

無 限 回 路 の R o y d e n 境 界

島 根 大 学 理 学 部 榎 野 尚

(Takashi Kayano)

§ 1 . 準 備 と Royden's algebra

$N = \{X, Y, K, r\}$ が無限回路であるとは, 次の条件を満たすことである.

(1) X は点 x の集合, Y は辺 y の集合, K は点 x と辺 y の結び付きを表す, $X \times Y$ 上の $\{\pm 1, 0\}$ を値域にとる函数, r は Y 上の抵抗を表す正值函数である.

(2) 任意の $y \in Y$ について

$$e(y) = \{x \in X; K(x, y) \neq 0\} \text{ とおけば, } e(y) = \{x_1, x_2\} \quad x_1 \neq x_2 \text{ で} \\ K(x_1, y)K(x_2, y) = -1.$$

(3) $\forall a \in X, \forall b \in X$ について, $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ と $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset Y$ で, 次の条件を満たすものがある,

$$a = x_0, b = x_n \text{ で } e(y_k) = \{x_{k-1}, x_k\} \quad (\text{連結条件}).$$

$L(X), L(Y)$ でそれぞれ, X 上と Y 上の函数全体の集合を表す.

$L_0(X), L^b(X)$ でそれぞれ, support有限な X 上の函数 ($f \in L(X); \text{supp}(f) = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ が有限集合) の全体と X 上有界な函数の全体を表す, $L_0(Y)$ と $L^b(Y)$ についても同様である.

$u \in L(X)$ について, Dirichlet 積分 $D(u)$ をつぎのように定義

する,

$$D(u) = \sum_{y \in Y} r(y)^{-1} \left| \sum_{x \in X} K(x, y) u(x) \right|^2.$$

Dirichlet 積分有限な函数の全体を $D(N)$ で表し,

$$BD(N) = D(N) \cap L^b(X) \quad \text{とおく.}$$

$u \in L(X)$ について,

$$du(y) = \sum_{x \in X} K(x, y) r(y)^{-1} u(x),$$

$$\Delta u(x) = - \sum_{y \in Y} K(x, y) du(y) \quad \text{とおく,}$$

$\Delta u(x) = 0$ のとき, u は x で調和であると言い,

X 上で $\Delta u = 0$ のとき, u を X 上の調和函数と言う.

$BD(N)$ 上に次の, 2 つの位相を導入する.

$$(1) \quad u \in BD(N) \text{ について, } \|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)| + (D(u))^{1/2}$$

で導入される位相を UD -位相という.

(2) $\{u_n\} \subset BD(N)$ が $u \in BD(N)$ に BD -位相で収束するとは

$\{u_n\}$ が一様有界,

$$\text{全ての } x \in X \text{ について } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n - u) = 0 \quad \text{であること.}$$

$L_0(X)$ の BD -位相における閉包を $BD_0(N)$ で表す.

$N' = \{X', Y', K', r'\}$ が N の部分回路であるとは N' がつぎの

条件を満たす回路である.

(1) $X' \subset X$, (2) $Y' = \{y \in Y; e(y) \subset X'\}$, (3) $X' \times Y'$ 上で

$$K' = K, \quad (4) \quad Y' \text{ 上で, } r' = r.$$

有限回路の列 $\{N_m\}$ が N の exhaustion であるとは次の条件をみたすことである。

$$(1) \quad X_m \subset X_{m+1}, \quad (2) \quad Y_{m+1} \supset \{y \in Y; e(y) \cap X_m \neq \emptyset\},$$

$$(3) \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m = X.$$

次の補題は明らかである。

補題 1 $BD(N)$ は algebra である。

次の重要な定理が [1] の III.1C. の Theorem と同様な方法で証明される。

定理 1 $\{u_n\}$ が $BD(N)$ の列で、 u が X 上の有界函数であるとする。その時、全ての $x \in X$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$ であり、 $\{D(u_n)\}$ が有界ならば、 $u \in BD(N)$ であり、次の条件を満たす $\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_k}\}$ が存在する、

$$\text{全ての } v \in BD(N) \text{ について、} D(u, v) = \lim_{k \rightarrow \infty} D(u_{n_k}, v).$$

定理 1 より $BD(N)$ が Banach algebra であることがえられる、従って、次の定理がえられる。

定理 2 (1) $BD(N)$ は UD-位相に関して Banach algebra である。

$$(2) \quad 1 \in BD(N)$$

$$(3) \quad BD(N) \text{ は } X \text{ の点を分離する。}$$

定理 3 X を稠密な開部分空間として含み、次の条件を満たす compact Hausdorff 空間 X^* が存在する：

任意の $u \in BD(N)$ について， u の X^* への拡大となる唯一つの連続関数 u^* が存在する．なお， X^* の存在は位相同型の意味で唯一つである．

X^* を X の Royden のコンパクト化と言い， $\Gamma = X^* - X$ を Royden 境界と言う． u と u^* は同一視して， u で表す．

$\Gamma = \{x \in X^*; u(x) = 0 \text{ for } \forall u \in L_0(X)\}$ であることは明らかである．

$BD_0(N)$ の完備性について，次の定理が得られる．

定理 4 $\{u_n\}$ が $BD_0(N)$ の列で， u が X 上の有界関数であるとする．その時，全ての $x \in X$ について， $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$ であり， $\{D(u_n)\}$ が有界ならば， $u \in BD_0(N)$ である．

系 $BD_0(N)$ は $BD(N)$ の閉イデアルである．

ここで， $\Gamma_0 = \{x \in X^*; u(x) = 0, \text{ for } \forall u \in BD_0(N)\}$ とおく．

$N' = \{X', Y', K', r'\}$ が回路 N の有限部分回路であるとき， $a \in X$ について， N' の a を pole とする調和グリーン関数 $g_a^{(N')}$ を次のように定義する．

(1) X' 上で， $\Delta g_a^{(N')}(x) = -\delta_a(x)$ ．ただし， δ はクロネッカーのデルタである．

(2) $X - X'$ 上で， $g_a^{(N')} = 0$ ．

N の exhaustion $\{N_n\}$ について， $a \in X$ を pole とする N_n の調和グリーン関数を g_a^n で表す． g_a^n は n についての単調増加

函数列である. $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^a$ は函数であるか, または恒等的に
 ∞ となる. また, このことは $a \in X$ の取りかたに関係しない.
 極限函数が恒等的に ∞ となるとき, 無限回路 N は放物的と
 言い, $N \in 0_0$ と表す. 極限函数が存在するとき, N を双
 曲的と言い, その極限函数を X 上の a を pole とする調和グリ
 ーン函数と言い, g_a で表す.

定理 5 次は同値である.

- (1) $N \in 0_0$,
- (2) $1 \in BD_0(N)$,
- (3) $BD_0(N) = BD(N)$,
- (4) $\Gamma_h = \emptyset$.

証明 (2), (3), (4) の同値性は $BD_0(N)$ が $BD(N)$ の閉イデアル
 であることより, 明らかである. (1) と (2) の同値性は [2]
 により簡単に得られる.

§ 2. 最大値の原理

$N' = \{X', Y', K', r'\}$ を無限回路 N の部分回路とする.

$\partial_{r'}(X') = \{y \in Y; e(y) \cap X' \neq \emptyset\} - Y'$ とおく.

$N' = \{X', Y', K', r'\}$ が $\partial_{r'}(X')$ に関する N' の double とは, 次の
 条件を満たすことである.

- (1) ρ_x を X' 上の, 値域 $\rho_x(X')$ が新しい点の集合である 1 対 1

の写像とし, $X' = X' \cup \rho_x(X')$ とする.

(2) ρ_y を $Y' \cup \rho_y(X')$ 上の, 値域が新しい辺の集合である 1 対 1 の写像とし, $Y' = Y' \cup \rho_y(Y' \cup \rho_y(X'))$ とする.

(3) $X' \times Y'$ 上では, $K'(x, y) = K(x, y)$,

$\rho_x(X') \times \rho_y(Y')$ 上では, $K'(\rho_x(x), \rho_y(y)) = K(x, y)$,

$x \in X', y \in \partial_x(X')$ のとき, $K'(x, \rho_y(y)) =$

$-K'(\rho_x(x), \rho_y(y)) = K(x, y)$, それ以外の (x, y) については

$K(x, y) = 0$.

(4) $y \in Y'$ のとき, $r'(y) = r'(\rho_y(y)) = r(y)$,

$y \in \partial_y(X')$ のとき, $r'(\rho_y(y)) = r(y)$.

以上のように double を定義すると, 次の定理が成立する.

定理 6 N' を $X' \cap \Gamma_n = \emptyset$ である N の部分回路とするならば, $N' \in 0_0$. ただし, X' は X' の X^* における閉包とする.

X の部分集合 A について, $\partial_x(A) \cup A$ を $[A]_x$ または $[A]$ で表す. $N' = \{X', Y', K', r'\}$ を N の無限部分回路とし,

$\{N_n = \{X_n, Y_n, K_n, r_n\}\}$ を N の exhaustion とする. u_n を $[X_n \cap X']$ 上の函数で, $X' \cap X_n$ 上で $\Delta u_n(x) = 0$,

$\partial_x(X' \cap X_n) \cap (X - X')$ 上では $u_n = 0$, $\partial_x(X' \cap X_n) \cap X'$ 上では $u_n(x) = 1$ であるとする. X' のすべての点 x で,

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$ となる N' の族を $SO_{HB}(N)$ で表す.

次のような補題を準備する.

補題 2 $N \in 0_G$ ならば, N の全ての無限部分回路 N' は $SO_{HB}(N)$ に含まれる.

より一般には, 次の補題が成立する.

補題 3 $X' \cap \Gamma_h = \emptyset$ ならば, N の全ての無限部分回路 N' は $SO_{HB}(N)$ に含まれる.

有界な調和函数について, 次のような最大値の原理が成立する.

定理 7 $N' = \{X', Y', K', r'\}$ を N の部分回路とし, u を $[X']$ 上の, 上に有界な, X' で調和な函数とする.

全ての $x \in X' \cap \Gamma_h$ について $\limsup_{x \in X', x \rightarrow x} u(x) \leq m$ と $\partial_x(X')$ 上で $u(x) \leq m$ が成立するならば 全ての $x \in X'$ について, $u(x) \leq m$ が成立する.

さらに, Dirichlet 積分有限な調和函数について, 次の重要な定理が成立する. A を X の部分集合とし, 函数 u の A 上の Dirichlet 積分 $D_A(u)$ を次のように定義する,

$$D_A(u) = \sum_{e(y) \subset A} r(y)^{-1} \left| \sum_{x \in X} K(x, y) u(x) \right|^2.$$

定理 8 $N' = \{X', Y', K', r'\}$ を N の部分回路とし, u を $D_{[X']}(u)$ が有限な $[X']$ 上の調和函数とする.

全ての $x \in X' \cap \Gamma_h$ について,

$$-\infty \leq a \leq \liminf_{x \in X', x \rightarrow x} u(x) \leq \limsup_{x \in X', x \rightarrow x} u(x) \leq b \leq \infty$$

かつ, 全ての $x \in \partial_x(X')$ について, $a \leq u(x) \leq b$ ならば,

すべての $x \in X'$ について $a \leq u(x) \leq b$ が成立する.

§ 3. Royden 境界上の G_0 集合

この節において, Riemann 面では Royden 境界上の点 x は一点集合 $\{x\}$ が非 G_0 集合であることで特長つけられているが集合 $\{x\}$ が G_0 集合である調和 Royden 境界上の点 x がある無限回路が存在することをしめす. 点 $x \in X$ については, 集合 $\{x\}$ は G_0 集合であることは明らかであるから, 集合 $\{x\}$ が非 G_0 集合ならば x は Royden 境界の点となる.

$x \in \Gamma - \Gamma_h$ ならば, Riemann 面と同様に $\{x\}$ は非 G_0 集合となる.

定理 9 $x \in \Gamma - \Gamma_h$ ならば, 集合 $\{x\}$ は非 G_0 集合である

Riemann 面の場合には任意な点 x を中心とし, x の任意の近旁に含まれる円環 A で, 十分大きな $\log \text{mod } A$ をとるものが存在することを利用して証明するが, 無限回路の場合では, $x \in \Gamma - \Gamma_h$ について, $0 \leq u \leq 1$ で $u(x)=1$ となる函数

$u \in BD_0(N)$ が存在することを用いて証明する. したがって $x \in \Gamma_h$ については, この証明方法が適用されない. のみならず, $x \in \Gamma_h$ で, $\{x\}$ が G_0 集合であるものが存在することを示すことが出来る.

例 無限回路 $N=\{X, Y, K, r\}$ 次のように定義する.

$$X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}, Y = \{y_1, y_2, \dots\}$$

$$K(x_n, y_n) = -K(x_{n-1}, y_n) = 1, \quad n=1, 2, \dots,$$

その他の pair $(x, y) \in X \times Y$ について, $K(x, y) = 0$

さらに, $\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n) < \infty$ であるように r を定義する.

$$g_0(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} r(y_n) - \sum_{k=n}^{\infty} r(y_k) \quad n=1, 2, \dots$$

$$g_0(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} r(y_n) \quad \text{とおくと,}$$

g_0 は x_0 を pole とする調和 Green 函数であることは容易

にわかる. したがって, $N \notin 0_G$ であり, $\Gamma_h \neq \emptyset$ であるから

$x \in \Gamma_h$ とし, また $x' \in \Gamma$, $x' \neq x$ として, 矛盾をみちびく.

結局, $\Gamma = \Gamma_h = \{x\}$ であり, $V_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \cup \{x\}$ が x の近

傍であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となる. しかも, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{x\}$ とな

るので, $\{x\}$ は G_0 集合である.

Riemann 面 R の場合では, R の Royden の compact 化 R^*

において, $\Gamma - \Gamma_h$ の閉包は Γ と一致するので, 例のように

$\Gamma - \Gamma_h = \emptyset$ とはならない.

次の問題は未解決である.

① 無限回路において, x が $\Gamma - \Gamma_h$ の閉包の点ならば, $\{G_0\}$

は非 G_0 集合となるか.

② $x \in \Gamma_h$ が Γ_h の内点ならば, $\{x\}$ は G_0 集合か, あるいは,

x は Γ_h の孤立点か.

参 考 文 献

- [1] L. Sario and M. Nakai, Classification theory of Riemann surfaces, Springer-Verlag, 1970.

- [2] M. Yamasaki, Discrete potentials on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. J., 13 (1979), 31-44.