

100

解析空間の isolated singularity の代数性について (広中の講義による)

名大 理 松村英之

§0.

先の講演者が紹介された M. Artin の論文“解析的方程式の解について”は、形式的解があれば解析的解があるということも主定理とするが、この定理のいくつかのヴァリエーションが可能であることを Artin みずからのべている。その中でも重要なのは次のものである:

I) k を体, $k\{x_1, \dots, x_n\} = R_0$ を (収束中級数環ではなくて) 多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ の素イデアル $(x_1, \dots, x_n)$ による局所環 $k[x]_{(x)}$ の Hensel 化とする. 局所環 R_0 の完備化は形式的中級数環 $k[[x_1, \dots, x_n]]$ であり, R_0 は $k[[x]]$ の中で $k[x]$ 上に代数的な元の全体から成る部分環に外ならない. このとき, $F_\nu(Y) \in R_0[Y_1, \dots, Y_m]$ ($\nu = 1, 2, \dots, r$) による代数方程式 $F_\nu(Y) = 0$ が形式解 $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$, $\bar{y}_i \in k[[x]]$, をもてば R_0 の中で $\bar{y}$ にいくらでも近い解 y が存在する.

つまり, 方程式が解析的方程式から代数方程式に制

限される代りに、解は収束中級数よりも小さい R_0 の中で見出せると主張する。実はこの定理の完全な証明はまだ書かれていないようだが、長が標数 0 なら多分大丈夫と思われる。さてこれを認めると、次の問題が肯定的に解決される：

II) “ X も複素解析空間、 P も X の孤立特異点とすると、 P の適当な近傍はある代数多様体の孤立特異点の近傍と同型ではないか？”

P が X の単純点なら P の近傍は affine space の開集合と同型だからもちろん代数的であり、また孤立特異点でなければ、局所的にも代数的にならぬ解析空間の例は容易に作れることを注意しておこう。さて近傍の同型は P の局所環 $\mathcal{O}_P$ によって定まる。更に $\mathcal{O}_P$ の完備化を $\hat{\mathcal{O}}_P$ とすれば $\hat{\mathcal{O}}_P$ の同型から $\mathcal{O}_P$ の同型が従う（前の講演）。従って $\hat{\mathcal{O}}_P$ が、ある代数多様体の局所環の完備化と同型であることを示せばよいわけである。 $\hat{\mathcal{O}}_P$ は $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]/J$ (J はイデアル) の形をしているが、適当な変数変換ののちに J が $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ 上代数的な元で生成されれば目的が達成される。

以下にのべるのは、1967年12月、M. Artin の結果がニュースとして伝った頃、Columbia 大学で広中氏が

~~野村~~ セミナーで話されたことを、筆者のノートによって
まとめたものであり、文責は筆者にあるが、理論は広中
氏だけのものか Artin の考えも入っているのかたしかめな
かった。内容は I) から II) が従うことの証明である。

§1. R_0 を noetherian local ring, M_0 をその極大
ideal とし, H_0 を R_0 の ideal, $R = \text{the } H_0\text{-adic comple-}$
 $\text{tion of } R_0$, $H = H_0 R$, $M = M_0 R$ とおく。 R は M を極
大 ideal とする noeth. local ring である。

$J = f_1 R + \dots + f_m R$ を R の ideal, $\mathcal{O} = R/J$ とお
く。問題: $\mathcal{O}$ を代数化せよ。 という意味は, R_0 の ideal J_0
で $\mathcal{O} \cong R/J_0 R$ となる如きものを求めよということであ
る。(しからは $R/J_0 R = H_0\text{-adic completion of } R_0/J_0$ であ
るから。) この問題を考えるために, R 加群としての
exact seq.

$$(1.1) \quad L_2 \xrightarrow{g} L_1 \xrightarrow{f} R \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O} \rightarrow 0$$

をひとつ通しておく。但し $L_1 = R^m$, $L_2 = R^l$

(l は適当な integer) で f は $f(\xi) = \sum_{i=1}^m f_i \xi_i$ で与え
られるものとし, ε は自然な準同型とする。これを用い

で, f と g を "代数化" することにより $\mathcal{O}$ を代数化しようというのである. もちろん R にもつと条件をつけたいとこの問題はとけない.

(1.1) から次の複体が得られる.

$$\mathrm{Hom}_R(L_2, \mathcal{O}) \xleftarrow{g^0} \mathrm{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) \xleftarrow{f^0} \mathrm{Hom}_R(R, \mathcal{O}).$$

容易に判るように f^0 は zero map, 従って Ext の定義から $\mathrm{Ext}_R^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = \mathrm{Ker} g^0$ を得る.

一方, exact sequence

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow R \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

から

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_R(R, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(J, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \\ & \searrow 0 \nearrow & & & \end{array}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(R, \mathcal{O}) = (0)$$

なる exact seq. を得るから, canonical に

$$(1.2) \quad \mathrm{Ext}_R^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \simeq \mathrm{Hom}_R(J, \mathcal{O})$$

この $\mathrm{Ext}_R^1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ が, " R を固定しての $\mathcal{O}$ の deformation" をつかまえる," と漠然たる意味で言うことが出来る. それは次にのべるような事情からである.

R の自分自身の中への derivations の有限生成 R 加群 $\mathcal{D}$ が与えられたとしよう。このとき, R -linear map

$$\lambda: \mathcal{D} \longrightarrow \text{Hom}_R(J, \mathcal{O})$$

を $\lambda(\delta)(j) = \delta(j) \bmod J \in \mathcal{O} \quad (\delta \in \mathcal{D}, j \in J)$ で定義する。(1.2) により, canonical homomorphism

$$\beta: \mathcal{D} \longrightarrow \text{Ext}_R^1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$$

が得られたと言ってもよい。ここで

$$(1.3) \quad \nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Coker } \beta$$

と定義する。 $\nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D})$ は intrinsic に (即ち resolution (1.1) によらないで) 得られたものだが, (1.1) を用いて表わすこともできる。それには

$$\text{Ext}_R^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = \text{Kernel of } g^*: \text{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) \longrightarrow \text{Hom}_R(L_2, \mathcal{O})$$

を念頭において, R -linear map

$$\alpha: \mathcal{D} \longrightarrow \text{Hom}_R(L_1, \mathcal{O})$$

を

$$\alpha(\delta)(\xi) = \sum_{i=1}^m \xi_i \delta(f_i) \bmod J \quad (\delta \in \mathcal{D}, \xi \in L_1)$$

で定義すれば

LEMMA. $\text{Im}(\partial) \subseteq \text{Ker}(g^0)$ and

$$\nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \cong \text{Ker}(g^0) / \text{Im}(\partial).$$

Proof.

$$L_2 \xrightarrow{g} L_1 \xrightarrow{f} J \longrightarrow 0$$

is exact and

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}_R(J, \mathcal{O}) \\ & \searrow \partial & \swarrow f^* \\ & \text{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) & \\ & \swarrow g^0 & \end{array}$$

is commutative diagram and, in this diagram f^* is

$$\text{Hom}_R(J, \mathcal{O}) \cong \text{Ker } g^0 = \text{Ext}_R^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \quad \text{is isomorphic to}$$

it is easy to check. It is easy.

THEOREM. Let $\mathcal{O}$ be the following two conditions

(A) $\delta \in H^i(\mathcal{O})$ ($i > 0$) then, R is automorphism σ
 with $\sigma(u) \equiv u + \delta(u) \pmod{H^{2i}}$ (for all $u \in R$)

存在する (これを δ による Taylor 展開と呼ぶ). (たとえば $R = k[[x_1, \dots, x_n]]$, $H = (x_1, \dots, x_n)$ で $\mathfrak{A} = \sum R \frac{\partial}{\partial x_i}$ ならばこの条件は成立つ. $u = \varphi(x) \in R$, $\delta = \sum h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し $\sigma(u) = \varphi(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n)$ とおけばよい.)

(B) $H^\nu \nabla_R(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (0)$ for $\nu \gg 0$.

これらの条件の下に, 次の性質をもつ非負整数の組 (s, t, r) が存在する:

(*) L_1, L_2 は (1.1) の通りとし, 以下の3条件を満足する任意の

$$L_2 \xrightarrow{g'} L_1 \xrightarrow{f'} R$$

を考える.

(i) $f'g' = 0,$

(ii) $g' \equiv g \pmod{H^s L_1},$

(iii) $f' \equiv f \pmod{H^t}$ with some integer $\nu \geq t$.

このとき, R の automorphism σ で

$$\sigma \equiv \text{id}_R \pmod{H^{\nu-r}}, \quad \sigma(\text{Im } f') = J$$

を満足するものが存在する.

略言すれば, f, g に十分近い f', g' で $f'g' = 0$ が成立てば, $J = \text{Im } f$ と $J' = \text{Im } f'$ とは R の autom. で

互に移り得て, $\mathcal{O} = R/J \approx R'/J'$ が得られるというのである.

定理の証明は §2 にまわして, これを用いて $I) \Rightarrow II)$ の証明ができることを示そう.

$I) \Rightarrow II)$. ^(標本の) k を体, J を formal power series ring $k[[x_1, \dots, x_n]]$ の ideal とし, local ring $\mathcal{O} = k[[x]]/J$ を考える. 上の記号に合わせれば $R_0 = k\{x\}$ (= Henselization of $k[x]_{(x)}$), ~~R~~ $R = k[[x]]$, $\mathcal{D} = \sum R \frac{\partial}{\partial x_i}$ とする. $H = (x_1, \dots, x_n)$ とする.

$J = (f_1, \dots, f_m)$ とし $L_2 \xrightarrow{g} L_1 = R^m \xrightarrow{f} R \rightarrow 0$ を次のように取る. $\mathcal{O}$ 上での定理の仮定(B): $H^p \nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}) = 0$ for $p \gg 0$ が成立つていれば, 定理に言う如き (s, t, r) が存在する. さて $g = (g_{ij}), f = (f_j); g_{ij}, f_j \in k[[x]]$ であり $f g = (f_j)(g_{jk}) = (\sum_j f_j g_{jk}) = 0$ である.

Artin の定理 I) を ^(方程式) _{連立} $\sum_{j=1}^m Y_j Z_j = 0 \quad (i=1, \dots, l)$

に適用すれば, f, g に十分近くてしかも成分が $k\{x\}$ に入る行列 f', g' が存在して $f'g' = 0$ をみたすことが判る. すると $L_2 \xrightarrow{g'} L_1 \xrightarrow{f'} R \rightarrow 0$ は (i) (ii) (iii) をみたすから, 定理により

$\mathcal{O} \approx \text{completion of } k\{x_1, \dots, x_n\} / (f'_1, \dots, f'_m)$

が得られる。各 f'_i は $k\{x\}$ の元であるから $k[[x]]$ 上に代数的、従って $\mathcal{O}$ は代数的様体の local ring の完備化と同型である。それが II) であった。しかし仮定 (B): $H^v \nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = (0)$ for $v \gg 0$ を示すにはどうしたらよいか? そのために $\mathcal{O}$ が孤立特異点であるという仮定が必要になるのである。

$\mathcal{O}$ が孤立特異点、すなわち極大 ideal を除くすべての $(\mathcal{O}_P)$ ~~prime ideal~~ prime ideal $\mathfrak{p}$ に対し $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ は regular local ring であるという仮定しよう。 $\mathfrak{p}$ に対応する $R = k[[x]]$ の prime ideal を $\mathfrak{P}$ とする: $\mathfrak{P}/J = \mathfrak{p}$. からは $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{P}}/J_{\mathfrak{P}}$ で、 $R_{\mathfrak{P}} \neq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \neq \text{regular}$ ことから、 $d = \dim R_{\mathfrak{P}} - \dim \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ とおけば $J_{\mathfrak{P}} = (f_1, \dots, f_d)$ と書ける。この f_i による Koszul complex

$$\binom{d}{2} \prod R_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{g} \prod^d R_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{f=(f_1, \dots, f_d)} R_{\mathfrak{P}}$$

を考える。[Koszul complex の定義を思い出すならば、

$\binom{d}{2} \prod R_{\mathfrak{P}}$ の canonical basis を $(e_{ij})_{1 \leq j \leq d}$ と表わし

$$g(e_{ij}) = f_i e_j - f_j e_i, \quad f(e_i) = f_i \quad \text{で定義する。}$$

(g, f を)

これから

$$\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}} \left(\overset{(d)}{\pi R_{\mathfrak{p}}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \right) \xleftarrow{g^0} \text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}} \left(\overset{d}{\pi R_{\mathfrak{p}}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \right)$$

$\uparrow \partial$
 $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}} = \sum R_{\mathfrak{p}} \frac{\partial}{\partial x_i}$

を考えれば、 g の定義から $g^0 = \text{zero map}$, $\text{zero map } \partial$ は行列 $\partial(f_1, \dots, f_d) / \partial(x_1, \dots, x_n) \pmod{\mathfrak{p}}$ で与えられる。 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ の正則性の Jacobian criterion によればこの Jacobian matrix は $\text{mod } \mathfrak{p}$ で rank d をもつから、 ∂ は surjective である。よって先の Lemma により

$$\nabla_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}) = (0).$$

局所化はたいていの作用と commute するから、この左辺が

$$\nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}) \text{ の } \mathfrak{p} \text{ における局所化 } (\nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}))_{\mathfrak{p}} \text{ に等しいこと}$$

とほすべしとしかめられる。 $\star$ しかし $(\nabla_R)_{\mathfrak{p}} = (0)$ ($\mathfrak{p} \neq \overset{m}{\text{max. ideal}}$)

は $\text{Supp}(\nabla_R) \subseteq \{m\}$ を意味し、 $\nabla_R = \nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D})$

は有限生成の $\mathcal{O}$ 加群だから $m^N \nabla_R = (0)$ なる N が存在する。

~~よって~~ (いま H は R の極大 ideal である。) それが証明すべきことであつた。

($\star$ ∇ の定義が intrinsic であることに注意)
(1.3)

§2 定理の証明.

正整数 a, b, c, s' を次のように定める.

- 1) $H^a \cdot \nabla_R(\mathcal{O}, R) = (0),$
- 2) $H^\mu \cap J \subseteq H^{\mu-b} J \quad \text{for all } \mu \geq b,$
- 3) $H^\nu \cdot \text{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) \cap \text{Ker } g^\circ \subseteq H^{\nu-c} \text{Ker } g^\circ$
for all $\nu \geq c,$
- 4) $H^\mu \cdot \text{Hom}_R(L_2, \mathcal{O}) \cap \text{Im } g^\circ \subseteq H^{\mu-s'} \text{Im } g^\circ$
for all $\mu \geq s'.$

2), 3), 4) には Artin-Rees の定理を用いるのである. $s' \leq s$ とし $\begin{pmatrix} s=s'+1, \\ t=2(a+b+c+s) \end{pmatrix}$ とおく. この (s, t, r) が定理の条件をみたす. 証明すべきことは

$$(*) \quad L_2 \xrightarrow{g'} L_1 \xrightarrow{f'} R \quad \text{が条件}$$

- (i) $f'g' = 0,$
- (ii) $g' \equiv g \pmod{H^s L_1},$
- (iii) $f' \equiv f \pmod{H^\nu}$ with $\nu \geq t$

をみたすならば, R の autom. σ で

$$\sigma \equiv \text{id}_R (H^{\nu-r}), \quad \sigma(\text{Im } f') = J$$

を満足するものが存在する

いま $f' = f + \xi$, $g' = g + \eta$ とおけば, $f'g = 0$

より $f\eta + \xi g + \xi\eta = 0$, 一方 $\xi \equiv 0 (H^v)$,

$\eta \equiv 0 (H^s)$, $J = \text{Im}(f)$, すると

$$\xi g \equiv 0 (J + H^{v+s}).$$

$\bar{\xi} = \xi \bmod J \in \text{Hom}_R(L_1, \mathcal{O})$ とおけば $g^0(\bar{\xi}) \equiv 0 (H^{v+s}\mathcal{O})$

よって 4) により

$$g^0(\bar{\xi}) \in H^{v+s} \cdot \text{Hom}_R(L_2, \mathcal{O}) \cap \text{Im}(g^0)$$

$$\subseteq H^{v+t} \text{Im}(g^0) = g^0(H^v \cdot \text{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}))$$

よって

$$\bar{\xi}'' \in H^{v+t} \text{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}), \quad g^0(\bar{\xi}'') = g^0(\bar{\xi})$$

なる $\bar{\xi}''$ が存在する. $\bar{\xi}''$ を induce する $\xi'' \in H^{v+t} \text{Hom}_R(L_1, R)$

をとり $\xi' = \xi - \xi''$ とおけば, 上からは

$$g^0(\bar{\xi}') = g^0(\bar{\xi}) - g^0(\bar{\xi}'') = 0,$$

i.e. $\xi' g \equiv 0 (J)$.

$\xi \equiv 0 (H^v)$, $\xi'' \equiv 0 (H^{v+t})$ ことから $\xi' \equiv 0 (H^v)$,

$$\bar{\xi}' \in H^v \cdot \text{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) \cap \text{Ker } g^0$$

$$\subseteq H^{v-c} \text{Ker } g^0.$$

一方 $\nabla_R(\mathcal{O}, R) = \text{Ker } g^0 / \partial(\mathcal{D})$ ことから 1) により

$H^a \cdot \text{Ker } g^0 \subseteq \partial(\mathcal{D})$, かつ $v-c \geq t-c > a$ ことから

$$H^{\nu-c} \text{Ker } g^0 \subseteq H^{\nu-c-a} \partial(\mathfrak{D}) = \partial(H^{\nu-c-a} \mathfrak{D}). \quad \text{よって}$$

$\xi' = \partial(\delta)$ となるような $\delta \in H^{\nu-c-a} \mathfrak{D}$ が存在する.

仮定 (A) により, R の autom. τ を

$$\tau(u) \equiv u + \delta(u) \quad (H^{2(\nu-c-a)}) \quad \text{for all } u \in R$$

と仮定する.

$$\begin{aligned} f' - \tau(f) &\equiv f' - f - \delta(f) && (H^{2(\nu-c-a)}) \\ &\equiv \xi - \xi' && (\mathfrak{J}) \\ &= \xi'' \equiv 0 && (H^{\nu+1}) \end{aligned}$$

$$(2\nu - 2c - 2a) - (\nu + 1) = \nu - 2(a+c) - 1 > 0 \quad \text{だから, } \tau \equiv \text{id} \quad (H^{\nu-c-a})$$

よって

$$f' - \tau(f) \equiv 0 \quad (\text{mod } (\mathfrak{J} + H^{\nu+1}) \cap H^{\nu-c-a})$$

$$\begin{aligned} \text{また } (\mathfrak{J} + H^{\nu+1}) \cap H^{\nu-c-a} &= (\mathfrak{J} \cap H^{\nu-c-a}) + H^{\nu+1} \\ &\subseteq H^{\nu-c-a-b} \mathfrak{J} + H^{\nu+1} \end{aligned}$$

よって

$$\lambda_0 \in H^{\nu-a-b-c} \text{Hom}_R(L_1, L_1),$$

$$f' - \tau(f) - f \circ \lambda_0 \equiv 0 \quad (H^{\nu+1})$$

ある λ_0 が存在する. $\lambda = \tau^{-1}(\lambda_0)$ とおけば ($\Rightarrow \tau$

$\tau \in L_1 = R^m$ の autom. は拡張して同じ文字で表わした),

$$\tau \equiv \text{id} \quad (H^{\nu-a-c}) \quad \text{より} \quad \lambda \equiv 0 \quad (H^{\nu-a-b-c}).$$

また $f \equiv \tau(f) \pmod{H^{\nu-a-c}}$ から

$$f \cdot \lambda_0 = f \cdot \tau(\lambda) \equiv \tau(f\lambda) \pmod{H^{2\nu-2a-b-2c}}$$

$$2\nu-2a-b-2c > \nu+1 \quad \text{により}$$

$$f' - \tau(f) - \tau(f\lambda) \equiv 0 \pmod{H^{\nu+1}}$$

さて, $1+\lambda$ は L_1 の autom. である (何故なら $\det(1+\lambda) \equiv 1 \pmod{H}$ で $H \subseteq \text{rad}(R)$ だから $\det(1+\lambda)$ は R の unit).

これから

$$\tau^{-1} \cdot (f') \cdot (1+\lambda)^{-1} \equiv f \pmod{H^{\nu+1}}$$

そこで

$$f'' = \tau^{-1} f' (1+\lambda)^{-1}, \quad g'' = (1+\lambda) \tau^{-1} g'$$

と置く. すると f'', g'' は (*) の条件 (i) (ii) (iii) を, ν の代りに $\nu+1$ を入れても満足する. 実際 (ii) は

$$g'' \equiv (1+\lambda) \tau^{-1} g' \pmod{H^{\nu-c-a}}, \quad \tau \equiv \text{id} \pmod{H^{\nu-c-a}},$$

$$1+\lambda \equiv \text{id} \pmod{H^{\nu-a-b-c}},$$

$$\nu-a-b-c \geq t-a-b-c > s,$$

$$\therefore g \equiv g' \equiv g'' \pmod{H^s}.$$

また (iii) $f'' \equiv f \pmod{H^{\nu+1}}$ はすでに証明されている.

この手続きを無限に繰返す. すると R の autom. $\tau_1, \tau_2, \dots$ で $\tau_i \equiv \text{id} \pmod{H^{\nu+i-1-r}}$ なるもの, および

L_1 の autom. $1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \dots$ で $\lambda_i \equiv 0$.

$(H^{n+i-1-a-b-c})$ をみたすものが ^{得られ} ~~ある~~, R の完備性から
無限積 $\dots \tau_2^{-1} \tau_1^{-1}, (1+\lambda_1)^{-1} (1+\lambda_2)^{-1} \dots$ は夫々収束す
る. これらを $\sigma (\in \text{Aut}(R))$, $\Lambda (\in \text{Aut}_R(L_1))$ で表わ
せば

$$\boxed{\sigma \cdot f' \cdot \Lambda = f}$$

従って $\sigma(\text{Im } f') = \text{Im } f = J$, 且 $\sigma \equiv \text{id} (H^{n-r})$.

Q. E. D.