

ベルマン方程式に対する確率制御について

神大理 西尾真喜子 (Makiko Nisio)

§ 1. 序. 系の運動が確率微分方程式で表される場合の制御 (確率制御) において, 価値関数とベルマン方程式の間の次の関係がよく知られている。制御域 Γ を k 次元コンパクト集合とする。 d 次元ブラウン運動 $B = (B(t), t \geq 0)$ に対し, B 適合 Γ 値確率過程を *admissible control* と呼び, その全体を $\mathcal{U}$ とおく。 $U \in \mathcal{U}$ により系を制御するとき, 系の運動は次の d 次元確率微分方程式により記述されるものとする。

$$(1.1) \quad dX(t) = \alpha(X(t), U(t)) dB(t) + \gamma(X(t), U(t)) dt$$

$$X(0) = x.$$

ここで α は $d \times d$ 対称行列値関数, γ は d 次元関数。

α, γ が有界でなめらかなとき, (1.1) の一意解 $(X(t); x, U), t \geq 0$ は存在し, B 適合である。運動を時

刻 T 迄経けたときの評価関数 J を, 次のように定義しよう。

$$(1.2) \quad J(T, x, U) = E \int_0^T e^{-\int_0^s c(X(\theta; x, U), U(\theta)) d\theta} f(X(s; x, U), U(s)) ds \\ + e^{-\int_0^T c(X(\theta; x, U), U(\theta)) d\theta} \varphi(X(T; x, U)).$$

この場合の値関数 V ,

$$(1.3) \quad V(T, x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} J(T, x, U)$$

は適当な条件の下で, 左めらひさともち, 次のヘルマン方程式を満たす。

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} = \sup_{u \in U} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x, u) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \gamma_i(x, u) \frac{\partial V}{\partial x_i} - c(x, u) V \right. \\ \left. + f(x, u) \right], \quad t > 0 \\ V(0, x) = \varphi(x), \end{array} \right.$$

$$ここで, \quad a(x, u) = \frac{1}{2} \alpha^2(x, u).$$

最近 N. V. Krylov [2] と N. S. Trudinger [7] は, (1.4) 右辺の [...] 内を非線形型階同型作用素に拡張したヘルマン方程式と取扱い, 適当な条件の下で, 古典解の一意的存在を示した。このような非線形型作用素の族に対するヘルマン方程式が, 確率制御とどの様に関連するかと調べることは, 問題

が多いように思われるが、本稿では、 $f(x, u) \leq f(x, v, u)$ に拡張した右の最も簡単な場合について考察しよう [6].

この場合の値関数 v , (1.3) と (1.4) の関係と類似して, §2 で与える. 特に

$$(1.5) \quad f(x, v, u) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k v^k$$

ただし, $p_1 = 0$, $p_k \geq 0$, $k=0, 2, 3, \dots$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, $\lambda > 0$, の場合, controlled branching diffusion を用いて, §3 で, 値関数の regularity を論じる.

§2. 値関数. この章では, (2.1) に対応する値関数を定義し, 性質を述べる.

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = \sup_{u \in \Gamma} (A(u)V - c(x, u)V + f(x, V(t, x), u)), \\ V(0, x) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d.$$

$$(2.2) \quad A(u) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x, u) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \gamma_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

得数に於て, 次の仮定を置く. (X 上の一様連続な有界関数の全体 $\in BUC(X)$ とおき, sup norm を与える).

$$(A.1) \quad a_{ij}, \gamma_i, c \in BUC(\mathbb{R}^d \times \Gamma).$$

$$(A.2) \quad \sup_{u \in \Gamma} |g(x, u) - g(y, u)| \leq K |x - y|, \\ g = \alpha, \gamma, c.$$

$$(A.3) \quad f \in BUC(R^d \times R^1 \times \Gamma)$$

$$\sup_{u \in \Gamma} |f(x, v, u) - f(y, w, u)| \leq K |x - y| + h |v - w|.$$

条件 (A1) (A2) より, (1.1) は B 適合な一意解をもつ.

(1.3) を形式的に真偽し, (2.1) に対応する値関数 V

(2.2) により定義し

$$(2.2) \quad V(t, x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} E(t, x, \varphi, V, U).$$

に注意し,

$$(2.3) \quad F(t, x, \varphi, g, U) \\ = E \int_0^t e^{-\int_0^s c(X(\theta; x, U), U(\theta)) d\theta} \\ f(X(s; x, U), g(t-s, X(s; x, U)), U(s)) ds \\ + e^{-\int_0^t c(X(\theta; x, U), U(\theta)) d\theta} \varphi(X(t; x, U)).$$

Proposition 1. $\varphi \in BUC(R^d)$ に対し, (2.2) の一意解 $V \in BUC([0, T] \times R^d)$, $\forall T > 0$, が存在する.

証明 逐次近似法を用いるとよい. i.e. 近似解 V_k を次のように定義する

$$V_0 = \varphi, \quad V_k(t, x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} F(t, x, \varphi, V_{k-1}, U).$$

このとき, $V_k \in BUC([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ となり, 条件 (A2) (A3) より, V_k は $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ 上で一様収束し,

その極限 $V = \lim V_k$ が (2.2) の一意解になる。

以後の議論のため, (2.2) の解が, 初期値 φ に依存することと示しておく方が便利なので, $V(t, x, \varphi)$ とおくことにする。

価値関数 V に対して Bellman Principle が成立する. i.e.

$$(2.4) \quad V(t+s, x, \varphi) = V(t, x, V(s, \cdot, \varphi))$$

証明 V_k の定義により, V_{k-1} は既に価値関数であるから, (1.3) に対する Bellman Principle と同様にして,

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & V_k(t+s, x, \varphi) \\ &= \sup_{U \in \mathcal{U}} F(t, x, V_k(s, \cdot, \varphi), V_{k-1}(s+\cdot, \cdot, \varphi), U) \end{aligned}$$

が成立する. V_k が V に一様収束するから,

$$(2.6) \quad V(t+s, x, \varphi) = \sup_{U \in \mathcal{U}} F(t, x, V(s, \cdot, \varphi), V(s+;\cdot, \varphi), U).$$

ゆえに, $\tilde{V}(t, x) = V(s+t, x, \varphi)$ とおいて

$$(2.7) \quad \tilde{V}(t, x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} F(t, x, V(s, \cdot, \varphi), \tilde{V}, U).$$

すなわち, $\tilde{V}$ は $V(s, \cdot, \varphi) \in BUC(R^d)$ を初期値とする

(2.2) の解となる. i. e. $\tilde{V}(t, x) = V(t, x, V(s, \cdot, \varphi))$.

ゆえに, (2.4) (Bellman Principle) が成り立つ.

$$(2.8) \quad V(t) \varphi = V(t, \cdot, \varphi) \quad t \geq 0$$

により $V(t)$ を定義すれば, Proposition 1 により, $(V(t), t \geq 0)$ は $BUC(R^d)$ 上の半群になる。さらに, φ がなめらかるとき, (2回微分可 $BUC(R^d)$ に属する), 確率積分に対する伊藤の公式を用いると, φ が $V(t)$ の generator G の domain に属し, $G\varphi$ が次の形にかけることが証明できる.

$$(2.9) \quad G\varphi(x) = \sup_{u \in \Gamma} (A(u)\varphi - c(x, u)\varphi + f(x, \varphi(x), u))$$

したがって, 若し価値関数 $V(t, x, \varphi)$ が x につき, なめらかであれば, (2.1) の古典解を与える。(古典解の一意的存在については [2], [7] を参照).

P. L. Lions により導入された viscosity solution は、
 ヘルマン方程式の有用な弱解で、確率制御の値問題は mild
 な条件の下で、ヘルマン方程式の一意的な viscosity sol-
 ution になるが、この事実は (2.1) に対しても成立つ。

$$(A4) \quad \sup_{u \in \Gamma} \|a_{ij}(x, u)\|_{W^2(R^d)} < \infty, \quad i, j=1, \dots, d.$$

Proposition 2. 仮定 (A1) ~ (A4) の下で、値関数
 $V(\cdot, \cdot, \varphi)$ は (2.1) の一意の viscosity solution
 とする。

証明. V を有界な可微分可能な関数 W_k で次のように近似する。

$$(2.10) \quad \sup_{x \in R^d, t \leq 2^k} |V(t, x, \varphi) - W_k(t, x)| \leq 2^{-k}.$$

$\bar{W}_k$ を (2.11) により定義する。

$$(2.11) \quad \bar{W}_k(t, x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} F(t, x, \varphi, W_k, U),$$

(2.10) より, $\bar{W}_k$ は V に $[0, T] \times R^d$ 上, 一様収束する。

一方, 仮定 (A1), (A2), (A4) により, $\bar{W}_k$ はヘルマン方程式:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{W}_k}{\partial t} = \sup_{u \in \Gamma} (A(u) \bar{W}_k - c(x, u) \bar{W}_k + f(x, W_k(t, x), u)) \\ \bar{W}_k(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

の一意的 viscosity solution である。さらに, (2.10) より

$$f(x, W_k(t, x), u) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x, V(t, x), u) \\ \text{uniformly on } [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \Gamma.$$

ゆえに, viscosity solution の stability より, V は (2.1) の viscosity solution である。

一意性. $W \in BUC([0, T] \times \mathbb{R}^d) \quad \forall T > 0$) は (2.1) の viscosity solution とする。

$$g(t, x, u) = f(x, W(t, x), u)$$

と仮定す。 $g \in BUC([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ であり, W はヘルツ方程式;

$$(2.13) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \sup_{u \in \Gamma} (A(u)W - c(x, u) + g(t, x, u)) \\ W(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

の一意的な viscosity solution であり, 次のように値関数として表わされる。

$$(2.14) \quad W(t, x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} \left[\int_0^t e^{-\int_0^s c(X(\theta; x, U), U(\theta)) d\theta} g(t-s, X(s; x, U), U(s)) ds \right. \\ \left. + e^{-\int_0^t c(X(\theta; x, U), U(\theta)) d\theta} \varphi(X(t; x, U)) \right]$$

g の定義を代入すれば,

$$W(t, x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} F(t, x, \varphi, W, U).$$

すなわち, W は (2.2) の解となる. Proposition 1 より, $V=W$.

§3. Controlled branching diffusion. 以後 (A.1)

(A.2) と次の (A.5) ~ (A.7) を仮定しよう.

$$(A.5) \quad C(x, u) = \lambda > 0$$

$$(A.6) \quad f(x, v, u) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k v^k$$

$$\text{ただし, } p_k \geq 0, \quad p_1 = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

$$(A.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k < \infty.$$

$\bar{B} = (\bar{B}(t), t \geq 0)$ を d 次元ブラウン運動, $Z(t)$ を t におけるブラウン粒子の数, τ_1 を first branching time とする. 次の branching law にしたがって, 各ブラウン粒子は分裂する, [1],

$$(3.1) \quad \begin{cases} P(\tau_1 > t \mid Z(0)=1) = e^{-\lambda t} \\ P(Z(\tau_1) = k \mid Z(0)=1) = p_k, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

すなわち, 各ブラウン粒子はパラメータ λ の指数分布に従って

かう待つ時間の後に分裂し、確率 p_k で $(k-1)$ 個のブラウン粒子が新しく生まれ、 p_0 の確率で消滅する。また各ブラウン粒子は、分裂した場所から出発する独立な d 次元ブラウン運動になる。ゆえに、新しく生まれたブラウン運動と親のブラウン運動に順次つないで行くと、時刻 0 より後のブラウン運動が得られる。このようにして得られる d 次元ブラウン運動に適当に番号をつけておけば、 k 番目のブラウン運動 B_k は、

$$B_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(t - \tau_i) \chi_{[\tau_i, \tau_{i+1})}^{(t)}, \quad (\chi_A \text{ は } A \text{ の定義関数})$$

と表される。ただし、 $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ は $\bar{B}$ の branching time で、 k に依存した $\xi_0, \xi_1, \dots$ は独立な d 次元ブラウン運動である。また、 $Z(0) = 1$ のとき、 $B_1(t) = B_2(t) = \dots$, $\forall t < \tau_1$, である。 $[0, t]$ 上で同一のブラウン運動となる番号の中では、一番小さい番号を代表にとる。 $j(t)$ と時刻 t における代表の番号の全体とする。例えば $j(t) = \{1\}$, $\forall t < \tau_1$, となる。

次のように確率測度を与えよう。 $[0, \infty) \times C([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d)$ 上で定義された $\mathbb{P}$ 値関数 U がボレル可測で、各 t に対し、 $U(t, \cdot)$ が $C([0, t] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ 上のボレル関数となるとき、admissible control と呼ぶ。 $C(T \rightarrow \mathbb{R}^d)$ は T 上の d 次元連続関数の全体で、ユンバウト上の sup norm による

位相). U がこの意味で admissible control ならば, d 次元ブラウン運動 B を合成させた $\tilde{U}(t) = U(t, B)$ は §2 の意味で admissible control になり, 逆に §2 の admissible control $\tilde{U}$ は, 適当な admissible control U を用いて, $U(t) = \tilde{U}(t, B)$ と表すことが出来る。admissible control の全体を $\mathcal{A}$ とおく。

$U \in \mathcal{A}$ に対し, 確率微分方程式

$$(3.2) \quad \begin{cases} dX_k(t) = \alpha(X_k(t), U(t, B_k))dB_k(t) + \gamma(X_k(t), U(t, B_k))dt \\ X_k(0) = x \end{cases},$$

$k = 1, 2, \dots$

は, 各 k に対し, B_k 適当な一意解 $X_k(t) = X_k(t, x, U)$ を持つ。さらに, X_k の確率法則は k に無関係になる。

$\bar{X}(t) = (X_j(t), j \in \mathcal{J}(t))$ は, $\bar{B}$ と同じ branching time を持ち, non-branching part は,

$$(3.3) \quad \begin{cases} dX(t) = \alpha(X(t), U(t, B))dB(t) + \gamma(X(t), U(t, B))dt \\ X(0) = x \end{cases}$$

で表される。

$$C = \{ \varphi \in BUC(R^d); \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad \forall x \in R^d \}$$

とすれば, C は $BUC(R^d)$ の convex closed subset になる。(3.2) で与えられた運動 $\bar{X}$ は, 時刻 t に続けたときの評価関数 $W(t, x, \varphi, U)$ は, 次のように与えられる。

$$(3.4) \quad W(t, x, \varphi, U) = E \prod_{k \in Z(t)} \varphi(X_k(t, x, U))$$

$$(3.5) \quad W(t, x, \varphi) = \sup_{U \in \mathcal{A}} W(t, x, \varphi, U).$$

よく知られたように, ブラウン運動の次数を表す $Z(t), t \geq 0$ は, Galton-Watson process となり, 平均と分散は

$$E(Z(t)/Z(0)=1) = e^{(m-1)\lambda t}$$

$$V(Z(t)/Z(0)=1) = \begin{cases} \frac{M+1}{m-1} (e^{2(m-1)\lambda t} - e^{(m-1)\lambda t}), & m \neq 1 \\ (M+1)\lambda t, & m = 1 \end{cases}$$

となる。ここで, $m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$, $M = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k$ (したがって, 適当な定数 Λ により

$$(3.6) \quad E(Z^2(t)/Z(0)=1) \leq e^{\Lambda t}.$$

が成立する。この評価を考慮するため, 確率論的計算 [5] を

真以て, Proposition 3 が証明される。

$$(3.7) \quad \varphi \in C \Rightarrow W(t \cdot \varphi) \in C \quad \text{かつ}$$

$$W(\cdot \cdot \varphi) \in BUC([0, T] \times R^d), \quad \forall T.$$

そこで, $W(t)\varphi = W(t \cdot \varphi)$ により, $W(t): C \rightarrow C$ に
定義する。

Proposition 3.

$$(i) \quad W(0) = \text{identity} \quad W(t+s) = W(t)W(s).$$

$$(ii) \quad \varphi(x) \leq \psi(x), \quad \forall x \in R^d \Rightarrow$$

$$W(t)\varphi(x) \leq W(t)\psi(x), \quad \forall x \in R^d \quad \forall t \geq 0.$$

$$(iii) \quad \|W(t)\varphi - W(t)\psi\| \leq e^{(m-1)\lambda t} \|\varphi - \psi\|$$

さらに, φ かつ $\psi \in C$ なる $\mathbb{R}^d$ の generator
 G の domain に属し,

$$G\varphi = \sup_{u \in \Gamma} A(u)\varphi - \lambda\varphi + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k \varphi^k.$$

仮定 (A4) の下で, $W(t)$, $\frac{\partial}{\partial t} W(t) = -G W(t)$ となる。

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sup_{u \in \Gamma} A(u)W - \lambda W + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k W^k$$

$$W(0, x) = \varphi(x)$$

の一意解 viscosity solution となる。

(2) かつ 2. Proposition 2 により, W は (2.2) のように定義した値関数と一致するが, Q が complementary non-degeneracy の場合; 値関数の存在が $\delta \pm \varepsilon$ になるのに, (3.6) を考慮すれば [3] と同様な計算が出来るように, $\bar{X}$ を用いる利便があるように思われる。

Proposition 4. 次のように係数の存在が (A8) と Q の complementary non-degeneracy (A9) を満たす。

$$(A8). \quad \sup_{u \in \Gamma} \|g(\cdot, u)\|_{C^2(\mathbb{R}^d)} < \infty, \quad g = d_{ij}, r_i, \varphi.$$

(A9). $\exists \nu > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}^d$ に対し, 次の条件を満たす正整数 n と $u_1, \dots, u_n \in \Gamma$, $\theta_1, \dots, \theta_n \in (0, 1)$ の存在が, $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ かつ

$$\sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^n \theta_k a_{ij}(x, u_k) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

となる, $W \in W_{\infty}^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ $\forall T > 0$, かつ

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sup_{u \in \Gamma} f(u) W - \lambda W + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k W^k$$

a.e. in $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$

$$W(0, x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

文献

- [1]. N. Ikeda, M. Nagasawa & S. Watanabe, On branching semi-groups I, II, Proc. Jap. Acad. 42 (1966), 1016-1026
- [2]. N. V. Krylov, Boundedly non homogeneous elliptic and parabolic equations, Math. USSR. Izv. 20 (1983) 459-492
- [3]. P. L. Lions, Control of diffusion processes in $\mathbb{R}^M$. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 121-147
- [4]. ———, Optimal control of diffusion processes and H-J-B equations, Viscosity solutions and uniqueness, Comm. P. D. E. 8 (1983)
- [5]. M. Nisio., Stochastic Control Theory. ISI. Lect. Note. Macmillan India. 1981
- [6]. ———, Stochastic control related to branching diffusion processes, Preprint
- [7]. N. S. Trudinger, Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 278 (1983), 757-769.