

Holonomic system の制限と characteristic variety

京大 数理研 柏原 正樹^{*}

Holonomic system を sub-variety に制限したときの support はどうなるか, という問題を考える. $X \supset Y$ とし, $\mathcal{M}$ を連接 $\mathcal{O}_X$ -加群, $\mathcal{M}_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ を Y への制限とする. これは $\mathcal{O}_Y$ -加群である.

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y T^*Y & \hookrightarrow & T^*X \\ \downarrow p & & \\ T^*Y & & \end{array}$$

により射影 p を定義する. まず基本的な結果として

定理 非特性的な場合, 即ち $\text{Ch}(\mathcal{M}) \cap T^*_Y X$ が 0-切断に含まれるとき, $\mathcal{M}_Y$ は連接的である.

$$\text{Ch}(\mathcal{M}_Y) \subset p(\text{Ch}(\mathcal{M}) \cap X \times_Y T^*Y)$$

(このとき p は $\text{Ch}(\mathcal{M})$ の上での有限射像になり, 像は閉集合となる.)

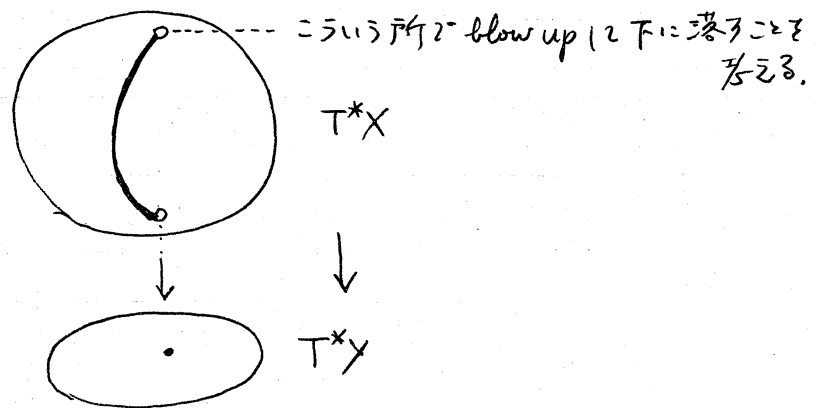
注意 一般には $\mathcal{M}_Y$ は連接的に限らぬ. 連接的でない $\mathcal{M}_Y$

^{*}) P. Schapira との共同の仕事. 文責・研究代表者.

に対しては, その台を

$$\text{Ch}(m_Y) = \bigcup_{\substack{\pi \subset m_Y \\ \text{coherent}}} \text{Ch}(\pi)$$

で定義する.



X を複素多様体, $\mathcal{X} = T^*X$ とし, $\Lambda \in \mathcal{X}$ の conic, homogeneous, non-singular な Lagrange 多様体とする. $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m)$ を $\mathcal{X}$ 上の m 次同次関数の作る層とする. このとき $T_{\Lambda}X \cong T^*\Lambda$ とみなせる. 実際,

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & \\
 \uparrow & & \\
 T_{\Lambda}\mathcal{X} & & T^*\Lambda \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 T\mathcal{X} & \xleftarrow{H} & T^*\mathcal{X}/T_{\Lambda}^*\mathcal{X} \\
 \uparrow & & \\
 T\Lambda & & \\
 \uparrow & & \\
 0 & &
 \end{array}$$

において Hamilton 写像 H により $T_{\Lambda}^*\mathcal{X}$ と $T\Lambda$ が一対一に対応している.

す。このとき、 Λ がLagrangeanであることと同値である。 $\mathcal{E}(m)$ を高々 m 階の擬微分作用素が作る層、 $\sigma_m: \mathcal{E}(m) \rightarrow \mathcal{Q}_x(m)$ を主シンボルとする。次のものを導入する。

$$\mathcal{J}_\Lambda = \{P \in \mathcal{E}(1); \sigma_1(P)|_\Lambda = 0\}$$

$\mathcal{E}_\Lambda$: $\mathcal{J}_\Lambda$ で生成される $\mathcal{E}$ の部分環

$$\mathcal{E}_{\Lambda, m} = \mathcal{E}(m) \cap \mathcal{E}_\Lambda = \mathcal{J}_\Lambda^m \quad (m \geq 0)$$

$$\tilde{\sigma}_m: \mathcal{E}_{\Lambda, m} \rightarrow \mathcal{E}_{\Lambda, m} / (\mathcal{E}_{\Lambda, m-1} + \mathcal{E}_{\Lambda, m+1} \mathcal{E}(-1))$$

また、 $\mathcal{J}_\Lambda = \{\varphi \in \mathcal{Q}_x; \varphi|_\Lambda = 0\}$ とすれば、

$$\mathcal{E}_{\Lambda, m} \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{J}_\Lambda^m \cap \mathcal{Q}_x(m) \xrightarrow{\quad} \mathcal{J}_\Lambda^m / \mathcal{J}_\Lambda^{m-1} \cap \mathcal{Q}_x(m)$$

$\tilde{\sigma}_m$

と分解される。最後の項は $T_\Lambda \mathcal{X}$ の二つの $\mathbb{C}$ -作用により m 次同次なものとなる。

例 $\Lambda = \{(x_1, \dots, x_n) = (x', x'')\}, \quad x' = (x_1, \dots, x_\ell)$

$$\mathcal{X} = \{(x, \xi) = (x', x'', \xi', \xi'')\}$$

$$\Lambda = \{(x, \xi); x' = \xi'' = 0\}$$

$$T_\Lambda \mathcal{X} = \{(x, \xi) = ((0, x'', \xi', 0); (x', 0, 0, \xi''))\}$$

基底点

法線ベクトル $(= x' \frac{\partial}{\partial x'} + \xi'' \frac{\partial}{\partial \xi''})$

を考える。このとき

$$\mathcal{E}_\Lambda = \{P \in \mathcal{E}; P = \sum P_j(x, D), \text{ 各 } P_j (j \geq 1) \text{ は}$$

Λ で j 重に消える}

$$\tilde{\sigma}_m: \mathcal{E}_{\Lambda, m} \ni P \mapsto P_m \text{ の } (x', \xi'') \text{ に関する Taylor 展開の } m \text{ 次の項}$$

となる. $\tilde{\sigma}_m(P)$ は (ξ, ξ') と (ξ, ξ'') について ξ の m 次の $T_\Lambda \mathcal{X}$ 上の函数である.

定義 連接 $\mathcal{E}$ -加群 $\mathcal{M}$ に対して $Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ を次のように定める: $\mathcal{M} = \sum u$ とす

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) = \{ q \in T_\Lambda \mathcal{X}; p u = 0 \text{ を満たす } \forall p \in \mathcal{E}_{\Lambda, m}, \forall m \geq 0 \text{ に対して } \tilde{\sigma}_m(P)(q) = 0 \}$$

一般に $\mathcal{M} = \sum u_1 + \dots + \sum u_N$ とす

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) = \bigcup_{j=1}^N Ch(\sum u_j)$$

この概念は filtration を用いても, 或はミクロ微分作用素を用いても定義可能である.

次に

$$\mathcal{X} = \dot{T}^*X = T^*X - 0 \text{ 切断}$$

$$X \supset Y \text{ 部分多様体}$$

$$\Lambda = T_Y^*X \cap \mathcal{X} \rightarrow Y$$

という状況を考える. 射影 $p, \bar{p}$ は

$$\begin{array}{ccc} \dot{T}^*X \supset Y \times_X \dot{T}^*X - \Lambda & & \\ \downarrow p & & \\ \dot{T}^*Y & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \dot{T}_\Lambda \mathcal{X} \simeq \dot{T}^*\Lambda \supset \Lambda \times_Y T^*Y & & \\ \searrow \bar{p} & & \downarrow \\ & & \dot{T}^*Y \end{array}$$

により定める.

定理1 $\mathcal{M}$ が連接 $\mathcal{D}_X$ -加群のとき

$$\dot{T}^*Y \cap Ch(\mathcal{M}_Y) \subset p(Ch(\mathcal{M}) \cap (Y \times_X T^*X - \Lambda)) \cup \bar{p}(Ch_\Lambda(\mathcal{M}))$$

右辺の集合は閉じていることに注意. 実際

$$\begin{aligned} (Y \times_X T^*X - \Lambda) \cup T_\Lambda \mathcal{X} &\supset \mathcal{C}(m) \cup \mathcal{C}_\Lambda(m) \\ &\downarrow \\ T^*Y \end{aligned}$$

において射影化を行えば, 固有写像になる.

具体的な計算は (普通の characteristic variety のときより更に) 大変であるが, 簡単にわかる場合もある. 以下それと述べる. 一般に $X \supset Y$, smooth とし, 部分集合 $Z \subset X$ に対し集合 $C_Y(Z) \subset T_Y X$ を次のように定める: 適当に座標を入れ $X \subset \mathbb{R}^n$ ($\subset \mathbb{C}^n$) とすると

$$C_Y(Z) = \bigcup_{x \in Y} \{v \in T_x X / T_x Y; v = \lim a_n(x_n - y_n), \text{ ここに}$$

$$a_n \in \mathbb{R}, y_n \in Y, x_n \in Z \text{ で } y_n \rightarrow y, x_n \rightarrow x\}$$

例えば $Y = \{x' = 0\}$ なら

$$C_Y(Z) = \{(x', x''); \exists x_n \in Z, a_n x'_n \rightarrow x'\}$$

定理 2 m が確定特異点を持ったホロノミー系 π ならば

$$\mathcal{C}_{h_\Lambda}(m) = C_\Lambda(\mathcal{C}(m)) \subset T_\Lambda \mathcal{X}$$

となる. ($\mathcal{C}(m) \subset \mathcal{X}$ である.)

応用例 f は正則函数とし $m = \mathcal{O}f^\lambda$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(m) &\subset \{(x, \xi); \exists x_n \rightarrow x, \exists c_n \in \mathbb{C}, \\ &\quad c_n f(x_n) \rightarrow 0, c_n df(x_n) \rightarrow \xi\} \end{aligned}$$

(Λ が generic なときここで等号が成り立つ)

証明 (t, x) 空間の加群 $\pi = \mathcal{O}(t + f(x))^\wedge$ とおくと
 $\pi|_{t=0} = \mathcal{O}f^\wedge$ である. ここで次の主張を用いる.

系 $\text{Ch}(\pi_Y) \subset \{(x'', \xi'') \in T^*Y; \exists (x_\nu, \xi_\nu) \in \text{Ch}(\pi),$
 $x'_\nu \rightarrow 0, x''_\nu \rightarrow x'', \xi'_\nu \rightarrow \xi'', |x'_\nu| |\xi'_\nu| \rightarrow 0\}$

この系は定理1と定理2から出る. これを用いると上の例が
 出る. 実際,

$$\text{Ch}(\pi) = \{0\text{-切断}\} \cup \{(t, x, \tau, \xi); t + f(x) = 0, \xi = \tau df(x)\}$$

$$\text{Ch}(\pi_Y) = \{0\text{-切断}\} \cup \{(x, \xi); \exists x_\nu \rightarrow x, \tau_\nu df(x_\nu) \rightarrow \xi,$$

$$f(x_\nu) \rightarrow 0, |f(x_\nu)\tau_\nu| \rightarrow 0\}$$

定理1の証明は時間が無いので止める. (論文は inventions
 にまかす.)

ここで holonomic でない例を少し見てみよう.

$X = \mathbb{C}^n$, $Y = \{x_1 = 0\}$, $\pi = \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X D_2$ のとき,
 $\{\xi_2 = 0\}$ である. $\pi = \mathcal{O}u$ とするときは $\pi_Y = (\mathcal{O} / \mathcal{O} D_2)^\wedge$
 と書け, $\text{Ch}(\pi_Y) \subset \{\xi_2 = 0\}$.

$\pi = \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X(D_2 + x_1 D_1)$ のときは,

$$0 = D_1^j (D_2 + x_1 D_1) u = (D_2 D_1^j + (x_1 D_1 + j) D_1^j) u$$

$$= (D_2 + x_1 D_1 + j) D_1^j u = 0$$

$$\therefore (D_2 + j) u_j = 0$$

よって $\pi_Y = \bigoplus_{j \geq 0} \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X(D_2 + j)$, となる. 各 u_j は独立なの
 で直和因子はすべて同型である. (感じとしては δ -函数の

存在: $\{ \varepsilon_{\Lambda, m} \} \ni \{ \ell(x, D_1, x) + \varepsilon_{\Lambda, m+1} (-1) \} u = 0$, のようなものが無いと連接的にはなすめようである.

定理2の証明は今のところ大変面倒である. これは次の予想からもある:

予想 $\mathcal{M}$ が確定特異点型を持つホロノミー系のもと, 任意の Λ に関して Levi 条件が成り立つ

ここで Levi 条件とは次のように定義されるものである:

一般に $\mathcal{E}$ -加群 $\mathcal{M}$ に対して次は同値である.

1) $\mathcal{M}$ に含まれる任意の連接的な $\mathcal{E}_{\Lambda}$ -部分加群 $\mathcal{N}$ と, 任意の連接的な $\mathcal{E}(0)$ -加群 $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ に対して, $m \gg 0$ のとき

$$f_{\Lambda}(\mathcal{N} \cap \mathcal{E}(m)\mathcal{L}) = \mathcal{N} \cap \mathcal{E}(m+1)\mathcal{L}$$

2) 上か $\mathcal{M}$ を生成するようなある $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$ について成り立つ.

3) 上か $\mathcal{N} = \mathcal{E}_{\Lambda}\mathcal{L}$ のとき成り立つ.

定義 これらが成り立つとき $\mathcal{M}$ は Levi 条件を満たすという.

Levi 条件から定理2の結論が得られる. もう少し弱い予想として次のものがある.

予想 任意の連接 $\mathcal{E}$ -加群 $\mathcal{M}$ について,

$$\text{Ch}_{\Lambda}(\mathcal{M}) \subset \{\omega = 0\} \Rightarrow \text{Levi 条件.}$$

ただしこの仮定から制限が連接的とは云えない.