3.4

例 3.1. $\psi := I_{k,V}^{(3)}, D := \text{co} \{(1, 1)^T, (2, 1)^T\} \cup \text{co} \{(1, 1)^T, (1, 2)^T\}$ とする。

1. $F(x) := \begin{cases} D + (x-1, -x+1)^T & (x < 1) \\ D + (x-1, x-1)^T & (x \geq 1) \end{cases}$ とする。このとき, $I_{k,V}^{(3)} \circ F(x) = |x-1| + 1$ であるから, 合成関数は凸関数である。
2. $F(x) := \begin{cases} D + (x-1, x-1)^T & (x < 1) \\ D & (x \geq 1) \end{cases}$ とする。このとき, $I_{k,V}^{(3)} \circ F(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ であるから, 合成関数は凹関数である。

例 3.2. $\psi := I_{k,V}^{(2)}, D := \text{co} \{(1, 1)^T, (2, 1)^T\} \cup \text{co} \{(1, 1)^T, (1, 2)^T\}$ とする。

1. $F(x) := \begin{cases} D + (-2, -x)^T & (x < 0) \\ D + (x-2, x)^T & (x \geq 0) \end{cases}$ とする。このとき, $I_{k,V}^{(2)} \circ F(x) = |x| + 1$ であるから, 合成関数は凸関数である。
2. $F(x) := \begin{cases} D + (-2, x)^T & (x < 0) \\ D + (-2, 0)^T & (x \geq 0) \end{cases}$ とする。このとき, $I_{k,V}^{(2)} \circ F(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq -2) \\ x+1 & (-2 < x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ であるから, 合成関数は凹関数である。

例 3.3. $\psi := S_{k,V}^{(5)}, D := \text{co} \{(1, 1)^T, (0, 1)^T\} \cup \text{co} \{(1, 1)^T, (1, 0)^T\}$ とする。

1. $F(x) := \begin{cases} D & (x < 1) \\ D + (x-1, x-1)^T & (x \geq 1) \end{cases}$ とする。このとき, $S_{k,V}^{(5)} \circ F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ x-1 & (x \geq 1) \end{cases}$ であるから, 合成関数は凸関数である。
2. $F(x) := \begin{cases} D & (x < 1) \\ D + (-x+1, x-1)^T & (x \geq 1) \end{cases}$ とする。このとき, $S_{k,V}^{(5)} \circ F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ -x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$ であるから, 合成関数は凹関数である。

例 3.4. $\psi := S_{k,V}^{(4)}, D := \text{co} \{(1, 1)^T, (2, 1)^T\} \cup \text{co} \{(1, 1)^T, (1, 2)^T\}$ とする。

1. $F(x) := \begin{cases} D + (-2, 0)^T & (x < 0) \\ D + (x-2, x)^T & (x \geq 0) \end{cases}$ とする。このとき, $S_{k,V}^{(4)} \circ F(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ x-1 & (x \geq 0) \end{cases}$ であるから, 合成関数は凸関数である。
2. $F(x) := \begin{cases} D + (-2, 0)^T & (x < 0) \\ D + (-x-2, -x)^T & (x \geq 0) \end{cases}$ とする。このとき, $S_{k,V}^{(4)} \circ F(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ -x-1 & (x \geq 0) \end{cases}$ であるから, 合成関数は凹関数である。

参考文献

- [1] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha, *On convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1487–1496.
- [2] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing function for set-valued maps*, in “Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization,” S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp.193–204.
- [3] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequality*, J. Nonlinear and Convex Anal. **11** (2010), 513–525.
- [4] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Inherited properties of nonlinear scalarizing function for set-valued map*, in “Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis,” Yokohama Publishers, Yokohama, 2010, pp.161–177.
- [5] T. Kubo, T. Tanaka, and S. Yamada, *Ekeland’s variational principle set-valued maps via scalarization*, in “Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis,” Yokohama Publishers, Yokohama, 2012, pp.283–289.
- [6] P. L. Yu, *Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives*, J. Optim. Theory Appl. **14**(1974), 319–377.