

確率分布関数の漸近評価

九大理 古 川 浩

熱平衡状態で巨視変数 a の確率分布関数 $P_0(a)$ は $P_0(a) = \exp \{ V \zeta_0(a) \}$ と Scale 出来ることはよく知られている。非平衡状態に於いても同様なことが成り立つと考えられる。¹⁾

1) 分布関数を次で定義する。

$$P(a, t) = \text{Tr } \delta(a - A_H(t)) \rho_0 \quad (1)$$

ここで $A_H(t)$ は Heisenberg 表示でのオペレーター：

$$A_H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \int_{t > t_1 \dots > t_n} [\dots [A(t), \sigma(t_1)], \dots, \sigma(t_n)] \Sigma(t_1) \dots \Sigma(t_n), \quad (2)$$

$A(t) = e^{\frac{H_0}{i\hbar} t} A e^{-\frac{H_0}{i\hbar} t}$, $\Sigma(t)$ は外場。全ハミルトニアンは $H = H_0 + \sigma(t) \Sigma(t)$, ρ_0 は初期時刻での密度行列。

2) 初期状態 (熱平衡状態) で必要な物理量間の相関が short range だとする。

例えば,

$$\langle \sigma(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \sigma(t_m, \mathbf{r}_m) \rangle_1, \quad (3)$$

$$\langle \dots \rangle_0 = \text{Tr } \rho_0 \dots,$$

はもし $|t_1 - t_j| > \tau_0$ 又は $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j| > \xi_0$ ($j = 2, \dots, m$) のとき

$$\langle \sigma(t_1, \mathbf{r}_1) \rangle_0 \langle \sigma(t_2, \mathbf{r}_2) \dots \sigma(t_m, \mathbf{r}_m) \rangle_0。$$

3) そのとき

$$\langle \sigma_H^{(n_1)}(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \sigma_H^{(n_m)}(t_m, \mathbf{r}_m) \rangle_0 \quad (4)$$

も short range であるただし,

$$X_H^{(n)}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \int_{t > t_1 \dots > t_m} [\dots [X(t), \sigma(t_1)], \sigma(t_n)] \Sigma(t_1) \dots \Sigma(t_n) \quad (5)$$

古川 浩

その理由はくりかえしの commutator, $[[\dots]\dots]$, に於いていずれか一つの物理量と他との相関が消えたとき, その commutator は zero となるからである。

4)

$$P^{(n)}(a, t) = \langle \delta(a - \sum_{k=0}^n A_H^{(k)}(t)) \rangle_0 = \frac{1}{2\pi} \int ds \exp(isa) Q^{(n)}(s, t) \quad (6)$$

ここで

$$Q^{(n)}(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-is)^j}{j!} \langle \{ \sum_{k=0}^n A_H^{(k)}(t) \}^j \rangle_0, \quad (7)$$

$$A_H^{(k)}(t) = \int_V A_H^{(k)}(t, r) dr. \quad (8)$$

そのとき, 3) より

$$Q^{(n)} = \exp \{ V \alpha^{(n)}(is) \} \quad (9)$$

と scale される。したがって $P^{(n)}$ も又

$$P^{(n)}(a, t) = \exp \{ V \eta^{(n)}(\frac{a}{V}, t) \} \quad (10)$$

と scale される。ただし (6) に於いて s の積分は saddle point method が使えると仮定。

5)

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{\ell n P^{(n)}(a, t)}{V} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \eta^{(n)}(\frac{a}{V}, t) = \eta(\frac{a}{V}, t) \equiv \frac{\ell n P(a, t)}{V} \quad (11)$$

であるから $P(a, t)$ の対数は V に比例する。もし極限 (11) が存在すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(a, t) = P(a, t) \doteq P^{(n_0)}(a, t). \quad (12)$$

以上ここで (11) を導くために使った事実は「初期に於いて物理量間の相関が short range であれば, その性質は任意の有限次の摂動によっても保たれる」, という事である。

6) 変分との関係

$$P(a, t) = \exp [V \{ f(F, \frac{a}{V}, t) - \psi_0(\frac{a}{V}, t) - \phi_0(F, t) \}], \quad (13)$$

とおく、 F は外場 Σ の大きさ、又かならずしも制限は必要ないが $A \equiv \sigma$ と考えておく。

$$f(0, \frac{a}{V}, t) = f(F, 0, t) = 0 \quad (14)$$

とする。次が常に成立する。

$$\left\langle \frac{\partial \{f(F, \frac{a}{V}, t) - \phi_0(F, t)\}}{\partial F} \right\rangle = 0 \quad (15)$$

$$\left\langle \frac{\partial \{f(F, \frac{a}{V}, t) - \psi_0(\frac{a}{V}, t)\}}{\partial \frac{a}{V}} \right\rangle = 0 \quad (16)$$

ただし $\langle \dots \rangle = \int \dots P da$. もし $P(a, t)$ が $a = a^*$ にするどい極大を持てば (15), (16) は

$$\frac{\partial \{f(F, \frac{a^*}{V}, t) - \phi_0(F, t)\}}{\partial F} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \{f(F, \frac{a^*}{V}, t) - \psi_0(\frac{a^*}{V}, t)\}}{\partial \frac{a^*}{V}} = 0. \quad (18)$$

2つの potential

$$\psi(F, \frac{a}{V}, t) = f(F, \frac{a}{V}, t) - \psi_0(F, t) \quad (19)$$

$$\phi(F, \frac{a}{V}, t) = f(F, \frac{a}{V}, t) - \phi_0(\frac{a}{V}, t) \quad (20)$$

は変換

$$f(F, \frac{a^*}{V}, t) - \phi_0(F, t) - \psi_0(\frac{a^*}{V}, t) = 0 \quad (21)$$

で結びついている。すなわち ϕ_0 (or ψ_0) をきめれば ψ_0 (or ϕ_0) がきまる。

古川 浩

熱平衡系では $f(F, \frac{a}{V}) \propto F \frac{a}{V}$ であるが、非平衡状態ではこのような簡単な形にはならない。しかし(すくなくとも)定常状態に於いて $f(x, y) = xy$ となるような適当な変数が存在すれば、変分関数 ϕ_0, ψ_0 を測定量 a^* の関数として求めることが出来る。

参 考 文 献

- 1) R.Kubo, K.Matsuo and K.Kitahara, J.Stat. Phys. 9 (1973), 51.
- 2) ここでの議論は

H.Furukawa, preprint

による。