

バナッハ空間の ψ -直和とその凸性

新潟大自然科学 三谷 健一 (Ken-ichi Mitani)
新潟大理 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

1 序文

$\mathbb{C}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が *absolute* であるとは

$$\|(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

が成立するときをいう. $\|\cdot\|$ が *normalized* とは

$$\|(1, 0, \dots, 0)\| = \|(0, 1, 0, \dots, 0)\| = \dots = \|(0, \dots, 0, 1)\| = 1.$$

をいう. 例えば ℓ_p -norms $\|\cdot\|_p$ は absolute normalized である:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max(|x_1|, \dots, |x_n|) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

AN_n を $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized norm 全体とする. また, Ψ_2 を

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$$

を満たす $[0,1]$ 上の連続凸関数全体とする. このとき, Bonsall-Duncan[2] は, $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm を $[0,1]$ 上の凸関数で特徴付けた. 即ち, AN_2 と Ψ_2 は

$$\psi(t) = \|(1-t, t)\| \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (1)$$

の下で 1 対 1 対応がある. 実際, 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(x_1, x_2)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + |x_2|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1| + |x_2|}\right) & ((x_1, x_2) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x_1, x_2) = (0, 0)) \end{cases}$$

と定義すると $\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ かつ (1) をみたす. これに関連して, Saito-Kato-Takahashi [12] は $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm を次のように特徴付けた. 任意の $n \geq 2$ に対して,

$$\Delta_n = \{(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} \leq 1, s_i \geq 0 \ (\forall i)\}.$$

とおく. 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して,

$$\psi(s_1, \dots, s_{n-1}) = \|(1 - \sum_{i=1}^{n-1} s_i, s_1, \dots, s_{n-1})\| \quad ((s_1, \dots, s_{n-1}) \in \Delta_n). \quad (2)$$

とすると, ψ は Δ_n 上で連続な凸関数であり, 次の条件を満たす:

$$\psi(0, 0, \dots, 0) = \psi(1, 0, \dots, 0) = \dots = \psi(0, \dots, 0, 1) = 1 \quad (A_0)$$

$$\psi(s_1, \dots, s_{n-1}) \geq (s_1 + \dots + s_{n-1}) \psi\left(\frac{s_1}{s_1 + \dots + s_{n-1}}, \dots, \frac{s_{n-1}}{s_1 + \dots + s_{n-1}}\right) \quad (A_1)$$

$$\psi(s_1, \dots, s_{n-1}) \geq (1 - s_1) \psi\left(0, \frac{s_2}{1 - s_1}, \dots, \frac{s_{n-1}}{1 - s_1}\right) \quad (A_2)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\psi(s_1, \dots, s_{n-1}) \geq (1 - s_{n-1}) \psi\left(\frac{s_1}{1 - s_{n-1}}, \dots, \frac{s_{n-2}}{1 - s_{n-1}}, 0\right). \quad (A_n)$$

Ψ_n を Δ_n 上の凸連続関数で $(A_0), (A_1), \dots, (A_n)$ を満たすもの全体とする. このとき AN_n と Ψ_n は 1 対 1 対応に対応する. 実際, 任意の $\psi \in \Psi_n$ に対して,

$$\begin{aligned} & \| (x_1, x_2, \dots, x_n) \|_\psi \\ &= \begin{cases} (|x_1| + \dots + |x_n|) \psi\left(\frac{|x_1|}{|x_1| + \dots + |x_n|}, \dots, \frac{|x_n|}{|x_1| + \dots + |x_n|}\right) & \text{if } (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0), \\ 0 & \text{if } (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

を定めると, $\|\cdot\|_\psi \in AN_n$ かつ (2) を満たす.

この対応から, ℓ_p -norm 以外の absolute norm が多く存在することがわかる. ℓ_p -norm $\|\cdot\|_p$ に対応する関数を ψ_p とおく.

さらにこれに関連して, ψ -直和が導入された. $\psi \in \Psi_n$ とバナッハ空間 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に対して, $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ 上のノルムを

$$\| (x_1, x_2, \dots, x_n) \|_\psi = \| (\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_n\|) \|_\psi \quad (x_i \in X_i).$$

とする. このバナッハ空間を $X_1, X_2, \dots, X_n$ の直和とよび $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_\psi$ と表す. これは有限個の ℓ_p -直和の一般化であることに注意する. 実際 $1 \leq p \leq \infty$ のとき $(X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_{\psi_p} = (X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n)_p$.

バナッハ空間 X に対して, 閉単位球, 単位球面をそれぞれ $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とおく.

定義 1.1. (i) バナッハ空間 X が狭義凸であるとは, 任意の $x \neq y$ なる $x, y \in S_X$ に対して $\|(x+y)/2\| < 1$ が成り立つときをいう.

(ii) バナッハ空間 X が一様凸であるとは, 任意の ε ($0 < \varepsilon \leq 2$) に対して $0 < \delta < 1$ が定まり, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ なる任意の元 $x, y \in B_X$ に対して, $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$ が成り立つことである.

定義 1.2 ([3]). バナッハ空間 X が *uniformly non-square* であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して $\|(x-y)/2\| > 1 - \delta$, $x, y \in B_X$ ならば $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$ であるときをいう.

定義 1.3 ([1, 3]). (i) バナッハ空間 X が B_n -convex であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x_1, \dots, x_n \in B_X$ に対して,

$$\min_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n\| \leq n(1 - \delta)$$

であるときをいう. また, X が B -convex であるとは, ある $n \geq 2$ に対して, X が B_n -convex であるときをいう.

(ii) バナッハ空間 X が J_n -convex であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x_1, \dots, x_n \in B_X$ に対して

$$\min_{1 \leq k \leq n} \|x_1 + \dots + x_k - (x_{k+1} + \dots + x_n)\| \leq n(1 - \delta)$$

のときをいう.

明らかに, uniformly non-square と B_2 -convex (= J_2 -convex) は一致する. また, 次のことが知られている:

- (i) uniformly non-square ならば superreflexive である, この逆は成立しない.
- (ii) X が J -convex であることと X が superreflexive であることは同値.
- (iii) X が B -convex であることと X が of type p for some $p > 1$ は同値.

また最近, $\mathbb{C}^n$ 上の absolute ノルムや ψ -直和空間における狭義凸性, 一様凸性, smooth 性, uniformly non-square 性などについて研究されている. ([4, 5, 6, 9, 10, 12, 17]).

本論文では, これらの幾何学的性質を ψ -直和を用いて特徴付けを与えることを目的とする. 第 2 章では狭義凸性, 一様凸性の ψ -直和による特徴づけを考察する. 第 3 章では uniformly non-squareness を考察する. Takahashi-Kato [15] は uniformly non-square Banach space を Littlewood 行列のノルムの評価を使って特徴付けたが, この結果を ψ -直和空間に対しても同様の議論を行うことができる. さらに B -convexity や J -convexity についても同様に ψ -直和を使って特徴付ける.

2 狭義凸性, 一様凸性

初めに, 次の狭義凸性に関する特徴づけを考える.

命題 2.1 ([1]). X をバナッハ空間とし, $1 < p < \infty$ とする. このとき X が狭義凸であることと任意の $x, y \in X (x \neq y)$ に対して

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < \frac{1}{2} (\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (3)$$

であることは同値である.

定理 2.2 (Mitani-Saito[7]). $\psi \in \Psi_2$ とし, ψ が唯一の最小点 t_0 を持つとする. このとき次は同値である.

- (i) バナッハ空間 X が狭義凸である.
- (ii) 任意の $x, y \in X$ ($x \neq y$) に対して

$$\|(1-t_0)x + t_0y\| < \frac{1}{\psi(t_0)} \|((1-t_0)x, t_0y)\|_{\psi} \quad (4)$$

である.

Remark 2.3. 定理 2.2 において, $\psi = \psi_p$ ならば $\psi_p(t) > \psi_p(1/2)$. 従って (4) の不等式は (3) の不等式になることが容易にわかる. ゆえにこの定理は上の命題を含む.

例 2.4. $1/2 \leq \alpha \leq 1$ とする.

$$\psi_{\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}t + 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \alpha, \\ t & \text{if } \alpha \leq t \leq 1. \end{cases}$$

このとき $\psi_{\alpha} \in \Psi_2$ であり, $X \oplus_{\psi_{\alpha}} Y$ のノルムは

$$\|(x, y)\|_{\psi_{\alpha}} = \max\{\|x\| + (2 - \frac{1}{\alpha})\|y\|, \|y\|\}.$$

と与えられる.

この関数を上の定理に適用すると次が得られる.

系 2.5. $1/2 \leq \alpha < 1$ とおく. このときバナッハ空間 X は狭義凸であることと, 任意の $x, y \in X$ ($x \neq y$) に対して

$$\|(1-\alpha)x + \alpha y\| < \frac{1}{\alpha} \max\{(1-\alpha)\|x\| + (2\alpha-1)\|y\|, \alpha\|y\|\}.$$

は同値である.

Remark 2.6. 任意のバナッハ空間 X と $\psi \in \Psi_2$ に対して次の不等式が成り立つことに注意する.

$$\|(1-t_0)x + t_0y\| \leq \frac{1}{\psi(t_0)} \|((1-t_0)x, t_0y)\|_{\psi} \quad (\forall x, y \in X)$$

但し, t_0 は任意の ψ の最小点.

さらに一様凸性についても ψ -直和で特徴付けられる.

命題 2.7 ([1]). X をバナッハ空間とする. また $1 < p < \infty$ とする. このとき X が一様凸であることと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_p(\varepsilon) > 0$ が存在し $\|x - y\| \geq \varepsilon$, $x, y \in B_X$ ならば

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \leq (1 - \delta_p(\varepsilon)) \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}$$

が成り立つことは同値である.

定理 2.8 (Mitani-Saito[7]). $\psi \in \Psi_2$ が唯一の最小点 t_0 を持つとする。このとき次は同値。

- (i) バナッハ空間 X が一様凸である。
- (ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在し $\|x - y\| \geq \varepsilon$, $x, y \in B_X$ ならば

$$\|(1 - t_0)x + t_0y\| \leq (1 - \delta) \frac{1}{\psi(t_0)} \|((1 - t_0)x, t_0y)\|_\psi.$$

である。

3 uniformly non-squareness

Takahashi-Kato[15] は $\ell_p(X)$ の Littlewood 行列のノルムの評価を使い、次のように uniformly nonsquareness を特徴付けた。ここで Littlewood 行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

また、バナッハ空間 X と $1 \leq p \leq \infty$ に対して、 $\ell_p^2(X)$ を $\ell_p^2(X) = (X \oplus X)_p$ と定義する。

定理 3.1 (Takahashi-Kato[15]). バナッハ空間 X において次は同値。

- (i) X が *uniformly nonsquare*.
- (ii) ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x, y \in X$ に対して、

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^p \leq (2 - \delta) \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

- (iii) 任意の (resp. ある) p ($1 < p < \infty$) に対して、

$$\|A : \ell_p^2(X) \rightarrow \ell_p^2(X)\| < 2.$$

- (iv) 任意の (resp. ある) r と s ($1 < r \leq \infty, 1 \leq s < \infty, 1/r + 1/r' = 1$) に対して

$$\|A : \ell_r^2(X) \rightarrow \ell_s^2(X)\| < 2^{1/r' + 1/s},$$

が成り立つ。

我々は ψ -直和を使って上の結果を拡張した。任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して $\ell_\psi^2(X) = (X \oplus X)_\psi$ と定義する。

定理 3.2 (Mitani-Saito[7]). $\psi, \phi \in \Psi_2$ とする。また $\phi \neq \psi_\infty$ であり ψ は唯一の最小点 t_0 をもつとする。このときバナッハ空間 X に対して次は同値。

- (i) X は *uniformly non-square*.

(ii) ある $\delta(0 < \delta < 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} & \|((1-t_0)x + t_0y, (1-t_0)x - t_0y)\|_\phi \\ & \leq \frac{\|(1,1)\|_\phi}{\psi(t_0)}(1-\delta)\|((1-t_0)x, t_0y)\|_\psi. \end{aligned}$$

(iii)

$$\|A : \ell_\psi^2(X) \rightarrow \ell_\phi^2(X)\| < \frac{\|(1,1)\|_\phi}{\psi(t_0)}.$$

Remark 3.3. 上の定理において, $\psi = \psi_r, \phi = \psi_s (1 < r \leq \infty, 1 \leq s < \infty)$ とすると ψ は唯一の最小点 $t_0 = 1/2$ を持つ. よって (iii) は

$$\|A : \ell_{\psi_r}^2(X) \rightarrow \ell_{\psi_s}^2(X)\| < \frac{\|(1,1)\|_{\psi_s}}{\psi_r(t_0)} = 2^{1/r'+1/s}.$$

従ってこれは定理 3.1 を含む.

Remark 3.4. 任意の $\psi, \phi \in \Psi_2$ とバナッハ空間 X において,

$$\|A : \ell_\psi^2(X) \rightarrow \ell_\phi^2(X)\| \leq 2 \frac{\phi(1/2)}{\psi(t_0)}$$

但し, t_0 は ψ の最小点.

4 B-convexity and J-convexity

X をバナッハ空間とする. $1 \leq p \leq \infty$ に対して, $\ell_p^n(X)$ を $\ell_p^n(X) = \overbrace{(X \oplus \cdots \oplus X)}^n_p$ と定義する. Takahashi-Kato [16] は B-Convexity や J-Convexity を $\ell_p^n(X)$ 上のある行列のノルムの評価で特徴付けた.

定理 4.1 (Takahashi-Kato [16]). $1 < p < \infty$ とする. このときバナッハ空間 X に対して次が同値:

(i) X は B_n -convex.

(ii)

$$\|R_n : \ell_p^n(X) \rightarrow \ell_p^{2^n}(X)\| < 2^{n/p} n^{1/p'}$$

が成り立つ.

(iii) 任意の (resp. ある) r, s with $1 < r \leq \infty, 1 \leq s < \infty$ に対して

$$\|R_n : \ell_r^n(X) \rightarrow \ell_s^{2^n}(X)\| < 2^{n/s} n^{1/r'}$$

が成り立つ. ここで R_n は Rademacher 行列

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & R_n \\ \hline -1 & R_n \end{array} \right).$$

定理 4.2 (Takahashi-Kato [16]). $1 < p < \infty$ とする. このときバナッハ空間 X に対して次が同値:

(i) X が J_n -convex である.

(ii)

$$\|A_n : \ell_p^n(X) \rightarrow \ell_p^n(X)\| < n$$

が成り立つ.

(iii) 任意の (resp. ある) r, s with $1 < r \leq \infty, 1 \leq s < \infty$ に対して

$$\|A_n : \ell_r^n(X) \rightarrow \ell_s^n(X)\| < n^{1/s+1/r'}$$

が成り立つ. ここで, A_n は admissible 行列 A_n

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & A_n \\ \hline 1 & -1 \dots -1 \end{array} \right).$$

上の定理は $\ell_\psi^n(X)$ 上に対しても同様な議論を行うことができる. $\psi \in \Psi_n$ に対して $\ell_\psi^n(X)$ を

$$\ell_\psi^n(X) = \overbrace{(X \oplus \dots \oplus X)}^n_\psi$$

と定義する.

定理 4.3 (Mitani-Saito[8]). X をバナッハ空間とする.

(i) $\psi \in \Psi_n, \phi \in \Psi_{2^n}$ とする. ψ が唯一の最小点 $t_0 = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$, (但し, $t_j > 0$ ($\forall j$)) を持ち, 任意の i に対して

$$\|(1, \dots, 1, \overset{(i)}{0}, 1, \dots, 1)\|_\phi < \|(1, \dots, 1)\|_\phi$$

と仮定する. このとき X が B_n -convex であることと

$$\|R_n : \ell_\psi^n(X) \rightarrow \ell_\phi^{2^n}(X)\| < \frac{\|(1, \dots, 1)\|_\phi}{\psi(t_0)}$$

が成立することは同値.

(ii) $\psi, \phi \in \Psi_n$ とする. ψ が唯一の最小点 $t_0 = (t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ (但し, $t_j > 0$ ($\forall j$)) を持ち, 任意の i に対して

$$\|(1, \dots, 1, \overset{(i)}{0}, 1, \dots, 1)\|_\phi < \|(1, \dots, 1)\|_\phi$$

と仮定する. このときバナッハ空間 X が J_n -convex であることと

$$\|A_n : \ell_\psi^n(X) \rightarrow \ell_\phi^n(X)\| < \frac{\|(1, \dots, 1)\|_\phi}{\psi(t_0)}$$

が成立することは同値.

参考文献

- [1] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.
- [2] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, "London Math. Soc. Lecture Note Series," Vol. 10, 1973.
- [3] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math., **80** (1964), 542-550.
- [4] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, *On ψ -direct sums of Banach spaces and convexity*, J. Austral. Math. Soc., **75** (2003), 413-422.
- [5] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, *Uniform non-squareness of ψ -direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$* , Math. Inequal. Appl., **7** (2004), 429-437.
- [6] K. Mitani, S. Oshiro and K. -S. Saito, *Smoothness of ψ -direct sums of Banach spaces*, Math. Inequal. Appl., **8** (2005), 147-157.
- [7] K. Mitani and K. -S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using ψ -direct sums, preprint.
- [8] K. Mitani and K. -S. Saito, Convex properties of Banach spaces and ψ -direct sums. preprint.

- [9] K. Mitani, K. -S. Saito and T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on $\mathbb{C}^n$* , J. Convex Anal., **10** (2003), no. 1, 89–107.
- [10] K.-S. Saito and M. Kato, *Uniform convexity of ψ -direct sums of Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. **277** (2003), no. 1, 1–11.
- [11] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan Constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$* , J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532.
- [12] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on $\mathbb{C}^n$* , J. Math. Anal. Appl., **252** (2000), no. 2, 879–905.
- [13] M. A. Smith and B. Turett, *Rotundity in Lebesgue-Bochner function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **257** (1980), no. 1, 105–118.
- [14] Y. Takahashi, *Norm inequalities and geometry of Banach spaces*. RIMS Kokyuroku No. 1399 (2004).
- [15] Y. Takahashi and M. Kato, *von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces*, Nihonkai Math. J., **9** (1998), no. 2, 155–169.
- [16] Y. Takahashi and M. Kato, *Geometry of Banach spaces and norms of ± 1 matrices*. RIMS Kokyuroku No. 1039 (1998).
- [17] Y. Takahashi, M. Kato and K. -S. Saito, *Strict convexity of absolute norms on $\mathbb{C}^2$ and direct sums of Banach spaces*, J. Inequal. Appl., **7** (2002), 179–186.