

Partial geometric space について

愛媛大 理 木村 浩 (Hiroshi Kimura)

愛媛大 教育 大森 博之 (Hiroyuki Ohmori)

$S = (\{A_i\}_{i=-1}^m, T)$ が 以下の条件をみたす時, S は m 次元の Partial geometric space と云われる。

- (i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j, -1 \leq i, j \leq m$)
- (ii) $T \subset \prod_{i=-1}^m A_i$
- (iii) $|A_{-1}| = |A_m| = 1$
- (iv) A_i ($-1 \leq i \leq m$) の任意の元 x_i に対し $x_i = x_i$ と対応 $(x_{-1}, \dots, x_i, \dots, x_m) \in T$ が存在する。
- (v) $T \ni (y_{-1}, \dots, y_m), (z_{-1}, \dots, z_m)$ で, ある k ($-1 \leq k \leq m$) に対し $y_k = z_k$ のとき $(y_{-1}, \dots, y_k, z_{k+1}, \dots, z_m) \in T$ 。
- (vi) $A_{i-1} \ni x_{i-1}$ と $A_{i+1} \ni x_{i+1}$ が incident の時, x_{i-1}, x_{i+1} は incident だ $k(i)$ 個の A_i の元と存在する。ただし $2 \leq k(i) < \infty$ 。
- (vii) $A_i \ni x_i, A_j \ni x_j$ の時, x_i と x_j は 1 intersection $x_k (\in A_k)$ 及び 1 join $x_s (\in A_s)$ を持つ。

(viii) $m \geq 2$ とする。 $A_i \ni \lambda_i$, $A_{i+1} \ni \lambda_{i+1}$ から $i-1$ intersection λ_{i-1} 及び λ の join λ_0 ($0 \leq i \leq m-2$, $i+2 \leq \lambda \leq m$) を持つとき, λ_{i-1} , λ_{i+1} 両方に incident で λ_i と $(i+k)$ join を持つように A_i の元の個数は λ_i , λ_{i+1} のとり方に無関係に一定で λ_i を $t(i, \lambda, k)$ で記す。ここに $1 \leq k \leq \lambda - i - 1$ かつ $0 \leq i \leq m-2$, $i+2 \leq \lambda \leq m$ なる i, λ に対し $\sum_{k=1}^{\lambda-i-1} t(i, \lambda, k) \geq 1$ 。

(注) $A_i \ni \lambda_i$ と $A_j \ni \lambda_j$ から incident とは $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_j = \lambda_i$ とする $(t_1, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_m) \in T$ からなることができるとき ($i < j$), また $\lambda_l (\lambda_0)$ から λ_i と λ_j の l intersection (λ join) とは $\lambda_l (\lambda_0)$ は λ_i , λ_j 両方に incident で $-1 \leq l \leq \min[i, j]$ ($\max[i, j] \leq \lambda \leq m$) かつ $\lambda_n (\lambda_{n'})$ から λ_i , λ_j 両方に incident のとき $\lambda_n (\lambda_{n'})$ は $\lambda_l (\lambda_0)$ に incident のときをいう。ただし $-1 \leq n \leq l$ ($\lambda \leq n' \leq m$)。

また, $k(i)$ ($0 \leq i \leq m-1$) を configuration parameters, $t(i, \lambda, k)$ ($0 \leq i \leq m-2$, $i+2 \leq \lambda \leq m$, $1 \leq k \leq \lambda - i - 1$) を geometric parameters とする。

この partial geometric space は partial geometry (r, k, λ) : $\mathcal{P}[1]$ の概念の一般化として Misikimino [3°] が導入しました。実際、 $A_{-1} = \{\emptyset\}$, A_0 とは $\mathcal{P}$ の点全体, A_1 とは $\mathcal{P}$ の直線全体, $A_2 = \mathcal{P}$ としたとき T を $\mathcal{P}$ の点及び直線の incidence 関係から導かれる自然なものとする。このとき $S = (\{A_i\}_{i=-1}^2, T)$ は $k(0) = k$, $k(1) = r$, $\lambda(0, 2, 1) = \lambda$ なる パラメータをもつ 2次元の partial geometric space であることがわかります。

Partial geometric space の簡単な例として

Example 1. A を異なる $m+1$ 点集合 ($m \geq 2$) とし,
 $A_{-1} = \{\emptyset\}$, $A_j = \{B \mid B \subset A, |B| = j+1\}$ ($0 \leq j \leq m$),
 $T = \{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m A_i \mid x_i \subset x_{i+1}, 0 \leq i \leq m-1\}$
 とし, $S_1 = (\{A_i\}_{i=-1}^m, T)$ とおくと S_1 は m 次元の Partial geometric space となり, その configuration parameters は $k(i) = 2$ ($0 \leq i \leq m-1$), geometric parameters は $\lambda(l, l+2, 1) = 2$ ($0 \leq l \leq m-2$) で他の geometric parameters は未定義となる。

Example 2. $PG(m, q)$ を projective geometry とする。
 $A_{-1} = \{\emptyset\}$, $A_j = \{B \mid B \text{ は } PG(m, q) \text{ の } j \text{ 次元部分空間}\}$

$T = \{ (t_1, \dots, t_m) \in \prod_{i=1}^m A_i \mid t_i \subset t_{i+1}, 0 \leq i \leq m-1 \}$
 とし, $S_2 = (\{A_i\}_{i=1}^m, T)$ とおくと S_2 は m 次元の
 partial geometric space となり, その configuration pa-
 rameters は $k(i) = g+1$ ($0 \leq i \leq m-1$), geometric parameters
 は $\lambda(l, l+2, 1) = g+1$ ($0 \leq l \leq m-2$) であり他の geometric
 parameters は未定義となる。

ところで Example 1 と 2 には共通な性質 (*) が
 ある事がわかります。

$$(*) \begin{cases} (i) & k(i) \text{ は } 0 \leq i \leq m-1 \text{ なる } i \text{ に対し一定。} \\ (ii) & \lambda(i, \lambda, k) = k(i). \text{ ただし } 0 \leq i \leq m-2, \\ & \lambda = i+2, k=1 \text{ の残りの場合は未定義} \end{cases}$$

今回の報告は partial geometric space $S = (\{A_i\}_{i=1}^m, T)$
 が性質 (*) をもつときの S の特徴付けをするのが目的
 です。即ち

定理 $k(i) = 2$ (case A) のとき S は S_1 (Example
 1) と同値になる。 $k(i) = g+1 > 2$ かつ $m \geq 3$ (case B)
 のとき S は S_2 (Example 2) と同値になる。

定理の証明の概略.

1° $A_i \ni x_i, y_i$ が $i-1$ intersection を持つとき, これは $i+1$ gain を持つ. (ただし $0 \leq i \leq m-1$.) これは S の性質 (*) をもつ事から導かれる.

2° $A_j \ni x_j, A_k \ni x_k$ に対し 両者は incident とする. 今 x_j, x_k 両方に incident な A_i の元の個数を $\phi(i, x_j, x_k)$ で記すと

$$\phi(i, x_j, x_k) = \begin{cases} k-j \binom{i-j}{i-j} & (\text{case A}) \\ \prod_{l=1}^{i-j} \frac{d^{k-j-l-1} - 1}{d^l - 1} & (\text{case B}) \end{cases}$$

ただし, $-1 \leq j < i < k \leq m$.

このことは, $\phi(i, x_j, x_k)$ が x_j, x_k のとり方に無関係である事を示している. ϕ, τ は $\phi(i, j, k)$ で記す. 又 $\phi(i, j, k)$ が $-1 \leq i, j, k \leq m$ なるすべての値に対して定義出来る事がわかります.

3° $A_i \ni x_i$ ($0 \leq i \leq m$) に対し, x_i と incident な A_0 の元全体を $b(x_i)$ で記す. このとき x_i から $b(x_i)$ への対応は全単射となります.

case A の場合は上の 1° ~ 3° から容易に証明出来る. 従って以下は case B の場合を考えます.

4° A_0 の元を失, A_{m-1} の元を Γ ロックと考えると自然に出来る Γ ロック・デガン $D = (A_0, A_{m-1})$ は

対称な $2-(v, k, \lambda)$ デザインとなります。ここに,

$$v = (d^{m+1}-1)/(d-1), \quad k = (d^m-1)/(d-1), \quad \lambda = (d^{m-1}-1)/(d-1)$$

5° $x_0, y_0 \in D$ の 2 点とし, x_0, y_0 を含む D のブロックのすべての intersection の全体を $\langle x_0, y_0 \rangle$ とする。

一方 $x_0, y_0 \in S$ の A_0 の元とみた時に, これらの join を x_1 とすると $\langle x_0, y_0 \rangle = b(x_1)$ なる事がわかります。この事から Dembowski-Wagner [2°] の結果を用いると, D は $PG(m, d)$ の点及び超平面から構成されたデザインである事がわかります。

6° 最後に $A_i \ni x_i (1 \leq i \leq m)$ に対し $b(x_i)$ は次元 i の $PG(m, d)$ の部分空間である事が帰納的に証明されます。

参考文献

- 1° R.C. Bose. Strongly regular graphs, Partial geometries and Partially balanced designs. Pacific J. Math., 13(1963)
- 2° P. Dembowski-A. Wagner. Some characterization of finite Projective spaces, Arch. Math., 11(1960)
- 3° R.D. Miskimins. Partial geometries of dimension m . Ph.D. Dissertation, Colorado State Univ., Summer, 1978